

1 Grundlagen und Notation

1.1 Logik

Das Hauptziel dieses Abschnitts ist es, Notation einzuführen, die wir in den kommenden Semestern ständig benutzen werden. Es handelt sich also um einen Art „Vokabelteil“ der Vorlesung. Es gibt in (mathematischer) Logik und Mengenlehre tiefe und überraschende Resultate, mit denen wir uns jedoch – zumindest zunächst – nicht befassen werden.

Da wir keinen vollständigen Kurs in Logik und Beweistheorie absolvieren wollen, wird dieser Abschnitt mehr Ungenauigkeiten und Halbwahrheiten enthalten als wir uns üblicherweise erlauben wollen. Einige Definitionen in diesem Abschnitt werden notgedrungen etwas unscharf bleiben. So zum Beispiel der folgende Begriff der Aussage: Eine Aussage ist ein Satz (mathematisch oder anderweitig), der (im Prinzip) wahr oder falsch sein kann. Dabei geht es zunächst nicht darum, ob der Satz tatsächlich wahr oder falsch ist (was je nach Kontext unterschiedlich sein kann), sondern nur darum, dass es prinzipiell möglich ist ihm einen Wahrheitswert zuzuschreiben.

Beispiel 1.1. Aussagen:

- Morgen ist Montag.
- $x > 1$ (für eine natürliche Zahl x)
- Bei Vollmond sprießen grüne Hasen im Meer.
- Wenn es den Weihnachtsmann gibt, dann versteckt er zu Ostern die Eier.

keine Aussagen:

- Was ist eine Aussage?
- $x + 20y$ (für natürliche Zahlen x und y)
- Dieser Satz ist falsch.

Bemerkung 1.2. (i) Im folgenden wollen wir vorwiegend mathematische Beispielaussagen verwenden, dummerweise stehen uns aber zu diesem Zeitpunkt noch keine mathematischen Inhalte zur Verfügung. Wir werden daher bis auf Weiteres wie oben geschehen die natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ mit den üblichen arithmetischen Operationen unter der üblichen Ordnungsrelation für Beispiele verwenden auch wenn wir streng genommen noch nicht wissen was das sein soll.

- (ii) Aussagen (sowohl alltagssprachliche als auch mathematische) können unsinnig sein (und zwar selbst dann wenn sie wahr sind).
- (iii) Aussagen (und damit deren Wahrheitswert) können von Variablen abhängen.

Wir können nur mittels logischer Operationen (sogenannter Junktoren) aus einfachen Aussagen neue, komplexere Aussagen bilden:

Definition 1.3. Seien Φ und Ψ Aussagen, dann sind auch die folgenden Ausdrücke Aussagen (in Klammern die alltagssprachliche Umschreibung):

- (i) $\neg\Phi$ (nicht Φ),
- (ii) $\Phi \wedge \Psi$ (Φ und Ψ),
- (iii) $\Phi \vee \Psi$ (Φ oder Ψ),
- (iv) $\Phi \longrightarrow \Psi$ (aus Φ folgt Ψ),
- (v) $\Phi \longleftrightarrow \Psi$ (Φ genau dann wenn Ψ).

Ihre Bedeutung erhalten diese logischen Operationen durch die folgenden Wahrheitswerttabellen, die den Wahrheitswert des zusammengesetzten Ausdrucks in Abhängigkeit des Wahrheitswertes der einzelnen Bestandteile wiedergeben:

			Φ	$\neg\Phi$		
			w	f		
			f	w		
Φ	Ψ	$\Phi \wedge \Psi$	$\Phi \vee \Psi$	$\Phi \longrightarrow \Psi$	$\Phi \longleftrightarrow \Psi$	
w	w	w	w	w	w	
w	f	f	w	f	f	
f	w	f	w	w	f	
f	f	f	f	w	w	

Bemerkung 1.4. Oben verwenden wir Φ und Ψ als Variablen so wie zuvor bereits in den Beispielen x und y . Variablen sind Platzhalter für Objekte eines ganz bestimmten Typs (das ist wiederum etwas ungenau, soll aber hier genügen). Wir verwenden meist lateinische oder griechische Buchstaben dafür. Für welches Objekt eine Variable steht bleibt häufig während des gesamten Arguments unbestimmt (es interessiert uns oben nicht welche Aussagen sich genau hinter Φ und Ψ verbergen), es ist jedoch stets notwendig den Typ des Objektes zu kennen (es ist entscheidend, dass Φ und Ψ Aussagen sind, andernfalls ergeben die Wahrheitswerttabellen keinen Sinn) da es vom Typ der Variablen abhängt, ob ein mathematischer Ausdruck sinnvoll ist oder nicht. Ähnlich wie in vielen Programmiersprachen sollten Variablen in mathematischen Argumenten daher stets „deklariert“ – also ihr Typ festgelegt – werden.

Einige weitere Bemerkungen zu obiger Tabelle:

Bemerkung 1.5. (i) Das mathematische „oder“ \vee wird stets als „inclusives oder“ interpretiert ($\Phi \vee \Psi$ ist wahr auch dann, wenn Φ , Ψ beide wahr sind) welches alltagssprachlich manchmal als „und/oder“ geschrieben wird. Das gilt auch dann wenn wir es in Alltagssprache aufschreiben. Ein mathematischer Satz „Aus Voraussetzung A folgt B oder C .“ bedeutet also stets, dass falls A erfüllt ist, auch B oder C oder beide erfüllt sind.

