

Klausur zur Vorlesung
Mathematik für Physiker 3

Name: _____

Vorname: _____

Matrikelnummer: _____

Zusätzlich abgegebene Lösungsblätter: Nein Ja (Anzahl _____)

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Σ
Gesamtpunkte	4	4	4	4	5	5	5	26 (+5)
Erzielte Punkte								

Note

Hinweise:

1. Diese Klausur besteht aus **7 Aufgaben** auf **13 nummerierten Seiten** (inklusive Deckblatt).
2. Überprüfen Sie die Angabe auf Vollständigkeit.
3. Die Klausur hat **2 Teile**: im ersten Teil (Aufgaben 1–4) sind alle Aufgaben zu bearbeiten, im zweiten Teil (Aufgaben 5–7) sollen zwei von drei Aufgaben ausgewählt und bearbeitet werden, die dritte Aufgabe kann als Zusatzaufgabe für Bonuspunkte bearbeitet werden.
4. Bitte verwenden Sie zur Bearbeitung der Aufgaben den dafür vorgesehenen Platz. Sollten Sie zusätzliches Papier benötigen, wenden Sie sich an die Aufsicht. Die Verwendung von mitgebrachtem Papier ist nicht zulässig.
5. Beschriften Sie jede Seite mit **Namen und Matrikelnummer**.
6. Das einzige zugelassene Hilfsmittel ist ein **handgeschriebenes DIN A4 Blatt** als Gedächtnisstütze. Außer diesem Blatt sind keine weiteren Hilfsmittel (z.B. Taschenrechner) erlaubt.
7. Die Bearbeitungszeit beträgt **120 Minuten**.

Viel Erfolg!

Teil 1 [16 Punkte]

Aus diesem Teil sind alle Aufgaben zu bearbeiten.

1. Fluss durch eine Oberfläche**[4 Punkte]**

Gegeben sei die Menge $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z, 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$, der Schnitt aus einem (nach oben geöffneten) Kegel und einer Kugelschale, sowie die Vektorfelder

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ yz \end{pmatrix}, \quad G(x, y, z) = (\operatorname{rot} F)(x, y, z) = \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie den Fluss $g_{\partial B}$ von G durch den Rand ∂B von B .

(b) Bestimmen Sie den Fluss g_S von G durch das Flächenstück

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} = z, 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$$

mit von der z -Achse wegzeigender Flächennormalen.

(c) Es bezeichne $f_\gamma = \int_\gamma F \cdot ds$ das Kurvenintegral von F entlang der Kurve $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos t, \sin t, 1)$, und g_K den Fluss von G durch das Flächenstück

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z, x^2 + y^2 + z^2 = 1\},$$

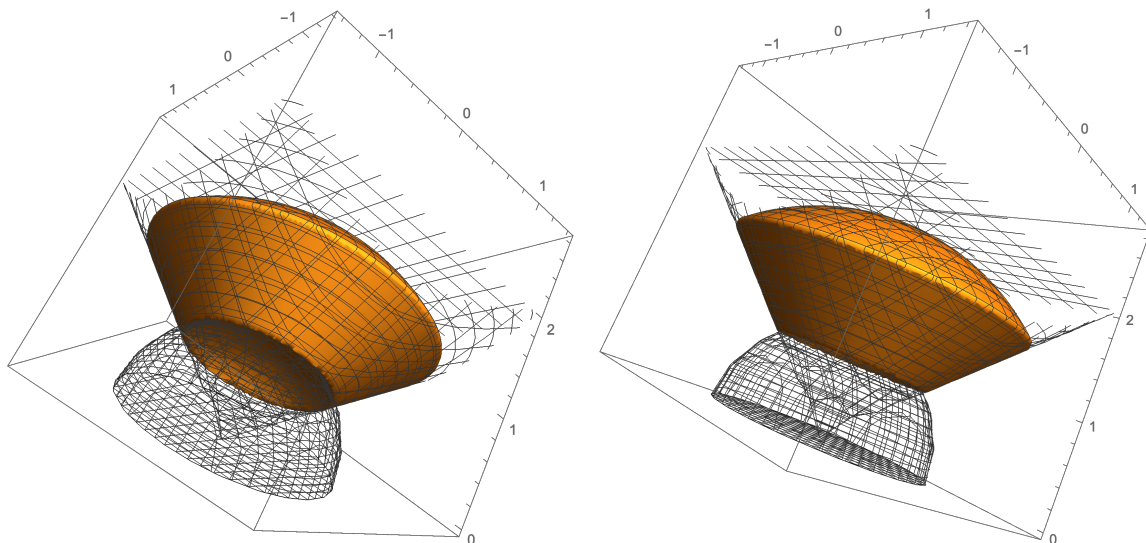
wobei die Flächennormale von Ursprung weg zeigt. Zeigen Sie, dass $g_K = f_\gamma$.

