Abgabe des Blattes während der Übung am Freitag, den 17.01, oder im Fach von Victor Marx bis Freitag, den 17.01, 11 Uhr.

Sprechstunde bei Victor Marx (A328) jeden Freitag, 15:30 Uhr bis 17:00 Uhr.

Aufgabe 1: 18 Punkte

Seien $\mathbb{P}_0$ und $\mathbb{P}_1$ zwei verschiedenen Wahrscheinlichkeitmaßen auf $\mathbb{R}$, mit Dichten ρ_0 bzw. ρ_1 bezüglich des Lebesgue-Maßes auf $\mathbb{R}$. Wir verlangen, dass ρ_0 und ρ_1 beide strikt positiv auf ganz $\mathbb{R}$ sind und dass $\mathbb{E}_0[\log \frac{\rho_1}{\rho_0}]$ endlich ist.

Wir betrachten den Neyman-Pearson Test zum n-fachen Produktmodell

$$(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \mathbb{P}_\nu^{\otimes n} : \nu \in \{0,1\}).$$

Die Nullhypothese ist demnach $\Theta_0 = \{0\}$, die Alternativhypothese ist $\Theta_1 = \{1\}$. Den Neyman-Pearson Test zum Niveau $\alpha > 0$ schreiben wir in der Form:

$$\varphi_n(x) = \mathbb{1}_{\{R_n(x) \geqslant c_n\}},$$

wobei $x = (x_1, \dots, x_n)$ und $R_n(x) = \frac{\rho_1^{\otimes n}(x)}{\rho_0^{\otimes n}(x)}$ den Likelihood-Quotient ist. Sei auch $f = \log \frac{\rho_1}{\rho_0}$ und $\beta = \mathbb{E}_0[f(X_1)]$. Das Ziel dieser Aufgabe ist zu beweisen, dass

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log\left(1 - \mathbb{E}_1^{\otimes n}[\varphi_n]\right) = \beta. \tag{1}$$

Notation: $\mathbb{E}_1^{\otimes n}[\varphi_n] = \mathbb{E}_1^{\otimes n}[\varphi_n(X)] = \mathbb{E}_1^{\otimes n}[\varphi_n(X_1, \dots, X_n)]$.

i) Der Definition eines Neyman-Pearson Tests zum Niveau α nach, was kann man über $\mathbb{E}_0^{\otimes n}[\varphi_n]$ sagen? Welche wichtige Eigenschaft verfügt dieser Test? Wie soll $\mathbb{E}_1^{\otimes n}[\varphi_n]$ aussehen, wenn der Test 'gut' ist? Das Ziel dieser Aufgabe ist genau zu beweisen, dass der Test je 'besser' wird, wenn n groß wird, und dieses Verhalten durch den Parameter β zu quantifizieren.

ii) Zeigen Sie, dass $\frac{1}{n}\log R_n(X) = \frac{1}{n}\log R_n(X_1, \dots, X_n)$ unter $\mathbb{P}_0^{\otimes n}$ fast sicher gegen β strebt. *Hinweis: schreiben Sie $\frac{1}{n}\log R_n(X)$ in einer Form bezüglich der Funktion f um.* Daraus schließen, dass für alle $b > \beta$ und für alle $c < \beta$

$$\mathbb{P}_0^{\otimes n}\left[\frac{1}{n}\log R_n(X) \geqslant b\right] \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0\,; \tag{2}$$

$$\mathbb{P}_0^{\otimes n}\left[\frac{1}{n}\log R_n(X) \geqslant c\right] \geqslant \frac{1+\alpha}{2} \quad \text{für alle hinreichend großen } n. \tag{3}$$

iii) Zeigen Sie: wenn $1 - \varphi_n(x) > 0$, dann $\rho_1^{\otimes n}(x) < c_n \rho_0^{\otimes n}(x)$. Daraus schließen, dass

$$1 \geqslant \mathbb{E}_0^{\otimes n}[1 - \varphi_n] \geqslant \frac{1}{c_n}\mathbb{E}_1^{\otimes n}[1 - \varphi_n].$$

