2. Übungsblatt zu "Mathematik I für Wirtschaftswissenschaftler"

Leipzig, den 24.10.2019

5.) Es seien A, B, C Teilmengen einer Menge M. Beweisen Sie:

i) $(M \setminus A) \cap (M \setminus B) = M \setminus (A \cup B)$,

ii) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$,

iii) $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$.

Anmerkung zu iii): Für zwei Mengen X, Y setzt man

$$X \Delta Y := (X \cup Y) \setminus (X \cap Y).$$

Stellen Sie (für $x \in M$) eine Wahrheitstafel für folgende Aussagen auf:
$x \in A$, $x \in B$, $x \in C$, $x \in (A \Delta B) \Delta C$, $x \in A \Delta (B \Delta C)$.

6.) Geben Sie – mit Begründung – zwei nichtleere Mengen A und B sowie eine Teilmenge T von $A \times B$ an, die sich *nicht* als Cartesisches Produkt $T = A' \times B'$ mit $A' \subseteq A$ und $B' \subseteq B$ schreiben läßt.

7.) Geben Sie – mit Begründung – *alle* Möglichkeiten an, eine Rechnung in Höhe von 43 Euro zu bezahlen, wobei aber kein Rückgeld herausgegeben werden soll und nur Zweieurostücke sowie Fünfeuroscheine zur Verfügung stehen. – Eine Möglichkeit wäre also etwa, 7 Fünfeuroscheine und 4 Zweieurostücke zu verwenden.

8.) Beweisen Sie folgende Aussagen durch vollständige Induktion:

i) Für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \;=\; 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 \;=\; \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}.$$

ii) Für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 \;=\; 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 \;=\; \left(\frac{n \cdot (n+1)}{2}\right)^2.$$

iii) Jede Menge M mit genau n Elementen besitzt genau 2^n Teilmengen.