

6. Übungsblatt zu der Vorlesung "Grundwissen Geometrie"

Leipzig, den 10.1.2020

Abgabe: Postfach in A 514 bis Donnerstag, 23.1.2020, 13:00

In den Aufgaben 21.) – 24.) sei (E, \mathcal{G}) eine Ebene, die die Axiome (A1) – (A11) erfüllt.

21.) Beweisen Sie den Satz von Pythagoras:

In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Flächeninhalte der Quadrate über den Katheten gleich dem Flächeninhalt des Quadrats über der Hypotenuse.

Hinweis: Es seien a, b die Längen der Katheten, und c sei die Länge der Hypotenuse. Zerlegen Sie ein Quadrat der Seitenlänge $a + b$ in ein Quadrat der Seitenlänge c und vier rechtwinklige Dreiecke, die alle kongruent zu dem gegebenen sind.

(8 Punkte)

22i) Beweisen Sie den *Höhensatz* für rechtwinklige Dreiecke:

In einem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Höhe gleich dem Produkt der beiden Hypotenusenabschnitte.

ii) Beweisen Sie den *Kathetensatz* für rechtwinklige Dreiecke:

In einem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über einer Kathete gleich dem Produkt aus dem anliegenden Hypotenusenabschnitt und der gesamten Hypotenuse.

Hinweis:

Es gibt viele Beweise zu i) und ii). – Sie *können* i) auf den Satz von Pythagoras zurückführen – und dann ii) ebenfalls mittels des Satzes von Pythagoras und des Höhensatzes beweisen.

(8 Punkte)

23.) Skizzieren Sie das – konvexe – Fünfeck mit den Eckpunkten $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (2, 0)$, $P_3 = (6, 2)$, $P_4 = (8, 6)$, $P_5 = (1, 7)$, und berechnen Sie dessen Flächeninhalt – exakt.

(6 Punkte)

24.) Es sei g eine Gerade in E und $P \in E \setminus g$. Weiter sei Q der Lotfußpunkt von P auf g , und es sei $r > 0$. Beweisen Sie:

i) Sind $A, B \in g$ mit $Zw(Q, A, B)$, so gilt: $l(\overline{PQ}) < l(\overline{PA}) < l(\overline{PB})$.

Insbesondere ist Q der eindeutig bestimmte Punkt auf g , der zu P den kleinstmöglichen Abstand hat.

ii) Ist $l(\overline{PQ}) < r$, so schneidet die Gerade g den Kreis $C(P, r)$ in genau zwei Punkten.

iii) Die abgeschlossene Kreisscheibe $\overline{K(P, r)}$ ist konvex.

Hinweise: In i) sollte der Satz von Pythagoras angewendet werden.

In ii) ist unbedingt auch das Vollständigkeitsaxiom (A11) auszunutzen.

Wenden Sie in iii) die vorher behaupteten Aussagen auf eine geeignete Gerade an.

(8 Punkte)