- (ii) Die Wahrheitstabelle für $\Phi \rightarrow \Psi$, $\Psi \rightarrow \Phi$ und $\Phi \leftrightarrow \Psi$ unterscheiden sich. Das wird an sehr einfachen Beispielen offensichtlich:

$$x > 1 \rightarrow x + y > 1$$

ist für alle natürlichen Zahlen x und y wahr, die Umkehrung

$$x + y > 1 \rightarrow x > 1$$

jedoch falsch falls $x = 1$ ist.

Entsprechende Fehler treten jedoch sehr häufig auf es wir also statt „Aus A folgt B .“ der Satz „Aus B folgt A .“ bewiesen oder in einem mathematischen Argument statt des bekannten Satzes „Aus C folgt D .“ der (möglicherweise falsche) Satz „Aus D folgt C .“ verwendet.

- (iii) Ist die Voraussetzung Φ einer Implikation falsch, dann ist die Implikation $\Phi \rightarrow \Psi$ unabhängig von Ψ wahr. („Aus Falschem folgt Beliebiges.“) Nimmt man auch nur eine einzige falsche Aussage als wahr an, dann kann damit jede beliebige Aussage als wahr bewiesen werden, was natürliche jeden Versuch sinnvoller Mathematik ad absurdum führen würde. Diese Darstellung ist extrem verkürzt. Das sich dahinter verbergende Problem ist die Konsistenz mathematischer Theorien, worauf wir jedoch hier nicht näher eingehen.

Mit Hilfe der logischen Operationen können nun beliebig komplexe logische Ausdrücke zusammengesetzt werden. Dabei wird es häufig nötig sein Klammern zu setzen, um Ausdrücke eindeutig interpretieren zu können (die Wahrheitstabelle für $(\neg\Phi) \rightarrow \Psi$ und $\neg(\Phi \rightarrow \Psi)$ zum Beispiel unterscheiden sich). Um die Zahl der Klammern in einem erträglichen Maß zu halten führen wir eine Rangfolge der entsprechenden Operationen ein, ähnlich der Regel „Punktrechnung vor Strichrechnung“. Wir sagen, dass \neg stärker bindet als \wedge und \vee und diese wiederum stärker als \rightarrow und \leftrightarrow .

Beispiel 1.6. Die unten stehenden Ausdrücke werden also folgendermaßen interpretiert:

$$\begin{array}{ll} \neg\Phi \wedge \Psi & (\neg\Phi) \wedge \Psi \\ \neg\Phi \rightarrow \Psi & (\neg\Phi) \rightarrow \Psi \\ \Phi \wedge \Psi \leftrightarrow \Psi & (\Phi \wedge \Psi) \leftrightarrow \Psi \\ \neg\Phi \vee \neg\Psi \rightarrow \neg\Psi \wedge \Psi & ((\neg\Phi) \vee (\neg\Psi)) \rightarrow ((\neg\Psi) \wedge \Psi). \end{array}$$

Wir führen keine Reihenfolge zwischen \wedge und \vee beziehungsweise \rightarrow und \leftrightarrow ein, das heißt wir wollen Ausdrücke wie $\Phi \wedge \Psi \vee \Phi$ vermeiden.

Sehen wir uns die Wahrheitstabelle für einige komplexere Ausdrücke an.

Φ	Ψ	$\neg\Psi \rightarrow \neg\Phi$	$(\Phi \rightarrow \Psi) \wedge (\Psi \rightarrow \Phi)$	$\Phi \rightarrow \Phi \vee \Psi$	$\Phi \rightarrow \Psi$	$\Phi \leftrightarrow \Psi$
w	w	w	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w	f
f	f	w	w	w	w	w

Die 3. und die vorletzte Spalte der Tabelle stimmen überein (genau wie die 4. und die letzte Spalte). Das heißt die Wahrheitswerte der entsprechenden Aussagen stimmen für beliebige der Wahrheitswerte von Φ und Ψ überein. Man nennt solche Aussagen logisch äquivalent. Die Aussage $\Phi \longrightarrow \Phi \wedge \Psi$ ist, unabhängig von Φ und Ψ immer wahr. Solche Aussagen bezeichnen wir als Tautologien. Wir werden logische Äquivalenzen häufig verwenden ohne explizit darauf hinzuweisen. So kann zum Beispiel die Aussage „aus A folgt B “ bewiesen werden, indem gezeigt wird „gilt B nicht, so gilt auch A nicht“. Man kann stets einen logischen (Teil-)Ausdruck durch einen äquivalenten Ausdruck ersetzen, wir können logische Äquivalenzen also als „Rechenregeln“ für die logischen Operationen ansehen.

Es folgen einige dieser Rechenregeln (Übung). Zunächst können wir alle logischen Operationen durch lediglich \neg und \wedge ausdrücken:

$$\begin{aligned}(\Phi \longrightarrow \Psi) \wedge (\Psi \longrightarrow \Phi) &\text{ äquivalent } \Phi \longleftrightarrow \Psi \\ \neg\Phi \vee \Psi &\text{ äquivalent } \Phi \longrightarrow \Psi \\ \neg(\neg\Phi \wedge \neg\Psi) &\text{ äquivalent } \Phi \vee \Psi.\end{aligned}$$

Es gelten die de Morganschen Gesetze:

$$\begin{aligned}\neg(\Phi \wedge \Psi) &\text{ äquivalent } \neg\Phi \vee \neg\Psi \\ \neg(\Phi \vee \Psi) &\text{ äquivalent } \neg\Phi \wedge \neg\Psi\end{aligned}$$

