

Partielle Differentialgleichungen I
 Blatt 13

Aufgabe 1 (Equipartition der Energie)

Sei $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ eine Lösung des Anfangswertproblems für die ein dimensionalen Wellengleichung:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = g, u_t = h & \text{auf } (0, \infty) \times \{0\} \end{cases}$$

für $g \in C^1(\mathbb{R}), h \in C^2(\mathbb{R})$ beide mit kompaktem Träger.

Wir definieren die *kinetische Energie* $k(t) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} u_t^2(x, t) dx$ und die *potentielle Energie* $p(t) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} u_x^2(x, t) dx$. Zeigen Sie:

1. $t \mapsto k(t) + p(t)$ ist konstant;
2. $k(t) = p(t)$ für t genügend groß.

Aufgabe 2

Lösen Sie die beiden folgenden quasilinearen Gleichungen:

1. $x_1 u_{x_1} + x_2 u_{x_2} = 2u$ mit $u(x_1, 1) = g(x_1)$, wobei $g \in C^1(\mathbb{R})$ gegeben.
2. $u u_{x_1} + u_{x_2} = 1$ mit $u(x_1, x_1) = \frac{1}{2} x_1$.

Mit den folgenden Aufgaben setzen wir Aufgabe 3 des letzten Blattes fort, um eine Lösung für die Wellengleichung in ungeraden Dimensionen zu finden.

Aufgabe 3

Sei $f \in C^{k+1}(\mathbb{R}), k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass

$$(\partial_{rr}) \left(\frac{1}{r} \partial_r \right)^{k-1} (r^{2k-1} f(r)) = \left(\frac{1}{r} \partial_r \right)^k (r^{2k} \partial_r f(r)); \quad (1)$$

Zeigen Sie außerdem, dass für $2l \leq m, l \leq k$

$$\left(\frac{1}{r} \partial_r \right)^l (r^m f(r)) = \sum_{j=0}^l c_{m,l,j} r^{m+j-2l} (\partial_r)^j f(r)$$

gilt, wobei die Konstanten $c_{m,l,j}$ unabhängig von f sind und $c_{m,l,0} = m(m-2) \dots (m-2l)$.

Aufgabe 4

Sei $n = 2k + 1$ ungerade und u, U, G, H wie aus Blatt 12 Aufgabe 3 mit $u, g, h \in C^\infty(\mathbb{R})$.

1. Zeigen Sie, dass $V(r, t) := \left(\frac{1}{r} \partial_r \right)^{k-1} (r^{2k-1} U)$ eine Lösung der eindimensionalen Wellengleichung ist d.h.

$$\begin{aligned} V_{tt} - V_{rr} &= 0 & \text{in } (0, \text{dist}(x, \partial W)) \times (0, \infty) \\ V(t, 0) &= 0 & \text{für alle } t > 0. \end{aligned}$$

2. Finden Sie im Falle für $W = \mathbb{R}^n$ eine allgemeine Integraldarstellung für V .
3. Nutzen Sie diese, um im Falle für $k = 1$ (d.h. $n = 3$) die Kirchhoff'sche Formel herzuleiten.