LÖSUNG:

(a) Nach dem Integralsatz von Gauß ist

$$g_{\partial B} = \int_{\partial B} \operatorname{rot} F \cdot d\sigma = \int_B \operatorname{div} \operatorname{rot} F \, d\lambda^3 = 0,$$

da $\operatorname{div} \operatorname{rot} F = 0$.



(b) Eine Parametrisierung von S ist gegeben durch $\Psi : (\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$,

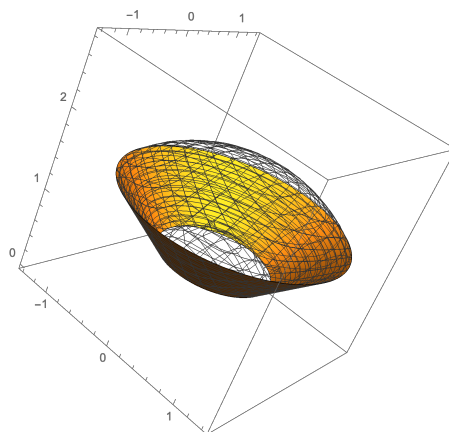
$$(r, \varphi) \mapsto \Psi(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ r \end{pmatrix}.$$

Das vektorielle Flächenelement

$$\sigma_{\Psi}(r, \varphi) = \partial_r \Psi \times \partial_{\varphi} \Psi(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r \sin \varphi \\ r \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r \cos \varphi \\ -r \sin \varphi \\ r \end{pmatrix}$$

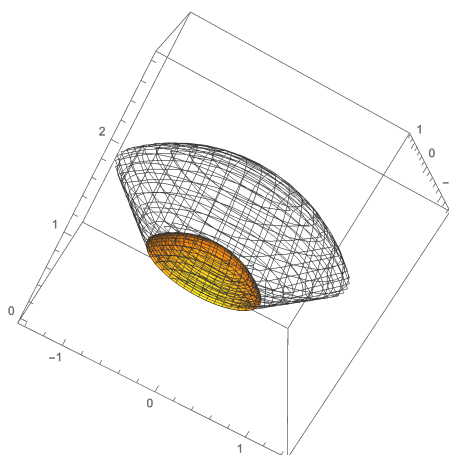
ist zur z -Achse hin, also nach innen orientiert; damit erhalten wir

$$\begin{aligned} g_S &= \int_S G \cdot d\sigma = - \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} G(\Psi(r, \varphi)) \cdot \sigma_{\Psi}(r, \varphi) \, d\varphi \, dr = - \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -r \cos \varphi \\ -r \sin \varphi \\ r \end{pmatrix} \, d\varphi \, dr \\ &= - \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} (2r - r^2 \cos \varphi) \, d\varphi \, dr = -2\pi \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}} 2r \, dr = -2\pi \left[r^2 \right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}} = -2\pi \left(2 - \frac{1}{2} \right) = -3\pi. \end{aligned}$$



(c) γ ist eine Parametrisierung des Randes von K mit mathematisch positiver Durchlaufrichtung bezüglich der Flächennormalen. Nach dem Satz von Stokes ist

$$g_K = \int_K G \cdot d\sigma = \int_{\gamma} F \cdot ds = f_{\gamma}.$$



2. Residuensatz**[4 Punkte]**

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{e^{i\frac{\pi}{3}}, e^{-i\frac{\pi}{3}}, e^{i\pi}\} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$f(z) = \frac{z}{1+z^3}.$$

(a) Berechnen Sie das Residuum von f in $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$. [ZUR KONTROLLE: $\text{Res}_{z_1} f = \frac{1}{3}e^{-i\frac{\pi}{3}} = \frac{1-i\sqrt{3}}{6}$]