Daraus schließen, dass

$$\limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log\left(1 - \mathbb{E}_1^{\otimes n}[\varphi_n]\right) \leqslant \limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log c_n.$$

iv) Nehmen wir an, dass $l := \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log c_n > \beta$ ist. Zeigen Sie:

$$\alpha \leqslant \mathbb{P}_0^{\otimes n}\left[\frac{1}{n}\log R_n(X) \geqslant \frac{l+\beta}{2}\right].$$

Daraus ein Widerspruch schließen. Zeigen, dass

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log\left(1-\mathbb{E}_1^{\otimes n}[\varphi_n]\right) \leqslant \beta.$$

v) Sei $c < \beta$. Zeigen Sie:

$$\mathbb{E}_1^{\otimes n}[1-\varphi_n] = \mathbb{E}_0^{\otimes n}\left[(1-\varphi_n)\frac{\rho_1^{\otimes n}}{\rho_0^{\otimes n}}\right] \geqslant e^{nc}\, \mathbb{E}_0^{\otimes n}\left[(1-\varphi_n)\mathbb{1}_{\{R_n \geqslant e^{nc}\}}\right].$$

Aus (3) schließen, dass

$$\mathbb{E}_1^{\otimes n}[1-\varphi_n] \geqslant e^{nc}\,\frac{1-\alpha}{2}$$

für alle hinreichend großen n. Daraus schließen, dass

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log\left(1-\mathbb{E}_1^{\otimes n}[\varphi_n]\right) \geqslant \beta.$$

vi) Zeigen Sie (1).

Aufgabe 2: 4 Punkte

Unter denselben Voraussetzungen wie in Aufgabe 1 ist das Ziel dieser Aufgabe ist zu zeigen, dass $\beta < 0$ ist.

Sei $\psi : t \in (0,+\infty) \mapsto 1 - t + t\log t$. Zeigen Sie: $\beta = -\int_{\mathbb{R}} \psi\left(\frac{\rho_0}{\rho_1}\right)(x)\rho_1(x)\mathrm{d}x$. Daraus schließen, dass $\beta \leqslant 0$ und dann $\beta < 0$. Die Größe $-\beta$ heißt relative Entropie zwischen $\mathbb{P}_0$ und $\mathbb{P}_1$.

Aufgabe 3: 7 Punkte

Man möchte prüfen, ob eine Satellitenkomponente gut funktioniert. Man schickt ein Testsignal zum Satelliten und bekommt ein Antwortsignal von n Sekunden. Diese Antwort wird durch ein allgemeines Rauschen überlagert. Die auf der Erde in jeweils einer Sekunde ankommende mittlere Signalintensität kann daher als normalverteilt angesehen werden mit Erwartungswert entweder m_0 (die Komponente funktioniert nicht) oder m_1 (die Komponente funktioniert einwandfrei).

Sei $\mathbb{P}_0 = \nu_{m_0,v}$, $\mathbb{P}_1 = \nu_{m_1,v}$, $H_0 : m = m_0$, $H_1 : m = m_1$, wobei die Varianz v der Normalverteilungen bekannt ist.

i) Was ist der Fehler erster Art bzw. zweiter Art in diesem Beispiel? Kommentieren Sie.

ii) Wie in der Aufgabe 1 definieren wir R_n den Likelihood-Quotient des n-fachen Produktmodells. Bestimmen Sie $R_n(X)$ im Bezug auf n, m_0, m_1, v und $\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$.

iii) Beweisen Sie, dass der Neyman-Pearson Test $\varphi_n = \mathbb{1}_{\{R_n \geqslant c_n\}}$ zum Niveau α auch in der Form $\varphi_n = \mathbb{1}_{\{\overline{X}_n \geqslant b_n\}}$ umgeschrieben sein kann. Bestimmen Sie b_n.

iv) Die relative Entropie $-\beta$ in diesem Fall bestimmen.