Wintersemester 2019/20
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität Leipzig

Dr. André Uschmajew
Dr. Max Pfeffer

11. Übungsblatt
Optimierung I

Die Abgabe der Zusatzaufgaben ist optional. Sie erfolgt in der Übung am 6.2.2020.
Diese Übung dient zur Beantwortung von Fragen und zur Prüfungsvorbereitung.

Übungsaufgaben

1. **Projektion auf den Kern einer Matrix.**

   Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\operatorname{Rang}(A) = m \leq n$. Zeigen Sie:

   (a) Es gibt eine orthogonale Matrix $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und eine reguläre Matrix $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ mit

   $$A = \begin{pmatrix} B & 0 \end{pmatrix} V.$$

   (b) AA^T ist regulär.

   (c) Seien nun $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Sei $x \in \mathbb{R}^n$ mit $Ax = b$ und $x > 0$ ein relativ innerer Punkt des zulässigen Bereiches X des linearen Optimierungsproblems

   $$\max\ c^\mathsf{T} x \quad \text{u.d.N.} \quad Ax = b,\ x \geq 0.$$

   Bestimmen Sie die Richtung des steilsten Anstiegs in X, also ein $d \neq 0$ mit $Ad = 0$ und

   $$\frac{c^\mathsf{T} d}{\|d\|}$$

   maximal.

Zusatzaufgaben

1. **Abschlussquiz: Lineare Optimierung.** (10 Zusatzpunkte)

   Gegeben ist das lineare Optimierungsproblem

   $$\min\ c^\mathsf{T} x \quad \text{u.d.N.} \quad Ax = b,\ x \geq 0 \tag{1}$$

   mit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Begründen Sie.

   (i) Wenn $m > n$, so ist das Problem unzulässig.

   (ii) Wenn $b \notin \operatorname{Bild}(A)$, so ist das Problem unzulässig.

   (iii) Wenn die zulässige Menge X unbeschränkt ist, so ist das Problem unbeschränkt.

   (iv) Wenn X beschränkt und nichtleer ist, gibt es immer genau eine Lösung $x \in X$.

(v) Das duale Problem von (1) ist gegeben durch

$$\min -b^\mathsf{T}\mu \quad \text{u.d.N.} \quad A^\mathsf{T}\mu - c \leq 0.$$

(vi) Die Standardform von (1) ist gegeben durch

$$\min c^\mathsf{T}x \quad \text{u.d.N.} \quad Ax \leq b.$$

(vii) Wenn das duale Problem unzulässig ist, so ist das primale Problem unbeschränkt.

(viii) In einem Matrixspiel mit Wert 0 haben die beiden Spieler immer die gleiche Strategie.

(ix) Sei $\operatorname{Rang}(A) = m$ und x^* die Lösung von (1), wobei die Anzahl der Nichtnulleinträge von x^* kleiner als m ist, also $\#\{x^* \neq 0\} < m$. Dann kann es sein, dass der Simplexalgorithmus nicht terminiert.

(x) Wenn es keinen zulässigen Startpunkt für den Simplexalgorithmus gibt, so ist das Problem entweder unbeschränkt oder unzulässig.

2. **Standardform und duales Problem.** (5 Zusatzpunkte)

Gegeben ist das lineare Optimierungsproblem

$$\min c^\mathsf{T}x \quad \text{u.d.N.} \quad Ax \leq b,$$

wobei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix},\ c = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Bringen Sie das Problem in Standardform und stellen Sie das duale Problem auf.

3. **Stein, Schere, Papier, Brunnen.** (5 Zusatzpunkte)

Eine bekannte Erweiterung des Spiels "Stein, Schere, Papier" ist die Einführung einer weiteren Option: Brunnen. Dieser gewinnt gegen Stein und Schere (diese fallen bildlich in den Brunnen) und verliert gegen Papier (welches den Brunnen abdeckt).

(a) Stellen Sie die Auszahlungsmatrix des Spiels auf.

(b) Was ist der Wert des Spiels?

(c) Bestimmen Sie die Strategie des Zeilenspielers, indem Sie das lineare Optimierungsproblem aus seiner Sicht aufstellen. Was ist der Nachteil des veränderten Regelwerks?

4. **Simplexalgorithmus.** (5 Zusatzpunkte)

Lösen Sie das lineare Optimierungsproblem aus Zusatzaufgabe 2.

5. **Ein Schritt des Karmarkar-Verfahrens.** (5 Zusatzpunkte)

In jedem Schritt des Karmarkar-Verfahrens muss in Abhängigkeit von $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $c, \alpha, r \in \mathbb{R}$ und einem inneren Punkt $x > 0,\ Ax = 0,\ e^\mathsf{T}x = 1$ das Minimierungsproblem

$$y = \operatorname*{argmin}_s \left\{ (D_x c)^\mathsf{T} s : AD_x s = 0,\ e^\mathsf{T} s = 1,\ \|s - \frac{1}{n}e\| \leq \alpha r \right\}$$

gelöst werden. Dies entspricht einem Gradientenschritt für die Zielfunktion $f(x) = c^\mathsf{T}x$ auf der Menge $B_{\alpha r}(\frac{1}{n}e) \cap H_1 \cap \operatorname{Kern}(A)$, wobei $H_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : e^\mathsf{T}x = 1\}$. Bestimmen Sie y mit Hilfe von Übungsaufgabe 1.