(b) Die Kurve $\gamma_{1,R}$ beschreibe die gerade Verbindungslinie von 0 nach $Re^{i\frac{2\pi}{3}}$. Zeigen Sie, dass

$$\int_{\gamma_{1,R}} f(z) dz = e^{i\frac{4\pi}{3}} \int_0^R f(t) dt.$$

(c) Sei $\gamma_{2,R}$ die Kurve entlang des Kreisbogens zwischen R und $Re^{i\frac{2\pi}{3}}$, parametrisiert durch $\gamma_{2,R} : [0, \frac{2\pi}{3}] \rightarrow \mathbb{C}, \gamma_{2,R}(t) = Re^{it}$. Zeigen Sie, dass

$$\left| \int_{\gamma_{2,R}} f(z) dz \right| \rightarrow 0 \quad \text{für } R \rightarrow \infty.$$

HINWEIS: $|1 + R^3 e^{3it}| \geq |R^3 - 1|$.

(d) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^\infty \frac{x}{1+x^3} dx.$$

HINWEIS: $e^{i\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$. Sie müssen das Resultat nicht vollständig vereinfachen.

LÖSUNG:

(a) Der Nenner $1+z^3$ besitzt jeweils eine einfache Nullstelle bei

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}, \quad z_2 = e^{-i\frac{\pi}{3}}, \quad z_3 = e^{i\pi},$$

also

$$f(z) = \frac{z}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)}.$$

Da der Zähler für $z \in \{z_1, z_2, z_3\}$ nicht verschwindet, besitzt die Funktion f also in diesen Punkten Polstellen erster Ordnung. Damit ist

$$\begin{aligned} \text{Res}_{z_1} f &= \lim_{z \rightarrow z_1} (z-z_1)f(z) = \frac{z_1}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)} = \frac{1}{z_1} \frac{1}{(1-\frac{z_2}{z_1})(1-\frac{z_3}{z_1})} \\ &= e^{-i\frac{\pi}{3}} \frac{1}{(1-e^{-i\frac{2\pi}{3}})(1-e^{i\frac{2\pi}{3}})} = e^{-i\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2(1-\cos\frac{2\pi}{3})} = \frac{1}{3} e^{-i\frac{\pi}{3}}. \end{aligned}$$

(b) Wir parametrisieren $\gamma_{1,R} : [0, R] \rightarrow \mathbb{C}, \gamma_{1,R}(t) = te^{i\frac{2\pi}{3}}$. Dann folgt aus der Definition komplexer Wegintegrale

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_{1,R}} f(z) dz &= \int_0^R f(\gamma_{1,R}(t)) \dot{\gamma}_{1,R}(t) dt = \int_0^R \frac{te^{i\frac{2\pi}{3}}}{1+(te^{i\frac{2\pi}{3}})^3} e^{i\frac{2\pi}{3}} dt = e^{i\frac{4\pi}{3}} \int_0^R \frac{t}{1+t^3 e^{2\pi i}} dt \\ &= e^{i\frac{4\pi}{3}} \int_0^R \frac{t}{1+t^3} dt = e^{i\frac{4\pi}{3}} \int_0^R f(t) dt, \end{aligned}$$

da $e^{2\pi i} = 1$.

(c) Nach Definition von komplexen Wegintegralen gilt

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_{2,R}} f(z) dz \right| &= \left| \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{Re^{it}}{1 + R^3 e^{3it}} iRe^{it} dt \right| \leq \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{R^2}{|1 + R^3 e^{3it}|} dt \\ &\stackrel{(*)}{\leq} \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{R^2}{|R^3 - 1|} dt = \frac{2\pi}{3} \frac{R^2}{|R^3 - 1|} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

für $R \rightarrow \infty$, wobei in (*) der Hinweis $|1 + R^3 e^{3it}| \geq |R^3 - 1|$ verwendet wurde.

(d) Es sei γ die geschlossene Kurve in der komplexen Ebene, die sich aus dem Streckenstück von 0 bis R entlang der reellen Achse, der Kurve $\gamma_{2,R}$ und der Kurve $\gamma_{1,R}$ (rückwärts durchlaufen) zusammensetzt. Da die Kurve γ nur die Polstelle z_1 einschließt, folgt aus dem Residuensatz, dass

