# 1.Übung zur Vorlesung Analysis

für Grund-, Mittel- und Förderschullehramt

Mathematisches Institut, Universität Leipzig

Dozent: Dr. Jan-David Hardtke

Ausgabe: Dienstag, 15.10.2019
Abgabe: Dienstag, 22.10.2019 in der Vorlesung oder bis spätestens 13:00 Uhr im Postfach Hardtke (die Postfächer befinden sich im Raum A 514).

**Wichtig:** Alle Abgaben sind mit Namen, Matrikelnummer, Übungstermin und Namen des Übungsleiters zu versehen. Die Übungen müssen selbstständig bearbeitet werden (keine Partnerabgabe).

**Aufgabe 1** (2+1+1 Punkte)**.**

(a) Seien $A, B$ und $C$ beliebige Mengen. Zeigen Sie

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

(b) Sei $M$ eine Menge und seien $A, B \subseteq M$. Beweisen Sie die sogenannten *de Morganschen Regeln*:

(i) $M \setminus (A \cup B) = (M \setminus A) \cap (M \setminus B)$

(ii) $M \setminus (A \cap B) = (M \setminus A) \cup (M \setminus B)$

**Aufgabe 2** (1+1+1 Punkte)**.** Gegeben seien Mengen $A, B$ und $C$ und Funktionen $g : A \to B$ und $f : B \to C$. Beweisen Sie:

(i) Sind $f$ und $g$ injektiv, so ist auch $f \circ g$ injektiv.

(ii) Sind $f$ und $g$ surjektiv, so ist auch $f \circ g$ surjektiv.

(iii) Sind $f$ und $g$ bijektiv, so ist auch $f \circ g$ bijektiv und für die Umkehrfunktion gilt $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

**Aufgabe 3** (1+2 Punkte). Untersuchen Sie folgende Abbildungen auf Injektivität und Surjektivität und bestimmen Sie ggf. die Umkehrabbildung.

(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := 2x^2 + 4x - 2$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(ii) $f : [0, \infty) \to [1, \infty)$ definiert durch $f(x) := \sqrt{x^2 + 1}$ für alle $x \in [0, \infty)$.[1]

**Aufgabe 4** (2+2+1+1 Punkte). Seien $A$ und $B$ zwei Mengen und $f : A \to B$ eine Funktion.
Für jede Teilmenge $C \subseteq A$ definiert man das *Bild von $C$ unter $f$* durch

$$f[C] := \{f(a) : a \in C\}.$$

Für jede Teilmenge $D \subseteq B$ wird das *Urbild von $D$ unter $f$* erklärt durch

$$f^{-1}[D] := \{a \in A : f(a) \in D\}.$$

(a) Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Für alle $D_1, D_2 \subseteq B$ gilt $f^{-1}[D_1 \cup D_2] = f^{-1}[D_1] \cup f^{-1}[D_2]$ und $f^{-1}[D_1 \cap D_2] = f^{-1}[D_1] \cap f^{-1}[D_2]$.

(ii) Für alle $C_1, C_2 \subseteq A$ gilt $f[C_1 \cup C_2] = f[C_1] \cup f[C_2]$ und $f[C_1 \cap C_2] \subseteq f[C_1] \cap f[C_2]$.

(iii) Ist $f$ injektiv, so ist sogar $f[C_1 \cap C_2] = f[C_1] \cap f[C_2]$ für alle $C_1, C_2 \subseteq A$.

(b) Zeigen Sie durch ein konkretes Gegenbeispiel, dass für nicht injektives $f$ im Allgemeinen *nicht* $f[C_1 \cap C_2] = f[C_1] \cap f[C_2]$ gilt.

[1] Dabei ist $[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$ für $a \in \mathbb{R}$.