Jun.-Prof. Felix Pogorzelski
Dr. Martin Petersen

Vorlesung Funktionalanalysis I, Uni Leipzig, WS 2019/20

Serie 13

Aufgabe 37 (schriftlich).
Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Zeigen Sie, dass jede schwach konvergente Folge in X beschränkt ist.
Hinweis: Verwenden Sie das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit und die kanonische Isometrie $I_X : X \to X''$. Achtung: X ist nicht als vollständig vorausgesetzt!

Aufgabe 38 (schriftlich).
Es sei $(X, \|\cdot\|)$ ein reflexiver Banachraum und es sei $C \subseteq X$ nicht-leer, konvex und abgeschlossen. Zeigen Sie, dass es für alle $x \in X$ eine "beste Approximation" in C gibt, d.h. es gibt $y \in C$ mit

$$\|x - y\| = \inf_{z \in C} \|x - z\|.$$

Aufgabe 39 (schriftlich).
Es sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum und es sei $U \subseteq X$ ein abgeschlossener Untervektorraum. Es sei $S \in \mathcal{L}(U, \ell^\infty(\mathbb{N}))$, wobei $\ell^\infty(\mathbb{N}) = \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ mit $\|\cdot\|_\infty$ ausgestattet ist. Zeigen Sie, dass es ein $T \in \mathcal{L}(X, \ell^\infty(\mathbb{N}))$ gibt, so dass

$$T_{|U} = S, \quad \text{und} \quad \|T\|_{\text{op}} = \|S\|_{\text{op}}.$$

Bemerkung: Für allgemeine Banachräume $(Y, \|\cdot\|_Y)$ und $S \in \mathcal{L}(U, Y)$ gilt diese Hahn-Banach Version für Operatoren nicht.

Aufgabe 40 (mündlich).

(a) Es sei der Banachraum $X = \big(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty\big)$ gegeben und es sei (f_n) eine Folge in X. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen.
   (i) (f_n) konvergiert schwach gegen ein $f \in X$.
   (ii) (f_n) konvergiert punktweise gegen ein $f \in X$ und $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_\infty < \infty$.
   Hinweis: Für (i) $\Rightarrow$ (ii) beachten Sie auch das Ergebnis der Aufgabe 37.

(b) Wiederholen Sie sorgfältig den bisherigen Stoff der Vorlesung.

   Hier ein Lernvorschlag: Bereiten Sie zu den untenstehenden Themen jeweils einen genau 5 - minütigen Vortrag vor, den Sie Ihren Kommilitonen (oder Ihren Großeltern) auswendig (!!!) präsentieren können. Beachten Sie dabei,
   (a) alle verwendeten Begriffe sauber zu definieren,
   (b) die Voraussetzungen der Sätze genau zu benennen,
   (c) und jeweils aussagekräftige Beispiele bzw. Gegenbeispiele zu geben.
   Ein in der Übung sorgfältig vorgetragener, zeitlich abgestimmter, und inhaltlich korrekter Kurzvortrag an der Tafel wird als Vorrechnen anerkannt.

   Themen:

- Normierte Räume und ihre Eigenschaften (Vollständigkeit, Separabilität).
- Das Lemma von Riesz und eine Folgerung.
- Der Satz von Stone-Weierstraß.
- Der Raum $\mathcal{L}(X, Y)$ und seine Eigenschaften.
- Die von Neumann-Reihe.
- Funktionale und Dualräume.
- Der Darstellungssatz von Riesz.
- Kompakte Operatoren und der Raum $\mathcal{K}(X, Y)$.
- Der Kategoriensatz von Baire.
- Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit.
- Der Satz von Banach-Steinhaus.
- Der Satz von der offenen Abbildung.
- Der Satz von der stetigen Inversen.
- Der Satz vom abgeschlossenen Graphen.
- Der Satz von Hahn-Banach für normierte Räume.
- Eine Trennungsversion des Satzes von Hahn-Banach.
- Reflexive Banachräume.
- Schwache Konvergenz in normierten Räumen.

Dies ist eine Bonus-Serie. Abgabe der schriftlichen Aufgaben ist fakultativ am **Montag, den 27.1.2020**.

Die Klausur zur FA I findet am **10.02.2020, 10:00-12:00** im Felix-Klein-HS statt.