

Partielle Differentialgleichungen I
 Blatt 9

Aufgabe 1

^a Sei u eine glatte Lösung der Wärmeleitungsgleichung in $C_1(0, 1)$ d.h.

$$u_t - \Delta u = 0 \text{ in } C_1(0, 1).$$

Zeigen Sie, dass eine nur von der Dimension abhängige Konstante $C > 0$ gibt mit

$$\sup_{C_{\frac{1}{2}}(0,1)} |Du| \leq C \sup_{C_1(0,1)} |u|. \quad (1)$$

Gehen Sie dazu wie folgt vor. Sei φ eine glatte Funktion mit $\varphi \equiv 1$ in $C_{\frac{1}{2}}(0, 1)$ und $\varphi(x, t) = 0$ falls $(x, t) \notin C_1(0, 1)$, $t < 1$ und betrachten Sie für $\mu > 0$ die Funktion

$$w(x, t) := \varphi(x, t)^2 |Du|^2(x, t) + \mu |u|^2$$

Zeigen Sie, dass w für genügend großes μ eine Sub-Lösung ist, d.h.

$$w_t - \Delta w \leq 0 \text{ in } C_1(0, 1)$$

und benutzen Sie dann das Maximumsprinzip um (1) zu folgern. *Hinweis: Die Ungleichung $ab \leq \frac{a^2}{4} + b^2$ für $a, b \geq 0$ könnte hilfreich sein.*

Aufgabe 2

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und sei $u \in L^1(U_T)$ eine distributionelle Lösung der Wärmeleitungsgleichung d.h.

$$(\partial_t - \Delta)u = 0 \in \mathcal{D}'(U_T) \Leftrightarrow - \int_{U_T} (\varphi_t + \Delta \varphi) u \, dx \, dt = 0 \, \forall \varphi \in C_c^\infty(U_T). \quad (2)$$

Zeigen Sie, dass u selbst eine glatte Funktion ist. Gehen Sie dazu z.B. wie folgt vor: Sei $\rho_\epsilon(x, t) := \epsilon^{-n-1} \rho_0(\frac{x}{\epsilon}, \frac{t}{\epsilon})$ ein Glättungskern in $\mathbb{R}^{n+1}$.

1. Zeigen Sie, dass $u^\epsilon(x, t) := (\rho_\epsilon * u)(x, t)$ für $\epsilon > 0$ genügend klein auf $V \Subset U$ wohl-definiert ist.
2. Löst u^ϵ eine PDG?
3. Zeigen Sie, dass $\epsilon \mapsto u^\epsilon$ für jedes $V \Subset U$ und alle $k, l \in \mathbb{N}$ eine Cauchyfolge in $C_k^l(V)$ ist.
Hinweis: Nutzen Sie die lokalen Regularitätsabschätzungen.
4. Schließen Sie die Behauptung.

Aufgabe 3

Sei $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ der eindimensionale Torus und $T > 0$. Wie üblich setzen wir $\mathbb{T}_T := \mathbb{T} \times (0, T]$ und definieren für $k, l \in \mathbb{N}$ den Raum

$$C_l^k(\mathbb{T}_T) := \{v \in C_l^k(\mathbb{R} \times (0, T]) : \partial_t^i \partial_x^j v(x+1, t) = \partial_t^i \partial_x^j v(x, t) \, \forall x \in \mathbb{R}, t \in (0, T], 0 \leq i \leq l, 0 \leq j \leq k\}.$$

Sei $F : (0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, sodass $z \mapsto F(t, z)$ für jedes t lokal Lipschitz stetig ist mit einer von t unabhängigen Lipschitzkonstante. Seien nun $u, v \in C_1^2(\mathbb{T}_T) \cap C(\overline{\mathbb{T}_T})$ mit

$$u_t - \Delta u \leq F(t, u), \quad v_t - \Delta v \geq F(t, v) \text{ in } \mathbb{T}_T.$$

Zeigen Sie, dass

$$u \leq v \text{ auf } \mathbb{T} \times \{0\} \Rightarrow u \leq v \text{ in } \mathbb{T}_T.$$

^aDiese Aufgabe gibt einen alternativen Beweis zu den lokalen Abschätzungen für die Wärmeleitungsgleichung.

Aufgabe 4* (Maximumprinzip in Geometrischer Analysis/ Ricci Fluss)

Sei M eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit. Eine C^1 Familie $t \mapsto g(t)$ von glatten Metriken auf M ist eine Lösung des Ricci Flusses, falls

$$\partial_t g(t) = -2 \operatorname{Ric}(t) \text{ auf } M.$$

Diese Gleichung impliziert für die Skalarkrümmung $R(t)$

$$\partial_t R(t) = \Delta_{g(t)} R(t) + 2|\operatorname{Ric}(t)|^2 \geq \Delta_{g(t)} R(t) + \frac{2}{n} R^2(t).$$

Dies wiederum gibt uns folgende Abschätzung: $R(t) \geq \frac{R_{\min}}{1 - \frac{2}{n} R_{\min} t}$ wobei $R_{\min} = \min_M R(0)$.

Motiviert von diesem Zusammenhang betrachten Sie $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ und eine Lösung $u \in C_1^2(\mathbb{T}_T) \cap C(\overline{\mathbb{T}_T})$ von

$$\begin{cases} \partial_t u \geq \Delta u + \frac{2}{n} u^2 & \text{in } \mathbb{T}_T \\ u = g & \text{auf } \mathbb{T} \times \{0\}. \end{cases} \quad (3)$$

1. Zeigen Sie, dass für alle $(x, t) \in \mathbb{T}_T$

$$u(x, t) \geq \frac{g_{\min}}{1 - \frac{2}{n} g_{\min} t},$$

wobei $g_{\min} = \min_{\mathbb{T} \times \{0\}} g$.

Hinweis: Vergleichen Sie $u(x, t)$ mit einer Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung in t und benützen Sie Aufgabe 3.

2. Kann die Lösung von (3) für alle Zeiten existieren, falls $g_{\min} > 0$?