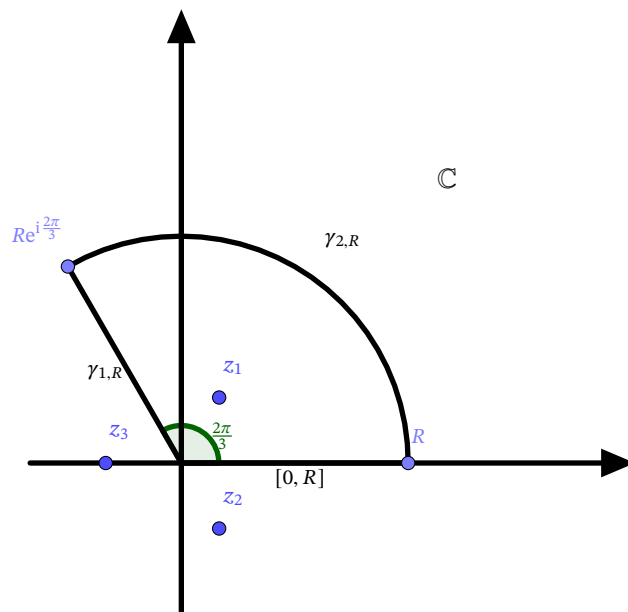
$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z_1} f = \frac{2\pi i}{3} e^{-i\frac{\pi}{3}}.$$

Mit Teilaufgabe (b) und (c) erhalten wir damit

$$\begin{aligned} \frac{2\pi i}{3} e^{-i\frac{\pi}{3}} &= \int_{\gamma} f(z) dz = \int_{[0,R]} f(z) dz + \int_{\gamma_{2,R}} f(z) dz - \int_{\gamma_{1,R}} f(z) dz \\ &= \left(1 - e^{i\frac{4\pi}{3}}\right) \int_0^R f(x) dx + \int_{\gamma_{2,R}} f(z) dz \rightarrow \left(1 - e^{i\frac{4\pi}{3}}\right) \int_0^{\infty} f(x) dx \end{aligned}$$

für $R \rightarrow \infty$. Damit ist der Wert des gesuchten Integrals gegeben durch

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^3} dx &= \frac{2\pi i}{3} \frac{e^{-i\frac{\pi}{3}}}{1 - e^{i\frac{4\pi}{3}}} = \frac{2\pi i}{3} \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \frac{2}{3 + i\sqrt{3}} = \frac{2\pi i}{3} \frac{1 - i\sqrt{3}}{3 + i\sqrt{3}} \\ &= \frac{2\pi i}{3} \frac{(1 - i\sqrt{3})(3 - i\sqrt{3})}{12} = \frac{2\pi i}{3} \frac{(-i)\sqrt{3}}{3} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}. \end{aligned}$$



3. Holomorphe Funktionen und Laurentreihen

[4 Punkte]

(a) Sei $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $u(x, y) = y^2 - x^2$. Geben Sie eine Funktion $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ an, sodass

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

eine holomorphe Funktion auf \mathbb{C} definiert.

(b) Geben Sie Haupt- und Nebenteil der Laurentreihe von

$$g(z) = \frac{\cos z}{z^2}$$

um $z = 0$ an. Auf welchem Gebiet konvergiert die Laurentreihe?

(c) Sei $h : B_2 \rightarrow \mathbb{C}$, $B_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$, gegeben durch

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n.$$

Bestimmen Sie die analytische Fortsetzung \tilde{h} von h auf einem größtmöglichen Gebiet.

LÖSUNG:

(a) VARIANTE 1: Man sieht, dass

$$\operatorname{Re} z^2 = \operatorname{Re} (x + iy)^2 = \operatorname{Re} (x^2 - y^2 + 2ixy) = x^2 - y^2 = -u(x, y).$$

Da die Funktion $z \mapsto -z^2$ holomorph auf ganz \mathbb{C} ist, können wir zum Beispiel

$$v(x, y) = -\operatorname{Im} (z^2) = -2xy$$

wählen.

VARIANTE 2: Die Funktion u ist offenbar zweimal reell differenzierbar. Damit f eine holomorphe Funktion ist, müssen wir also eine zweimal differenzierbare Funktion v finden, sodass u und v die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \partial_x u(x, y) &= \partial_y v(x, y) \\ \partial_y u(x, y) &= -\partial_x v(x, y) \end{aligned}$$

erfüllen. Es muss also gelten

$$\begin{aligned} \partial_y v(x, y) &= \partial_x u(x, y) = -2x \\ \partial_x v(x, y) &= -\partial_y u(x, y) = -2y. \end{aligned}$$

Integration der ersten Gleichung nach y liefert, dass v von der Form

$$v(x, y) = -2xy + c_1(x)$$

sein muss für eine zweimal differenzierbare Funktion $c_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Analog erhält man durch Integration der zweiten Gleichung bezüglich x , dass v von der Form

$$v(x, y) = -2xy + c_2(y)$$

sein muss für eine zweimal differenzierbare Funktion $c_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Beide Bedingungen können erfüllt werden durch die Wahl $c_1(x) = c_2(y) = c \in \mathbb{R}$. Wir können also z.B. $v(x, y) = v_0(x, y) = -2xy$ wählen.

