

12. Übungsblatt zu “Mathematik I für Wirtschaftswissenschaftler”

Leipzig, den 17.1.2020

45.) Aus einem Material soll ein Zylinder mit der Oberfläche  $225 \text{ cm}^2$  so konstruiert werden, dass sein Volumen so groß wie möglich ist. Bestimmen Sie den Radius, die Höhe und das Volumen dieses Zylinders.

46.) Es seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$ , und  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  seien – beliebige – reelle Funktionen. Verifizieren Sie, dass für alle  $x \in [a, b]$  gilt:

$$\max(f(x), g(x)) = \frac{1}{2} \cdot (f(x) + g(x) + |g(x) - f(x)|);$$

$$\min(f(x), g(x)) = \frac{1}{2} \cdot (f(x) + g(x) - |g(x) - f(x)|).$$

Insbesondere folgt: Sind  $f$  und  $g$  stetig, so sind auch die Funktionen  $\max(f, g)$  und  $\min(f, g)$  stetig. Siehe hierzu auch Korollar 5.4.

*Hinweis:*

Untersuchen Sie für fixiertes  $x \in [a, b]$  getrennt die Fälle  $f(x) \leq g(x)$  und  $f(x) > g(x)$ .

47.) Beweisen Sie Satz 5.4:

Es sei  $f_k : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Folge von Regelfunktionen auf einem Intervall  $[a, b]$ , und  $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sei eine Funktion mit

$$|h(x) - f_k(x)| \leq \frac{1}{k} \text{ für alle } k \in \mathbb{N} \text{ und alle } x \in [a, b].$$

Dann ist auch  $h$  eine Regelfunktion.

48.) Definiere  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $f(x) := x^2$ . Definiere ferner für  $k \in \mathbb{N}$  die Treppenfunktion  $t_k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$t_k(0) := 0; \quad t_k(x) := \left(\frac{a}{k}\right)^2, \text{ falls } 0 < x \leq 1 \text{ und } a \in \{1, \dots, k\} \text{ ist mit } \frac{a-1}{k} < x \leq \frac{a}{k}.$$

Berechnen Sie  $\int_0^1 t_k(x) dx$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ ; dazu sollte Aufgabe 8i) benutzt werden.

Verifizieren Sie weiter:  $|f(x) - t_k(x)| \leq \frac{2}{k}$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ , und berechnen Sie schließlich  $\int_0^1 f(x) dx$  durch Grenzübergang. – Zu der letzten Berechnung sollen also noch nicht die üblichen Integrationsregeln verwendet werden; es bietet sich aber natürlich eine entsprechende Probe an.