

Leipzig, den 13.11.2019

- 1.) Es seien  $(\Delta, \leq)$  und  $(\Delta', \leq)$  Simpliziale Komplexe. Beweisen Sie, dass auch  $\Delta \times \Delta'$  zusammen mit der *Produktordnung*, gegeben durch

$$(x, x') \leq (y, y') \Leftrightarrow x \leq y \text{ und } x' \leq y'$$

ein Simplizialer Komplex ist – genannt das *Produkt* von  $\Delta$  und  $\Delta'$ .  
Berechnen Sie  $r((x, x'))$  für  $(x, x') \in \Delta \times \Delta'$  sowie  $r(\Delta \times \Delta')$ .

- 2.) Skizzieren Sie graphisch alle Simplizialen Komplexe  $(\Delta, \leq)$  mit  $\#(\Delta) = 8$ . Welche dieser Simplizialen Komplexe sind isomorph zu  $\Delta_1 \times \Delta_2$  für geeignete Simpliziale Komplexe  $(\Delta_1, \leq)$ ,  $(\Delta_2, \leq)$  mit  $\#(\Delta_1) = 2$  und  $\#(\Delta_2) = 4$  ?

- 3.) Es sei  $K$  ein beliebiger kommutativer Körper, und es seien  $k, n \in \mathbb{N}$  mit  $1 \leq k \leq n$ . Dann heißen  $k + 1$  paarweise verschiedene Vektoren  $v_0, v_1, \dots, v_k \in K^n$  **affin unabhängig**, falls kein affiner Unterraum  $W$  von  $K^n$  existiert mit  $\dim(W) = k - 1$  und  $\{v_0, \dots, v_k\} \subseteq W$ .

Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(I) Die Vektoren  $v_0, \dots, v_k$  sind affin unabhängig.

(II) Die Vektoren  $v_1 - v_0, \dots, v_k - v_0$  sind linear unabhängig.

(III) Sind  $s_0, \dots, s_k \in K$  mit  $\sum_{i=0}^k s_i \cdot v_i = 0$  und  $\sum_{i=0}^k s_i = 0$ , so ist  $s_i = 0$  für  $0 \leq i \leq k$ .

(IV) Sind  $s_0, \dots, s_k, t_0, \dots, t_k \in K$  mit  $\sum_{i=0}^k s_i \cdot v_i = \sum_{i=0}^k t_i \cdot v_i$  und  $\sum_{i=0}^k s_i = \sum_{i=0}^k t_i$ , so ist  $s_i = t_i$  für  $0 \leq i \leq k$ .

- 4.) Für eine Teilmenge  $A$  von  $\mathbb{R}^n$  ist die *konvexe Hülle*  $\text{conv}(A)$  definitionsgemäß der Durchschnitt aller konvexer Mengen  $K$  mit  $A \subseteq K \subseteq \mathbb{R}^n$ .

Beweisen Sie:

$$\text{conv}(A) = \left\{ \sum_{i=0}^k r_i \cdot v_i \mid k \geq 0, v_i \in A \text{ und } r_i \geq 0 \text{ für } 0 \leq i \leq k, \sum_{i=0}^k r_i = 1 \right\}.$$