(b) Aus der Reihenentwicklung des \cos ,

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}$$

erhalten wir sofort

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{1}{z^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k-2}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2(k-1)}}{(2k)!} = \sum_{k=-1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{z^{2k}}{(2k+2)!} \\ &= \frac{1}{z^2} + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{z^{2k}}{(2k+2)!}. \end{aligned}$$

Es ist also der Hauptteil der Laurentreihe von g um $z = 0$ gegeben durch

$$H(z) = \frac{1}{z^2},$$

mit Konvergenzgebiet $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, der Nebenteil durch die auf ganz \mathbb{C} konvergente Potenzreihe

$$N(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{z^{2k}}{(2k+2)!}.$$

Das Konvergenzgebiet der Laurentreihe ist damit der „Kreisring“ $K_{0,\infty}(0) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < \infty\}$.

(c) Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n$ konvergiert absolut und gleichmäßig auf B_2 und hat für $z \in B_2$ den Wert

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n = \frac{1}{1 + \frac{z}{2}} = \frac{2}{2+z}.$$

Die Funktion $z \mapsto \frac{2}{2+z}$ besitzt bei $z = -2$ eine Polstelle (erster Ordnung). Definiert man also

$$\tilde{h} : \mathbb{C} \setminus \{-2\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \tilde{h}(z) = \frac{2}{2+z}$$

so gilt $\tilde{h}(z) = h(z)$ für alle $z \in B_2$, also ist \tilde{h} eine holomorphe Fortsetzung von h auf $\mathbb{C} \setminus \{-2\}$. Wegen der Polstelle bei -2 kann es keine holomorphe Fortsetzung auf ein größeres Gebiet geben. Aufgrund des Identitätssatzes (\tilde{h} und h stimmen auf der offenen Menge B_2 überein) ist die Fortsetzung eindeutig.

4. Differentialgleichungssysteme

[4 Punkte]

(a) Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie das Matrixexponential e^{tA} für $t \in \mathbb{R}$.

(b) Sei $B \in \mathbb{R}^{d \times d}$ und v ein Eigenvektor von B zum Eigenwert $\lambda \neq 0$. Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{x}(t) = Bx(t) + v, \quad x(0) = 0 \in \mathbb{R}^d.$$

LÖSUNG:

(a) Man beachte, dass die Matrix A nicht diagonalisierbar ist: A besitzt den Eigenwert $\lambda = 1$ mit algebraischer Vielfachheit 2 und Eigenraum

$$E_A(1) = \ker(A - \lambda \mathbb{I}) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

der Dimension eins, d.h. die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts λ ist $1 < 2$, und damit ist A nicht diagonalisierbar.

VARIANTE 1: Die Matrix A ist von der Form

$$A = \mathbb{I} + N$$

mit $N = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Da die Matrizen \mathbb{I} und N miteinander kommutieren, lässt sich das Matrixexponential von A berechnen über

$$e^{tA} = e^{t(\mathbb{I}+N)} = e^{t\mathbb{I}}e^{tN} = e^t \mathbb{I} e^{tN} = e^t e^{tN}.$$

Nun gilt

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

und damit auch $N^k = 0$ für $k \geq 2$. Wir erhalten also

$$e^{tN} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} N^k = \sum_{k=0}^1 \frac{t^k}{k!} N^k = \mathbb{I} + tN.$$

Es folgt

$$e^{tA} = e^t e^{tN} = e^t (\mathbb{I} + tN) = \begin{pmatrix} e^t & 2te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}.$$

VARIANTE 2: Durch explizites Ausmultiplizieren kommt man schnell zu der Vermutung, dass

$$A^k = \begin{pmatrix} 1 & 2k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\star)$$

für alle $k \geq 1$. Dies lässt sich per Induktion schnell nachweisen: für $k = 1$ ist dies gerade die Definition von A ; gilt die Gleichung (\star) für ein $k \in \mathbb{N}$, so folgt

$$A^{k+1} = A^k A = \begin{pmatrix} 1 & 2k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2k+2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2(k+1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

die Gleichung gilt also auch für $k + 1$, per Induktion damit für alle $k \in \mathbb{N}$.