Sowohl \wedge als auch \vee verhalten sich kommutativ

$$\begin{aligned}\Phi \wedge \Psi &\text{ äquivalent } \Psi \wedge \Phi \\ \Phi \vee \Psi &\text{ äquivalent } \Psi \vee \Phi\end{aligned}$$

und assoziativ

$$\begin{aligned}\Phi \wedge (\Psi \wedge \Theta) &\text{ äquivalent } (\Phi \wedge \Psi) \wedge \Theta \\ \Phi \vee (\Psi \vee \Theta) &\text{ äquivalent } (\Phi \vee \Psi) \vee \Theta.\end{aligned}$$

außerdem gelten die Distributivgesetze

$$\begin{aligned}\Phi \wedge (\Psi \vee \Theta) &\text{ äquivalent } (\Phi \wedge \Psi) \vee (\Phi \wedge \Theta) \\ \Phi \vee (\Psi \wedge \Theta) &\text{ äquivalent } (\Phi \vee \Psi) \wedge (\Phi \vee \Theta).\end{aligned}$$

Wie wir oben gesehen haben, können Aussagen von Variablen abhängen. Damit eröffnet sich eine weitere Möglichkeit komplexere Aussagen zu erhalten mittels sogenannter Quantoren.

Definition 1.7 (Quantoren). Sei $\Phi(x)$ eine von x abhängige Aussage. Dann sind $\forall x\Phi(x)$ und $\exists x\Phi(x)$ ebenfalls Aussagen. Wir interpretieren sie als „für jedes x gilt $\Phi(x)$ “ beziehungsweise „es gibt ein x , so dass $\Phi(x)$ “. Wir bezeichnen \forall als „Allquantor“ und \exists als „Existenzquantor“. Manchmal wird $\exists!$ für „es existiert genau ein x “ verwendet.

Bemerkung 1.8. (i) Der Wahrheitswert einer Aussage mit Quantoren hängt davon ab, was die möglichen Werte für die Variable x sind (wir sprechen vom Wertebereich oder Universum). Die Aussage $\forall x \ x > 0$ zum Beispiel ist für die natürlichen Zahlen wahr, für die ganzen Zahlen jedoch falsch. In den meisten Fällen werden wir den Wertebereich explizit angeben wie wir später sehen werden.

(ii) Für ein unendliches Universum kann man nicht mehr algorithmisch überprüfen ob Aussagen mit Quantoren wahr sind. Um $\forall x \Phi(x)$ zu verifizieren, müssten wir ja alle (unendlich vielen) möglichen Werte von x durchprobieren, was in endlicher Zeit nicht möglich ist. Ob solche Aussagen wahr oder falsch sind, können wir also im Allgemeinen nur mit Hilfe von Beweisen feststellen.

(iii) Der Name der Variablen im „Wirkungsbereich“ eines Quantors (einer sogenannten gebundenen Variablen) spielt keine Rolle. Die Aussagen $\forall x \Phi(x)$ und $\forall y \Phi(y)$ sind äquivalent. Aussagen können natürlich auch von mehreren Variablen abhängen. Um Mehrdeutigkeiten im Ausdruck $\forall x \Phi(x)$ zu vermeiden, muss darauf geachtet werden, dass in $\Phi(x)$ nicht bereits über x quantifiziert wird (wir sagen x ist eine freie Variable in $\Phi(x)$). Ausdrücke wie

$$\exists x \forall x \ x > x$$

sind also nicht erlaubt. Dadurch werden die möglichen Ausdrücke nicht eingeschränkt, da wir gebundene Variablen im Zweifel stets umbenennen können.

(iv) Quantoren gleicher Art können vertauscht werden ohne den logischen Inhalt der Aussage zu ändern, wir dürfen jedoch nicht \forall und \exists vertauschen. Die Aussagen $\forall x \forall y \ x > y$ und $\forall y \forall x \ x > y$ sind gleich, die Aussagen

$$\begin{aligned} \forall x \exists y \ y > x \text{ und} \\ \exists y \forall x \ y > x \end{aligned}$$

unterscheiden sich.

Für die Natürlichen Zahlen beispielsweise ist die erste Aussage wahr, die zweite falsch.

(v) Im Prinzip genügt einer der Quantoren, da die Aussagen $\forall x \ \Phi(x)$ und $\neg \exists x \ \neg \Phi(x)$ den gleichen Sachverhalt ausdrücken (analog für $\exists x \ \Phi(x)$ und $\neg \forall x \ \neg \Phi(x)$).

1.2 Mengen und Abbildungen

Definition 1.9. Eine Menge ist ein gedanklicher „Behälter“ für beliebige (mathematische) Objekte. Für eine Menge A interpretieren wir die Aussage $x \in A$ als „ x ist ein Element von A oder x ist enthalten in A “. Für $\neg x \in A$ schreiben wir abkürzend $x \notin A$.

Ähnlich wie „Zahl“ ist auch „Menge“ ein abstraktes Konzept. Mengen besitzen also keine „natürlichen“ Eigenschaften. Vielmehr legen wir fest, welche Eigenschaften Mengen unserer Meinung nach haben sollten und untersuchen dann, welche logischen Konsequenzen daraus folgen. Das kann vollständig formal mittels gewisser Axiomensysteme der Mengenlehre geschehen, wir werden Mengen hier jedoch nur informell beschreiben. Große Teile der Mathematik (insbesondere alles was wir in diesem Kurs besprechen werden) können formuliert werden indem man ausschließlich die Sprache der Mengenlehre verwendet. Das heißt alle mathematischen Objekte sind spezielle Mengen, alle Elemente von Mengen sind selbst Mengen und alle Eigenschaften und Beziehungen von mathematischen Objekten untereinander werden mittels der \in -Relation ausgedrückt. Diese Darstellung ist jedoch weder besonders intuitiv noch erhellend und wir werden sie daher nur am Rande erwähnen.

