Mathematisches Institut der Universität Leipzig
Dr. Tobias Ried

Wintersemester 2019/2020
16. Januar 2020

Probeklausur zur Vorlesung
Mathematik für Physiker 3

Name: ____________________

Vorname: ____________________

Matrikelnummer: ____________________

Zusätzlich abgegebene Lösungsblätter: ☐ Nein ☐ Ja (Anzahl ______)

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Σ
Gesamtpunkte	4	4	4	4	5	5	5	26 (+5)
Erzielte Punkte								

____
Note

Hinweise:

1. Diese Klausur besteht aus **7 Aufgaben** auf **15 nummerierten Seiten** (inklusive Deckblatt).
2. Überprüfen Sie die Angabe auf Vollständigkeit.
3. Die Klausur hat **2 Teile**: im ersten Teil (Aufgaben 1–4) sind alle Aufgaben zu bearbeiten, im zweiten Teil (Aufgaben 5–7) sollen zwei von drei Aufgaben ausgewählt und bearbeitet werden, die dritte Aufgabe kann als Zusatzaufgabe für Bonuspunkte bearbeitet werden.
4. Bitte verwenden Sie zur Bearbeitung der Aufgaben den dafür vorgesehenen Platz. Sollten Sie zusätzliches Papier benötigen, wenden Sie sich an die Aufsicht. Die Verwendung von mitgebrachtem Papier ist nicht zulässig.
5. Beschriften Sie jede Seite mit **Namen und Matrikelnummer**.
6. Das einzige zugelassene Hilfsmittel ist ein **handgeschriebenes DIN A4 Blatt** als Gedächtnisstütze. Außer diesem Blatt sind keine weiteren Hilfsmittel (z.B. Taschenrechner) erlaubt.
7. Die Bearbeitungszeit beträgt **120 Minuten**.

Viel Erfolg!

Teil 1 [16 Punkte]

Aus diesem Teil sind alle Aufgaben zu bearbeiten.

1. **Fluss durch eine Oberfläche** **[4 Punkte]**

Sei $S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = (2-z)^2, 0 \le z \le 2\}$ die Mantelfläche des Kegels K mit kreisförmigem Querschnitt, dessen Kegelspitze bei $(0, 0, 2)$ liegt. S sei so orientiert, dass die Normalenvektoren nach außen zeigen. Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} xy^2 \\ x^2y \\ (1-z)(x^2+y^2) \end{pmatrix}$$

durch S.

2. **Residuenkalkül** **[4 Punkte]**

Seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \mathbb{C}$ paarweise verschieden und

$$f(x) = \prod_{k=1}^{N} (z - \alpha_k)^{-1}.$$

(a) Klassifizieren Sie sämtliche isolierten Singularitäten von f.

(b) Bestimmen Sie das Residuum von f bei $z = \alpha_1$.

(c) Geben Sie den Hauptteil der Laurent-Reihe von f um $z = \alpha_1$ an.

(d) Bestimmen Sie den Konvergenzradius des Nebenteils der Laurentreihe von f um $z = \alpha_1$.

3. **Fouriertransformation** **[4 Punkte]**

Bestimmen Sie die Fouriertransformierte von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{e}^{-|x|}$, und berechnen Sie damit den Wert des Integrals

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{1+x^2} \right)^2 \, \mathrm{d}x.$$

4. **Differentialgleichungssystem** **[4 Punkte]**

Gegeben ist das Differentialgleichungssystem

$$\dot{x}_1(t) = x_1(t) - x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = -x_1(t) + x_2(t).$$

(a) Schreiben Sie das System in der Form $\dot{x}(t) = Ax(t)$ mit einer 2×2-Matrix A und der vektorwertigen Funktion $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$, und bestimmen Sie das Matrixexponential e^{tA}.

(b) Bestimmen Sie die Lösung x(t) des Anfangswertproblems

$$\dot{x} = Ax + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Teil 2 [10 + 5 Punkte]

Von den folgenden Aufgaben sollen zwei ausgewählt und bearbeitet werden. Die dritte Aufgabe kann als Zusatzaufgabe bearbeitet werden.

5. **Schwartz-Funktionen und temperierte Distributionen** **[5 Punkte]**

(a) Sei $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ eine Schwartz-Funktion. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]} \frac{\varphi(x)}{x} \, \mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} \, \mathrm{d}x.$$

(b) Begründen Sie kurz, dass durch die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = x$, über

$$(f, \varphi) := \int_{\mathbb{R}} x\varphi(x) \, \mathrm{d}x, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),$$

eine temperierte Distribution definiert wird und zeigen Sie, dass die distributionelle Fouriertransformierte von f gegeben ist durch $\widehat{f} = \mathrm{i}\sqrt{2\pi}\delta'$, wobei δ' die distributionelle Ableitung der Dirac δ-Distribution bezeichnet.

6. **Langsam wachsende ganze Funktionen** **[5 Punkte]**

Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ganz mit $f(z) = O(|z|^k)$ für $|z| \to \infty$, $k \in \mathbb{N}_0$ (d.h. es existieren $C, R > 0$ so, dass $|f(z)| \leq C|z|^k$ für alle $|z| \geq R$). Zeigen Sie, dass f ein Polynom vom Grad höchstens k ist.

HINWEIS: Abschätzung an die Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung von f.

7. Satz von Picard–Lindelöf **[5 Punkte]**

Gegeben sei die rekursiv definierte Folge von Funktionen

$$\begin{aligned} x_0(t) &:= 1, \\ x_n(t) &:= 1 + \int_0^t x_{n-1}(s)^2 \, \mathrm{d}s, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass x_n gleichmäßig für $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ gegen eine Funktion $x : [-\varepsilon, \varepsilon] \to \mathbb{R}$ konvergiert und bestimmen Sie diese.