Aus der Definition des Matrixexponentials folgt dann

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \begin{pmatrix} 1 & 2k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} & 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} k \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 2te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix},$$

wobei im letzten Schritt verwendet wurde, dass

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{(k-1)!} = t \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} = t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} = te^t.$$

(b) Die Lösung des inhomogenen Anfangswertproblems

$$\dot{x}(t) = Bx(t) + v, \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^d$$

ist allgemein gegeben durch

$$x(t) = e^{tB} x_0 + \int_0^t e^{(t-s)B} v \, ds.$$

Da v ein Eigenvektor von B zum Eigenwert $\lambda \neq 0$ ist, gilt

$$e^{tB} v = e^{\lambda t} v \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Wegen $x_0 = 0$ folgt also

$$x(t) = e^{tB} x_0 + \int_0^t e^{(t-s)B} v \, ds = \int_0^t e^{(t-s)\lambda} v \, ds = \int_0^t e^{-s\lambda} \, ds e^{\lambda t} v = \frac{1}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t}) e^{\lambda t} v = \frac{e^{\lambda t} - 1}{\lambda} v.$$

Teil 2 [10 + 5 Punkte]

Von den folgenden Aufgaben sollen zwei ausgewählt und bearbeitet werden. Die dritte Aufgabe kann als Zusatzaufgabe bearbeitet werden.

5. Eigenschaften der Fouriertransformation**[5 Punkte]**

(a) Sei $f \in C^m(\mathbb{R})$, $m \in \mathbb{N}$, und $f^{(j)} \in L^1(\mathbb{R})$ für alle $0 \leq j \leq m$. Zeigen Sie, dass

$$|\widehat{f}(k)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\|f^{(m)}\|_1}{|k|^m}$$

für alle $k \neq 0$.

(b) Seien $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Begründen Sie, dass die Fouriertransformierte von $f * g$ wohldefiniert ist und zeigen Sie, dass

$$\widehat{f * g}(k) = (2\pi)^{\frac{d}{2}} \widehat{f}(k) \widehat{g}(k) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{R}^d.$$

LÖSUNG:

(a) Mit dem Satz über die Algebraisierung der Ableitung erhalten wir

$$\widehat{f^{(m)}}(k) = (ik)^m \widehat{f}(k)$$

für alle $k \in \mathbb{R}$. Daraus folgt direkt für alle $k \neq 0$

$$|\widehat{f}(k)| = \left| \frac{\widehat{f^{(m)}}(k)}{|k|^m} \right| = \left| \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f^{(m)}(x) e^{-ikx} dx}{|k|^m} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\int_{\mathbb{R}} |f^{(m)}(x)| dx}{|k|^m} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\|f^{(m)}\|_1}{|k|^m}.$$

(b) Die Faltung $f * g$ zweier L^1 -Funktionen $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ liegt wieder in $L^1(\mathbb{R}^d)$, damit ist die Fouriertransformierte von $f * g$ wohldefiniert.

Mit dem Satz von Fubini, der anwendbar ist da

$$\left| f(x-y)g(y) e^{-ik \cdot x} \right| \leq |f(x-y)| |g(y)| \in L^1(\mathbb{R}_x^d \times \mathbb{R}_y^d),$$

folgt dann

$$\begin{aligned} \widehat{f * g}(k) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} (f * g)(x) e^{-ik \cdot x} dx = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y) dy \right) e^{-ik \cdot x} dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y) e^{-ik \cdot x} dx dy = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) e^{-ik \cdot x} dx \right) g(y) dy \end{aligned}$$

Substituiert man nun $z = x - y$ im inneren Integral, so erhält man mit Fubini, dass

$$\begin{aligned} \widehat{f * g}(k) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(z) e^{-ik \cdot (z+y)} dz \right) g(y) dy = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(z) e^{-ik \cdot z} g(y) e^{-ik \cdot y} dz dy \\ &= (2\pi)^{\frac{d}{2}} \left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} f(z) e^{-ik \cdot z} dz \right) \left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} g(y) e^{-ik \cdot y} dy \right) \\ &= (2\pi)^{\frac{d}{2}} \widehat{f}(k) \widehat{g}(k). \end{aligned}$$

6. Satz von Liouville**[5 Punkte]**

Sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und beschränkt. Zeigen Sie, dass f konstant sein muss.