Die obige Definition ist genaugenommen nicht korrekt. Mengen können nicht beliebige Objekte zusammenfassen, die Betrachtung der Menge aller Mengen zum Beispiel führt unweigerlich zu Widersprüchen. Entscheidend ist jedoch, dass Mengen unendlich viele Objekte enthalten können (was für tatsächliche physische Behälter unmöglich ist).

Wir spezifizieren Mengen üblicherweise auf die folgende Art:

- (i) \emptyset bezeichnet die leere Menge, also die Menge ohne Elemente. Es gibt genau ein solches Objekt und $x \in \emptyset$ ist falsch für beliebiges x . (Die Existenz eines solchen Objektes muss in der formalen Darstellung durch ein Axiom sichergestellt werden: $\exists x \quad \forall y \quad y \notin x$.)
- (ii) Endliche Mengen können wir durch Aufzählung der Elemente angeben, z. B.

$$\{1, 3, 7, 20\}.$$

- (iii) Häufig wollen wir aus einer bereits bekannten Menge A diejenigen Elemente auswählen die eine bestimmte Eigenschaft besitzen (die x , so dass $\Phi(x)$ wahr ist). Dazu verwenden wir die Notation

$$\{x \in A \mid \Phi(x)\}.$$

Dabei muss $\Phi(x)$ eine Aussage mit einer einzigen freien Variablen x sein (für jede Wahl von x ist damit $\Phi(x)$ entweder wahr oder falsch). Die folgende Menge bezeichnet beispielsweise die geraden Zahlen:

$$\left\{x \in \mathbb{N} \mid \frac{x}{2} \in \mathbb{N}\right\}.$$

Zwischen Mengen A und B gibt es die folgenden Relationen:

- (i) A ist eine Teilmenge von B oder B ist eine Obermenge von A , geschrieben $A \subset B$ falls B alle Elemente von A enthält, falls also gilt

$$\forall x \quad x \in A \longrightarrow x \in B.$$

Daraus folgt insbesondere, dass die leere Menge Teilmenge jeder anderen Menge ist.

- (ii) A und B sind identisch, geschrieben $A = B$ falls A genau die selben Elemente wie B enthält, falls also gilt

$$\forall x \quad x \in A \longleftrightarrow x \in B.$$

Aus dieser Aussage folgt direkt, dass Mengen Elemente nicht „mehrfach“ enthalten können. Die Elemente einer Menge stehen auch nicht in einer festen Reihenfolge (auch wenn wir sie natürlich in irgendeiner Reihenfolge aufschreiben). Beispielsweise sind die Mengen

$$\{1, 3, 3, 7\} \quad \text{und} \quad \{3, 1, 7\}$$

gleich.

Darüber hinaus gibt es einige Operationen auf Mengen. Seien A, B wiederum Mengen.

- (i) Die Menge $A \cup B$ heißt Vereinigung von A und B und enthält genau die Elemente die in A oder B vorkommen also

$$x \in A \cup B \longleftrightarrow x \in A \vee x \in B.$$

Wir können auch Vereinigungen von mehr als zwei ($A \cup B \cup C$) oder sogar beliebig vielen Mengen betrachten. Sei dazu A eine Menge (von Mengen), dann ist

$$\bigcup_{C \in A} C$$

die Menge, deren Elemente genau die Elemente von mindestens einem $x \in A$ sind. Formal als Axiom aufgeschrieben können wir die Existenz dieses Objektes folgendermaßen ausdrücken:

$$\forall A \exists B \quad x \in B \longleftrightarrow (\exists C \quad x \in C \wedge C \in A).$$

- (ii) Die Menge $A \cap B$ heißt Durchschnitt von A und B . Sie enthält genau die Elemente, die sowohl in A als auch in B enthalten sind:

$$x \in A \cap B \longleftrightarrow x \in A \wedge x \in B.$$

Analog wie oben können wir auch Durchschnitte über mehr als zwei Mengen bilden:

$$\bigcap_{C \in A} C.$$

(Übung: Schreibe eine formale Aussage auf, die die Existenz des obigen Objektes postuliert.)

- (iii) Die Menge $A \setminus B$ heißt Differenz von A und B . Sie enthält genau die Elemente, die in A aber nicht in B enthalten sind:

$$x \in A \setminus B \iff x \in A \wedge x \notin B.$$

- (iv) Die Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ ist die Menge aller Teilmengen von A . Für endliche Mengen können wir die Potenzmenge explizit aufschreiben:

$$\mathcal{P}(\{*, +\}) = \{\emptyset, \{*\}, \{+\}, \{*, +\}\}$$

Für unendliche Mengen (z.B. \mathbb{N}) existiert die Potenzmenge ebenfalls, wir können sie aber nicht mehr explizit aufschreiben und ihre Existenz ist weniger selbstverständlich. (Übung: Schreibe einen formalen Ausdruck auf, der die Existenz der Potenzmenge postuliert.)

Auch für die Mengenoperationen gibt es wieder einige „Rechenregeln“.

