# Übungsblatt 8

1) Bestimmen Sie

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}},$$

d.h. finden Sie (analog zur aber einfacher als in der Vorlesung) eine Folge endlicher Formeln, deren "Grenzwert" obige Formel ist, zeigen Sie, dass die Folge der dazugehörigen Werte konvergiert, und finden Sie deren Grenzwert. 5 Punkte

2) Im Folgenden finden Sie entweder einen Beweis oder ein Gegenbeispiel für die jeweilige Behauptung

a) Sei $(z_n)_{n=1}^\infty$ eine Folge, so dass die beiden Teilfolgen $(z_{2n})_{n=1}^\infty$,$(z_{2n-1})_{n=1}^\infty$ konvergieren. Dann ist auch $(z_n)_{n=1}^\infty$ konvergent. 1 Punkt

b) Sei $(w_n)_{n=1}^\infty$ eine Folge, so dass die drei Teilfolgen $(w_{2n})_{n=1}^\infty$,$(w_{2n-1})_{n=1}^\infty$ und $(w_{3n})_{n=1}^\infty$ konvergieren. Dann ist auch $(w_n)_{n=1}^\infty$ konvergent. 4 Punkte

c) Sei $(a_n)_{n=1}^\infty$ eine Folge, so dass jede Teilfolge der Form $(a_{kn})_{n=1}^\infty$, mit $k \in \mathbb{N}$ und $k > 1$, konvergiert. Dann muss auch $(a_n)_{n=1}^\infty$ konvergieren. 8* Punkte

3) a) Sei $(a_n)_{n=1}^\infty$ eine konvergente reelle Folge. Beweisen Sie, dass $\max_{n\in\mathbb{N}} a_n$ oder $\min_{n\in\mathbb{N}} a_n$ (oder beides) existiert. [*Ein Bild ist oftmals nützlich.*] 5 Punkte

b) Sei $(m_n)_{n=1}^\infty$ eine Folge ganzer Zahlen, die konvergent (in $\mathbb{C}$) ist. Beweisen Sie, dass $(m_n)_{n=1}^\infty$ "fast konstant" ist, d.h. $\exists N \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow m_N = m_n$.
2 Punkte

4) a) Untersuchen Sie durch Vergleich mit schon bekannten Reihen, oder unter Benutzung von Wurzel- oder Quotientenkriterium, die folgenden Reihen $\sum_n a_n$ auf Konvergenz.

$$(i)\ \ a_n = \frac{n^2+1}{2^n}, (ii)\ \ a_n = \frac{1}{3n-2}, (iii)\ \ a_n = \frac{n}{n^3+7n^2-5}, (iv)\ \ a_n = \frac{n!}{2^{n^2}}.$$

1+1+1+2 Punkte

b) *Das Verdichtungskriterium* Sei $a_n \geq a_{n+1} \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass

$$\forall n : 2^n a_{2^{n+1}} \leq \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} a_k \leq 2^n a_{2^n},$$

und leiten Sie daraus her: $\sum_n a_n$ konvergiert genau dann, wenn auch $\sum_n 2^n a_{2^n}$ konvergiert. 5 Punkte

c) Ist die Reihe $\sum_n \frac{1}{n\sqrt{n}}$ konvergent? 1 Punkt

---

**Abgabe:** am 12.12.2019, 17.10 Uhr Hörsaal 9

Die (Übungsschein-)Klausur findet am 6.2.2020 von 17-19 Uhr statt.