

l'Hospitalsche Regel

Seien $a < b$ reell und die Funktionen $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Unter Benutzung der Notation $\lim_{x \rightarrow a_+} \equiv \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}}$ nehmen wir an, dass

$$\ell_f = \lim_{x \rightarrow a_+} f(x) \text{ und } \ell_g = \lim_{x \rightarrow a_+} g(x) \text{ existieren, wobei } (\ell_f, \ell_g) \in \{(0, 0), (\pm\infty, \pm\infty)\}.$$

Dann impliziert $\lim_{x \rightarrow a_+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in [-\infty, \infty]$ auch $\lim_{x \rightarrow a_+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$. (Und $\exists \varepsilon > 0 : a < x < a + \varepsilon \Rightarrow g(x) \neq 0$.)

Beweis: Der ("Haupt")Fall $\ell_f = \ell_g = 0$ wurde in der Vorlesung vollständig bewiesen, die 4 anderen Fälle benutzen die gleiche Idee, den unten in ii) nochmals hergeleiteten Fakt aber auch mehr Schreiarbeit als in der VL möglich war. Die dort ausgelassenen Details deshalb hier nun recht ausführlich.

Wir betrachten also die verbleibenden Situationen, wenn ℓ_f und ℓ_g unendlich sind, und machen zunächst folgende Beobachtungen.

- i) Da $\lim_{x \rightarrow a_+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in [-\infty, \infty]$ existiert, gibt es ein $\eta \in (0, b - a)$, so dass $\lim_{x \rightarrow a_+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ für jedes $x \in (a, a + \eta)$ definiert und also $g'(x)$ ungleich Null ist. Da $\lim_{a_+} |g| = +\infty$ können wir annehmen, dass η auch so klein gewählt wurde, dass $|g(x)| > 1$, d.h. $g(x) \neq 0$ und analog $f(x) \neq 0$ in jedem $x \in (a, a + \eta)$ gilt.
- ii) Sei nun $c \in (a, a + \eta)$ beliebig aber fixiert. Dann gibt es aus den selben Gründen wie zuvor ein $d \in (a, c)$, so dass für jedes $x \in (a, d)$ die Ungleichungen $|f(x)| > |f(c)|$ und $|g(x)| > |g(c)|$ gelten. Also

$$\lim_{x \rightarrow a_+} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) : \left(\frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} \right) = \lim_{x \rightarrow a_+} \frac{f(x)}{f(x) - f(c)} \frac{g(x) - g(c)}{g(x)} = 1 \cdot 1 = 1,$$

da $\lim_{a_+} |f| = \lim_{a_+} |g| = \infty$. Insbesondere,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists d = d(\varepsilon, c) \in (a, c) \forall x \in (a, d) : \left| \frac{f(x)}{g(x)} : \frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} - 1 \right| < \varepsilon. \quad (*)$$

Nach diesen (einfachen, aber nützlichen) Vorbereitungen unterscheiden wir zwei Fälle.

Zuerst sei $\ell \in \mathbb{R}$. Für ein beliebig gegebenes $\varepsilon \in (0, 1)$ wählen wir zunächst mittels i) ein $c \in (a, a + \eta)$, so dass

$$\forall x \in (a, c) : \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - \ell \right| < \frac{\varepsilon}{2} < 1$$

und dann gemäß (*) das $d = d(\frac{\varepsilon}{2(|\ell|+1)}, c) \in (a, c)$. Somit gilt für alle $x \in (a, d)$, dass wegen des verallgemeinerten MWS ein $\xi_x \in (x, c) \subset (a, c)$ existiert mit

$$\frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} \in \left(\ell - \frac{\varepsilon}{2}, \ell + \frac{\varepsilon}{2} \right), \text{ und also } \left| \frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} \right| \leq |\ell| + \frac{\varepsilon}{2} < |\ell| + 1.$$

$$\Rightarrow \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} \right| = \left| \frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} \right| \cdot \left| \frac{f(x)}{g(x)} : \frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} - 1 \right| \leq (|\ell| + 1) \frac{\varepsilon}{2(|\ell| + 1)} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{also gilt } \forall x \in (a, d) : \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \ell \right| \leq \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} \right| + \left| \frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} - \ell \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig klein sein kann, folgt $\lim_{a_+} f/g = \ell$.

Zum Schluß betrachten wir nur noch den Fall $\ell = +\infty$, da $\ell = -\infty$ analog behandelt werden kann. Für beliebiges positives $T \in \mathbb{R}$ wählen wir ein $c \in (a, a + \eta)$, so dass

$$\forall x \in (a, c) : \frac{f'(x)}{g'(x)} > 2T,$$

und dann gemäß (*) das $d = d(\frac{1}{3}, c) \in (a, c)$. Somit gilt für alle $x \in (a, d)$, dass wegen des verallgemeinerten MWS ein $\xi_x \in (x, c) \subset (a, c)$ existiert mit

$$\frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} > 2T > 0.$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} \cdot \left(\frac{f(x)}{g(x)} : \frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} \right) \geq 2T \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 2T \frac{2}{3} > T.$$

Also haben wir wiederum, und wie behauptet, $\lim_{a+} f/g = \ell (= +\infty)$ gezeigt.