Satz 1.10. *Seien A, B, C Mengen. Dann gelten die folgenden Gleichheiten:*

$$\begin{aligned} A \setminus (B \cup C) &= (A \setminus B) \cap (A \setminus C) \\ A \setminus (B \cap C) &= (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{aligned}$$

Beweis. Man kann sich relativ einfach mittels Venn-Diagrammen von der Gültigkeit dieser Gleichheiten überzeugen. Das ist jedoch kein Beweis sondern lediglich eine Gedächtnisstütze. Wir werden hier nur die letzte Gleichheit formal beweisen, die anderen Beweise sind sehr ähnlich. Seien also A, B, C beliebige Mengen. Dann gilt

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cup C) &\iff x \in A \wedge x \in B \cup C \\ &\iff x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \\ &\iff (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \\ &\iff x \in A \cap B \vee x \in A \cap C \\ &\iff x \in (A \cap B) \cup (A \cap C). \end{aligned}$$

Dabei haben wir in den ersten beiden Zeilen die Definitionen von Durchschnitt und Vereinigung verwendet, in der dritten Zeile eines der Distributivgesetze der Logik aus dem vorhergehenden Kapitel und schließlich wieder die Definitionen von Durchschnitt und Vereinigung verwendet. Wir haben also gesehen, dass $x \in A \cap (B \cup C)$ ist, genau dann wenn $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Da zwei Mengen gleich sind, wenn sie die gleichen Elemente enthalten muss die gesuchte Gleichheit gelten. \square

Definition 1.11. Seien A, B Mengen und $x \in A, y \in B$. Dann bezeichnet (x, y) das geordnete Paar aus x und y . Die einzelnen Einträge x, y werden in diesem Fall Koordinaten des Paares (x, y) genannt.

Die Menge aller möglichen geordneten Paare wird als das kartesische Produkt $A \times B$ von A und B bezeichnet:

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}.$$

Bemerkung 1.12. (i) Das Paar (x, y) und die Menge $\{x, y\}$ sind unterschiedliche Objekte. Ersteres ist **geordnet**, letzteres ungeordnet. (Wir können jedoch geordnete Paare – so wie alle mathematischen Objekte – als Mengen darstellen zum Beispiel durch $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$.) Im Paar (x, y) gibt es ein erstes und ein zweites Element, was für die Menge $\{x, y\}$ keinen Sinn ergibt.

Die entscheidende Eigenschaft von Paaren ist

$$(x, y) = (a, b) \iff x = a \wedge y = b.$$

(ii) Analog zu Paaren können wir auch Tripel, Quadrupel und allgemeinere n -tupel von Objekten definieren. Zum Beispiel für A, B, C Mengen:

$$A \times B \times C := \{(x, y, z) \mid x \in A \wedge y \in B \wedge z \in C\}.$$

Für das Kartesische Produkt einer Menge mit sich selbst schreiben wir abkürzend

$$A^2 = A \times A \quad A^3 = A \times A \times A$$

und so weiter.

(iii) Im Beispiel \mathbb{R}^2 (\mathbb{R} die reellen Zahlen) können wir das Paar (x, y) als Koordinaten eines Punktes in der Ebene interpretieren und uns das kartesische Produkt entsprechend als diese Ebene vorstellen. Wir können jedoch kartesische Produkte beliebiger Mengen bilden und im Allgemeinen wird es keine gute bildliche Darstellung für diese geben.

Definition 1.13. Seien A und B Mengen. Eine Abbildung f ist eine Zuordnung, die jedem Element $x \in A$ **eindeutig** ein Element von B zuordnet, das wir als $f(x)$ schreiben. Die Menge A bezeichnen wir als Definitionsbereich, die Menge B als Wertebereich der Abbildung. Häufig geben wir Definitionsbereich und Wertebereich an indem wir schreiben: Sei $f : A \rightarrow B$ eine Abbildung. Abbildungen deren Wertebereich Zahlen sind (\mathbb{N} , \mathbb{R} , \mathbb{C}) nennen wir Funktionen.

Beispiel 1.14. (i) Für endlichen Definitionsbereich können wir Abbildungen in Tabellenform angeben. Die folgende Tabelle beispielsweise ordnet einigen Katzen ihre Besitzer zu:

Katze	Besitzer
Mimi	Klara
Kitti	Klara
Paul	Paul

- (ii) Für unendlichen Definitionsbereich ist das natürlich nicht möglich und wir geben Abbildungen häufig durch Angabe von „Formeln“ an.

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$n \mapsto 2n + 1.$$

Genaugenommen führen wir hier die Abbildung f auf bereits bekannte Abbildungen (Addition und Multiplikation) zurück.

- (iii) Funktionen müssen nicht immer so „schön“ sein wie im vorhergehenden Beispiel:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} 0 & x \text{ rational} \\ 1 & x \text{ irrational.} \end{cases}$$

- (iv) Die Addition natürlicher Zahlen ist eine Abbildung von $\mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$. Anstatt $f(n, m)$ schreiben wir in diesem Falle jedoch meist $n + m$.

- (v) Für jede Menge A gibt es die Identitätsabbildung

$$\text{id}_A : A \rightarrow A$$

$$x \mapsto x.$$

Bemerkung 1.15. (i) Auch eine Abbildung $f : A \rightarrow B$ kann als spezielle Menge dargestellt werden. Sie ordnet allen Elementen des Definitionsbereichs eindeutig Elemente des Wertebereichs zu, die Abbildung wird also durch eine Teilmenge F von Paaren in $A \times B$ gegeben. Es repräsentiert jedoch nicht jede mögliche Teilmenge von $A \times B$ eine Abbildung sondern es muss gelten:

$$\forall x \in A \forall y \in B \forall z \in B \quad (x, y) \in F \wedge (x, z) \in F \longrightarrow y = z$$

$$\forall x \in A \exists y \in B \quad (x, y) \in F.$$

Die erste Zeile formalisiert die Eindeutigkeit der Zuordnung, die zweite Zeile sagt aus, dass jedem $x \in A$ ein Element zugeordnet wird.

