

6. Übungsblatt zu “Mathematik I für Wirtschaftswissenschaftler”

Leipzig, den 21.11.2019

21.) Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine unendliche Reihe. Beweisen Sie:

i) Es gebe ein $\alpha \in \mathbb{R}$, ein $\rho \in \mathbb{R}$ mit $0 < \rho < 1$ sowie ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > N$ gilt:

$$|a_n| \leq \alpha \cdot \rho^n.$$

Dann ist die gegebene Reihe absolut konvergent.

ii) Es gebe ein $\epsilon > 0$, so dass für alle bis auf endlich viele $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq 1 - \epsilon.$$

Dann ist die gegebene Reihe absolut konvergent. Siehe dazu auch Satz 2.15.

iii) Es gebe ein $\epsilon > 0$, so dass für alle bis auf endlich viele $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq 1 - \epsilon.$$

Dann ist die gegebene Reihe absolut konvergent. Siehe auch Satz 2.14.

Hinweise: Benutzen Sie in i) das Majorantenkriterium in Satz 2.12.

In ii) und iii) kann man $0 < \epsilon < 1$ annehmen und die Behauptung dann für $\rho = 1 - \epsilon$ auf i) zurückführen.

22.) Entscheiden Sie – mit Begründung, welche der folgenden unendlichen Reihen konvergieren:

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 3n - 4}{n^3 + 2n^2 + 6},$

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{n^3 - 3n - 7},$

iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}.$

23.) Die *Fibonacci-Folge* $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch:

$$f_0 := 0, f_1 := 1, f_n := f_{n-2} + f_{n-1} \text{ für } n \geq 2.$$

Beweisen Sie:

i) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $0 \leq f_n \leq 2^n.$

ii) Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ konvergiert die unendliche Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n \cdot x^n.$

Hinweis zu ii): Benutzen Sie i) – und Aufgabe 21i).

24.) Es seien r, s, t positive reelle Zahlen sowie $m, n, m', n' \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie mittels Definition 2.8 bzw. Definition 2.9:

i) $r^{\frac{m}{n}} = (r^m)^{\frac{1}{n}}.$

ii) $r^{\frac{m}{n}} \cdot r^{\frac{m'}{n'}} = r^{\frac{m}{n} + \frac{m'}{n'}}.$

iii) $r^s \cdot t^s = (r \cdot t)^s.$

In iii) kann dabei die Gültigkeit der Regel für $s \in \mathbb{Q}$ als bekannt vorausgesetzt werden.