

Übungen zur Vorlesung
Mathematik 3 für Physiker
Blatt 6

Aufgabe 1 (3 Punkte). Seien $\alpha, \kappa > 0$ und $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ die Schraubenlinie

$$\gamma(t) := (\cos(\alpha t), \sin(\alpha t), \kappa t).$$

Bestimme die Bogenlänge von γ sowie das Integral $\int_{\gamma} \langle E | ds \rangle$ für das Vektorfeld

$$E : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ x \mapsto x.$$

Aufgabe 2 (3 Punkte). Seien $\gamma, \rho : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ reguläre Kurven mit $\gamma(1) = \rho(0)$ und $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Zeige, dass

$$\int_{\gamma\rho} f ds = \int_{\gamma} f ds + \int_{\rho} f ds.$$

(Vorausgesetzt die Integrale existieren.)

Aufgabe 3 (3 Punkte). Zeige, dass das Vektorfeld

$$E : B_1(0) \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \right)$$

konservativ ist und bestimme ein Potential.

Aufgabe 4 (3 Punkte). Skizziere die Kurve

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto \begin{cases} (t \cos(\frac{1}{t}), t \sin(\frac{1}{t})) & t \in (0, 1] \\ (0, 0) & t = 0 \end{cases}$$

und zeige, dass sie stetig ist.

Gib eine Formel für die Bogenlänge $b(\epsilon)$ der Kurve auf dem Intervall $[\epsilon, 1]$ an und zeige, dass $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} b(\epsilon) = \infty$ gilt.

Hinweis: Das auftretende Integral muss nicht explizit ausgerechnet werden.

Die schriftlich bearbeiteten Übungsaufgaben sind in der Vorlesung am Donnerstag, dem 28.11.2019 abzugeben.