Die Aussage $y = f(x)$ ist in dieser Darstellung abkürzende Schreibweise für $(x, y) \in F$. Häufig bezeichnet man die Menge F als den Graphen der Abbildung.

- (ii) Definitions- und Wertebereich sind integraler Bestandteil einer Abbildung. Die meisten Eigenschaften einer Abbildung hängen davon ab und nicht nur von der Abbildungsvorschrift. „Betrachte die Funktion $f(x) = x^2 \dots$ “ ist also nicht hinreichend präzise da hier viele verschiedene Definitionen und Wertebereiche möglich sind.
- (iii) Wir müssen unterscheiden zwischen der Abbildung f , welche die gesamte Zuordnungsvorschrift beschreibt und $f(x)$ welches lediglich ein Element in B ist.

(iv) Zwei Funktionen $f, g : A \rightarrow B$ sind gleich, genau dann wenn $f(x) = g(x)$ für alle $x \in A$.

Beliebige Abbildungen können die folgenden Eigenschaften besitzen:

Definition 1.16. Eine Abbildung $f : A \rightarrow B$ heißt injektiv, falls jedes Element von B Bild höchstens eines Elementes von A ist, falls also gilt

$$\forall x, \tilde{x} \in A \quad f(x) = f(\tilde{x}) \longrightarrow x = \tilde{x}.$$

Eine Abbildung heißt surjektiv, falls jedes Element von B Bild mindestens eines Elementes von A ist, falls also gilt

$$\forall y \in B \exists x \in A \quad f(x) = y.$$

Eine Abbildung heißt bijektiv, falls sie sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

Beispiel 1.17. (i) Die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\ n &\mapsto n^2 \end{aligned}$$

ist injektiv, aber nicht surjektiv.

(ii) Die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{N} \\ n &\mapsto n^2 \end{aligned}$$

ist weder injektiv noch surjektiv.

(iii) Die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\ n &\mapsto \begin{cases} \frac{n}{2} & n \text{ gerade} \\ \frac{n+1}{2} & n \text{ ungerade} \end{cases} \end{aligned}$$

ist surjektiv aber nicht injektiv.

Definition 1.18 (Verkettung). Seien A, B, C Mengen und $f : A \rightarrow B$ und $g : B \rightarrow C$ Abbildungen, dann ist die Verkettung oder Hintereinanderausführung $g \circ f$ von f und g die Abbildung

$$\begin{aligned} g \circ f : A &\rightarrow C \\ x &\mapsto g(f(x)). \end{aligned}$$

Bemerkung 1.19. Die Verkettung von Abbildungen ist assoziativ (Warum?), daher können wir Verkettungen von mehr als zwei Abbildungen ohne Klammern aufschreiben ($f \circ g \circ h$).

Für $f : A \rightarrow B$ und $g : B \rightarrow C$ ergibt die Verkettung in umgekehrter Reihenfolge nur Sinn, falls $C = A$ ist, aber selbst im Fall $A = B = C$ ist die Verkettung im Allgemeinen nicht kommutativ. Für $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ gegeben durch $f(n) = 2n$ und $g(n) = n + 3$ erhalten wir $f \circ g(n) = 2n + 6$ aber $g \circ f(n) = 2n + 3$.

Satz 1.20. *Sei $f : A \rightarrow B$ eine bijektive Abbildung, dann existiert genau eine Abbildung $f^{-1} : B \rightarrow A$, die sogenannte Umkehrabbildung, so dass*

$$f \circ f^{-1} = \text{id}_B \text{ und } f^{-1} \circ f = \text{id}_A.$$

Satz 1.21. *Sei $y \in B$ beliebig. Da f surjektiv ist, existiert $x \in A$ so, dass $f(x) = y$. Dieses x ist eindeutig bestimmt denn falls $f(\tilde{x}) = y$ für ein $\tilde{x} \in A$, dann gilt*

$$f(x) = y = f(\tilde{x})$$

und wegen der Injektivität $x = \tilde{x}$.

Wir definieren nun $f^{-1}(y) = x$. Es folgt dann einerseits

$$f \circ f^{-1}(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y = \text{id}_B(y).$$

Da das für alle $y \in B$ gilt, ist $f \circ f^{-1} = \text{id}_B$.

Ist andererseits $x \in A$ beliebig, dann gilt offensichtlich $f(x) = f(x)$ und damit nach Definition von f^{-1}

$$f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = x = \text{id}_A(x).$$

Da x wiederum beliebig ist folgt $f^{-1} \circ f = \text{id}_A$.

Die Umkehrung dieses Satzes gilt ebenfalls (Übung).

1.3 Zahlen

Ziel dieses Abschnitts ist es, die reellen Zahlen formal einzuführen. Sie bilden die Grundlage für alles Folgende. Es geht hier nicht darum neue Geheimnisse über die reellen Zahlen zu enthüllen, sondern darum festzulegen, was wir über die reellen Zahlen voraussetzen – und was nicht. Das geschieht, indem wir eine Reihe von Forderungen – sogenannten Axiomen – aufschreiben, die die reellen Zahlen erfüllen sollen.

Die reellen Zahlen sind eine Menge \mathbb{R} mit den folgenden Strukturen:

(i) Addition

Mit $+$ wird eine Abbildung von $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bezeichnet. Abweichend von der üblichen Notation für Abbildungen schreiben wir $a + b$ statt $+(a, b)$.

(ii) Multiplikation

Mit \cdot wird eine weitere Abbildung von $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bezeichnet. Wir schreiben $a \cdot b$ oder auch ab statt $\cdot(a, b)$.

