

Grundlagen der Mathematik
Übungsaufgaben
Serie 10

Hinweis

Bitte vermerken Sie auf jedem Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Geben Sie ferner an, an welchem Wochentag und zu welcher Uhrzeit Ihre Übung stattfindet. Geben Sie Ihre Lösungen bis Mittwoch, 08.01.2020, 09:15 Uhr (als vor Beginn der Vorlesung) im Hörsaal 5 oder im Postfach von S. Hintze in der 5. Etage des Neuen Augusteums ab.

Aufgabe 1

Gegeben sei die Menge $M = \{0, 1, 2, 3\}$. Für beliebige $a, b \in M$ sei

$$a \boxplus b = k$$

wobei k der Rest ist, den $(a + b)$ bei der Division durch 4 lässt. Für beliebige $a, b \in M$ sei

$$a \boxdot b = l$$

wobei l der Rest ist, den $(a \cdot b)$ bei der Division durch 4 lässt.

- a) Stellen Sie die Verknüpfungstafeln für die Verknüpfungen \boxplus und \boxdot auf. Begründen Sie mit Hilfe dieser Tafeln, dass beide Verknüpfungen innere Verknüpfungen sind und dass beide Verknüpfungen kommutativ sind. (4P)
- b) Begründen Sie, dass (M, \boxplus, \boxdot) kein Körper ist. (1P)

Aufgabe 2

Die Menge

$$M = \{a + b \cdot \sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

ist mit den aus der Schule bekannten Operationen »Multiplikation« und »Addition« und den dazugehörigen Rechenregeln ein Körper. Es sei $k \in M$ mit

$$k = 2 - 3 \cdot \sqrt{5}.$$

- a) Geben Sie das inverse Element von k bezüglich der Addition an. (1P)
- b) Bestimmen Sie das inverse Element k^{-1} von k bezüglich der Multiplikation. Stellen Sie k^{-1} in der Form

$$k^{-1} = a + b \cdot \sqrt{5}$$

dar. (2P)

- c) Untersuchen Sie, ob $M = \mathbb{R}$ gilt, in dem Sie untersuchen, ob $\sqrt{2} \in M$ gilt. (2P)

bitte wenden

Aufgabe 3

In der folgenden Aufgabe wird die Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ mit

$$\varphi(n) = \begin{cases} \frac{n-1}{2} & \text{falls } n \text{ ungerade ist} \\ -\frac{n}{2} & \text{falls } n \text{ gerade ist} \end{cases}$$

betrachtet.

a) Geben Sie $\varphi(7)$ und $\varphi(21)$ an. (1P)

b) Geben Sie $n_1 \in \mathbb{N}$ an, so dass

$$\varphi(n_1) = -25$$

gilt. Geben Sie $n_2 \in \mathbb{N}$ an, so dass

$$\varphi(n_2) = 0$$

gilt. (1P)

c) Zeigen Sie, dass die Abbildung φ eine bijektive Abbildung ist. Führen Sie den Beweis mithilfe einer vollständigen Fallunterscheidung und folgen Sie dabei dem vorgegebenen Schema. Nutzen Sie Ihnen aus der Schule bekannte Rechenregeln. (7P)

(1) Zu zeigen: φ ist injektiv, d.h. $\forall m, n \in \mathbb{N} : (n \neq m) \rightarrow (\varphi(n) \neq \varphi(m))$.

Fallunterscheidung:

Fall 1: Sei n gerade. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte $n > m$.

Ist m gerade, dann gilt: ...

Ist m ungerade, dann gilt: ...

Fall 2: Sei n ungerade. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte $n > m$.

Ist m gerade, dann gilt: ...

Ist m ungerade, dann gilt: ...

(2) Zu zeigen: φ ist surjektiv, d.h. $\forall z \in \mathbb{Z} \exists n \in \mathbb{N} : \varphi(n) = z$.

Fallunterscheidung:

Fall 1: Ist $z \geq 0$, dann gilt: ...

Fall 2: Ist $z < 0$, dann gilt: ...

d) Da die Abbildung φ eine bijektive Abbildung ist, wird durch $\varphi(1), \varphi(2), \varphi(3), \dots$ eine Abzählung der Menge \mathbb{Z} vorgenommen. Stellen Sie diese Abzählung an der Zahlengerade bildlich dar und begründen Sie anschaulich, dass durch dieses Prinzip in der Tat alle ganzen Zahlen gezählt werden. (1P)