HINWEIS: Abschätzung an die Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung von f .

LÖSUNG: Da f auf ganz \mathbb{C} holomorph ist, besitzt sie die auf ganz \mathbb{C} konvergente Darstellung als Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

mit Koeffizienten

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz$$

für jedes $r > 0$. Da f beschränkt ist, folgt mit der Standardabschätzung für komplexe Wegintegrale, dass

$$|c_n| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{1}{r^{n+1}} \sup_{z \in \mathbb{C}} |f(z)| \cdot (2\pi r) = \frac{1}{r^n} \sup_{z \in \mathbb{C}} |f(z)| \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$$

für $n \geq 1$. Für $n = 0$ erhält man keine Einschränkung. Damit muss $f(z) = c_0$ gelten, d.h. f konstant.

7. Cauchy'scher Hauptwert

[5 Punkte]

(a) Sei $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ eine Schwartz-Funktion. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R} \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \int_0^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx.$$

(b) Zeigen Sie, dass die Abbildung $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$,

$$(T, \varphi) := \int_0^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx$$

eine temperierte Distribution definiert (Stetigkeit braucht nicht gezeigt zu werden).

(c) Zeigen Sie, dass $x \cdot T = 1$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, wobei die Distribution $x \cdot T$ definiert ist über

$$(x \cdot T, \varphi) := (T, x\varphi) \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

LÖSUNG:

(a) Es ist

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R} \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]} \frac{\varphi(x)}{x} dx &= \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(-x)}{-x} dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \\ &= \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx \end{aligned}$$

Die Funktion $x \mapsto \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x}$ ist wegen $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ integrierbar auf (ε, ∞) für jedes $\varepsilon > 0$ und beschränkt in jeder Umgebung von $x = 0$, denn

$$\left| \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} \right| \leq \left| \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} \right| + \left| \frac{\varphi(0) - \varphi(-x)}{x} \right| \leq 2 \sup_{\xi \in [0,1]} |\varphi'(\xi)| < \infty.$$

Damit existiert der Limes

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx = \int_0^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx$$

und liefert die Behauptung.

(b) Nach Teilaufgabe (a) ist (T, φ) für $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ wohldefiniert. Da Stetigkeit nicht gezeigt werden soll, genügt es T auf Linearität zu überprüfen. Seien dazu $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ und $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} (T, \varphi + \lambda\psi) &= \int_0^{\infty} \frac{\varphi(x) + \lambda\psi(x) - (\varphi(-x) + \lambda\psi(-x))}{x} dx \\ &= \int_0^{\infty} \left(\frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} + \lambda \frac{\psi(x) - \psi(-x)}{x} \right) dx \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx + \lambda \int_0^{\infty} \frac{\psi(x) - \psi(-x)}{x} dx \\ &= (T, \varphi) + \lambda(T, \psi), \end{aligned}$$

wobei die Linearität des Integrals verwendet wurde. Man beachte, dass man beim Zerlegen die Terme $\varphi(x) - \varphi(-x)$ sowie $\psi(x) - \psi(-x)$ zusammen lassen muss, da ansonsten die resultierenden Integrale nicht konvergieren würden.

Alternativ kann man über Teilaufgabe (a) argumentieren: da für jedes $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ der Limes existiert, gilt

$$\begin{aligned} (T, \varphi + \lambda\psi) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R} \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]} \frac{\varphi(x) + \lambda\psi(x)}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\mathbb{R} \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \lambda \int_{\mathbb{R} \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]} \frac{\psi(x)}{x} dx \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R} \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \lambda \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R} \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]} \frac{\psi(x)}{x} dx = (T, \varphi) + \lambda(T, \psi). \end{aligned}$$

(c) Sei $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned} (x \cdot T, \varphi) &= (T, x\varphi) = \int_0^\infty \frac{x\varphi(x) - (-x)\varphi(-x)}{x} dx = \int_0^\infty (\varphi(x) + \varphi(-x)) dx \\ &= \int_0^\infty \varphi(x) dx + \int_0^\infty \varphi(-x) dx = \int_0^\infty \varphi(x) dx + \int_{-\infty}^0 \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx \\ &= (1, \varphi), \end{aligned}$$

und somit $x \cdot T = 1$ im Sinne von temperierten Distributionen.