(iii) Ordnungsrelation

Mit \leq wird eine Relation auf \mathbb{R} bezeichnet, das heißt $x \leq y$ ist eine Aussage die – in Abhängigkeit von x und y – wahr oder falsch sein kann. (Genau genommen handelt es sich um eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und wir verwenden $x \leq y$ als abkürzende Schreibweise für $(x, y) \in M$.)

An die Strukturen stellen wir nun eine Reihe von Anforderungen die wir Axiome nennen.

A1 Assoziativität

Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt

$$(x + y) + z = x + (y + z).$$

A2 Existenz eines neutralen Elements (der Addition)

Es gibt ein Element 0 , so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $x + 0 = x$.

A3 Existenz eines inversen Elements (der Addition)

Für jedes $x \in \mathbb{R}$ existiert $-x \in \mathbb{R}$, so dass $x + (-x) = 0$ gilt.

A4 Kommutativität

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $x + y = y + x$.

Aus diesen Axiomen können wir nun bereits die ersten Schlussfolgerungen ziehen. Da es sich hierbei um sehr einfache Aussagen handelt, die uns seit langem bekannt sind, liegt die Schwierigkeit bei diesen Beweisen darin, tatsächlich lediglich die Axiome zu verwenden und nicht irgendwelche weiteren Informationen die uns über die reellen Zahlen bekannt sind.

Satz 1.22. Seien $x, y \in \mathbb{R}$.

- (i) Das neutrale Element ist eindeutig bestimmt.
- (ii) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist das neutrale Element eindeutig bestimmt.
- (iii) Es gilt $-(-x) = x$.
- (iv) Es gilt $-(x + y) = -x + (-y)$.

Beweis. (i) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ zwei neutrale Elemente, das heißt es gilt $x + a = x = x + b$ für jedes $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt insbesondere $b + a = b$ und $a + b = a$. Mit der Kommutativität folgt dann $a = b$.

(ii) Seien nun c, d inverse Elemente zu x , das heißt $x + c = 0 = x + d$. Es folgt

$$c = 0 + c = x + d + c = x + c + d = 0 + d = d.$$

(iii) Übung.

(iv) Es gilt

$$x + y + (-x + (-y)) = x + y + (-x) + (-y) = x + (-x) + y + (-y) = 0 + 0 = 0.$$

Da das inverse Element eindeutig bestimmt ist folgt daraus $-(x + y) = -x + (-y)$.
 \square

Üblicherweise schreiben wir $x - y$ statt $x + (-y)$. Die Existenz des inversen Elements erlaubt es uns, Summanden von einer Seite einer Gleichung auf die andere zu schreiben wie im Beispiel

$$\begin{aligned}x + 4 &= 3 \\x + 4 + (-4) &= 3 + (-4) \\x + 0 &= 3 + (-4) \\x &= 3 + (-4).\end{aligned}$$

Analoge Axiome fordern wir auch für die Multiplikation.

M1 Assoziativität

Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt

$$(xy)z = x(yz).$$

M2 Existenz eines neutralen Elements (der Multiplikation)

Es gibt ein Element 1, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $x \cdot 1 = x$.

M3 Existenz eines inversen Elements (der Multiplikation)

Für jedes $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ existiert $x^{-1} \in \mathbb{R}$, so dass $xx^{-1} = 1$.

M4 Kommutativität

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $xy = yx$.

Übung: Formuliere und beweise die zu Satz 1.22 äquivalenten Aussagen für die Multiplikation.

Die Addition und die Multiplikation sollen auf die folgende Art kompatibel sein.

R1 Distributivität

Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt

$$x(y + z) = xy + xz.$$

R2 \mathbb{R} ist nicht trivial

$$0 \neq 1$$

Satz 1.23. Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Es gilt

(i) $x \cdot 0 = 0$,

(ii) $-(x \cdot y) = (-x) \cdot y = x \cdot (-y)$,

(iii) $(-x)(-y) = xy$,

(iv) $(-x)^{-1} = -x^{-1}$,

(v) aus $xy = 0$ folgt $x = 0$ oder $y = 0$.

Beweis. (i) Sei $x \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0) = x \cdot 0 + x \cdot 0.$$

Ziehen wir auf beiden Seiten $x \cdot 0$ ab, so folgt $0 = x \cdot 0$.

(ii) Weiter erhalten wir

$$xy + (-(xy)) = 0 = x \cdot 0 = x(y + (-y)) = xy + x(-y).$$

Ziehen wir auf beiden Seiten xy ab (wie genau?) erhalten wir $-(xy) = x(-y)$.

(iii) Übung.

(iv) Aus dem Vorhergehenden folgt

$$x(-(-x)^{-1}) = (-x)(-x)^{-1} = 1 = xx^{-1}.$$

Multiplizieren wir beide Seiten mit x^{-1} so erhalten wir $-(-x)^{-1} = x^{-1}$ oder (wie genau?) $(-x)^{-1} = -x^{-1}$.

(v) Falls $y = 0$ ist, ist nichts zu zeigen. Fall $y \neq 0$ gilt existiert y^{-1} und wir erhalten

$$x = xy y^{-1} = 0 \cdot y^{-1} = 0. \quad \square$$

Für $x, y \in \mathbb{R}$, $y \neq 0$ schreiben wir häufig $\frac{x}{y}$ statt xy^{-1} . Das multiplikative Inverse von y kann dann auch als $\frac{1}{y}$ geschrieben werden.

Bis hierher haben wir die Ordnungsrelation nicht verwendet. Eine Menge mit Operationen $+$ und \cdot die die bisherigen Axiome erfüllen heißt Körper. Neben den reellen Zahlen gibt es viele weitere Beispiele für Körper (die für uns relevanten werden die rationalen Zahlen \mathbb{Q} und die komplexen Zahlen \mathbb{C} sein).

Für die Ordnungsrelation fordern wir:

O1 Reflexivität

Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt $x \leq x$.

O2 Transitivität

Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ folgt aus $x \leq y$ und $y \leq z$ auch $x \leq z$.

O3 Antisymmetrie

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ folgt aus $x \leq y$ und $y \leq x$, dass $x = y$ ist.

O4 Totalität

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $x \leq y$ oder $y \leq x$.

Darüber hinaus fordern wir auch hier gewisse Kompatibilität mit Addition und Multiplikation.

O5 Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ folgt aus $x \leq y$ auch $x + z \leq y + z$.

O6 Für $x, y \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq x$ und $0 \leq y$ folgt $0 \leq xy$.

Wir verwenden $x < y$ als Abkürzung für $x \leq y \wedge x \neq y$.

Satz 1.24. Sei $x, y \in \mathbb{R}$ es gelten

(i) aus $x \leq y$ folgt $-y \leq -x$,

(ii) aus $0 \leq x$ und $y \leq 0$ folgt $xy \leq 0$,

(iii) aus $x \leq 0$ und $y \leq 0$ folgt $0 \leq xy$,

(iv) es gilt $0 \leq 1$,

(v) aus $0 \leq x$ folgt $0 \leq x^{-1}$,

(vi) aus $0 \leq x \leq y$ folgt $y^{-1} \leq x^{-1}$.

Beweis. (i) Wir addieren $-x + (-y)$ zur Ungleichung $x \leq y$ und erhalten

$$-y = x + (-x) + (-y) \leq y + (-x) + (-y) = -x.$$

- (ii) Nach dem vorhergehenden Punkt folgt aus $y \leq 0$ die Ungleichung $0 \leq -y$ (Warum ist $-0 = 0$?) und damit $0 \leq x(-y) = -xy$. Wir nutzen erneut den vorhergehenden Punkt und erhalten $xy \leq 0$.
- (iii) In diesem Fall gilt $0 \leq -x$ und $0 \leq -y$ und damit $0 \leq (-x)(-y) = xy$.
- (iv) Angenommen es gilt nicht $0 \leq 1$, dann muss $1 \leq 0$ gelten. Dann folgt aus dem vorhergehenden Punkt $0 \leq 1 \cdot 1 = 1$ im Widerspruch zur Voraussetzung.
- (v) Übung.
- (vi) Es gilt $0 \leq x^{-1}$ und $0 \leq y^{-1}$ und damit auch $0 \leq x^{-1}y^{-1}$. Aus $x \leq y$ folgt $0 \leq y-x$. Multiplizieren wir das mit $x^{-1}y^{-1}$, so erhalten wir $0 \leq yx^{-1}y^{-1} - xx^{-1}y^{-1} = x^{-1} - y^{-1}$ und damit schließlich $y^{-1} \leq x^{-1}$. \square

Definition 1.25. Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Wir verwenden die folgende Notation

$$\begin{aligned}x < y &\text{ f\"ur } x \leq y \wedge x \neq y, \\x \geq y &\text{ f\"ur } y \leq x, \\x > y &\text{ f\"ur } y < x.\end{aligned}$$

Unser Axiomensystem ist nun fast vollständig. Eine Struktur die alle bisher erw\u00e4hnten Axiome erf\u00fcllt hei\u00dft angeordneter K\u00f6rper. Auch f\u00fcr angeordnete K\u00f6rper gibt es viele Beispiele (\mathbb{Q} ...).

Das letzte Axiom ist nicht so selbstverst\u00e4ndlich wie die vorhergehenden. Es ist eine Formalisierung der Aussage, dass die reellen Zahlen „keine L\u00fccken“ lassen. Um es formulieren zu k\u00f6nnen ben\u00f6tigen wir etwas Vorbereitung.

Definition 1.26. Sei $A \subset \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$.

- (i) x hei\u00dft obere Schranke f\u00fcr A , falls f\u00fcr jedes $y \in A$ gilt $y \leq x$,
- (ii) x hei\u00dft Maximum von A , falls es eine obere Schranke ist und $x \in A$ gilt,
- (iii) x hei\u00dft Supremum von A , falls es eine obere Schranke von A ist und f\u00fcr jede weitere obere Schranke y gilt $x \leq y$, falls x also die kleinste obere Schranke ist.

Die Menge A hei\u00dft nach oben beschr\u00e4nkt, falls sie eine obere Schranke besitzt.

Analog sind die Begriffe untere Schranke, nach unten beschr\u00e4nkt, Minimum und Infimum (das hei\u00dft gr\u00f6\u00dfte untere Schranke definiert).

Supremum und Infimum von A sind – so sie existieren – eindeutig bestimmt (Warum?) und wir bezeichnen sie mit $\sup A$ und $\inf A$.

Die folgenden Teilmengen von \mathbb{R} werden häufig auftreten:

Definition 1.27. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass $a < b$. Wir definieren die folgenden Intervalle:

$$\begin{aligned} (a, b) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \wedge x < b\} \\ [a, b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \wedge x \leq b\} \\ (a, b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \wedge x \leq b\} \\ [a, b) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \wedge x < b\} \\ (a, \infty) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\} \\ [a, \infty) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\} \\ (-\infty, b) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\} \\ (-\infty, b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}. \end{aligned}$$

Beispiel 1.28. (i) Das Intervall $(-\infty, 1)$ ist nach oben beschränkt (1, 2, 1000, etc. sind obere Schranken) aber nicht nach unten beschränkt.

(ii) Das Intervall $(0, 1)$ besitzt kein Maximum, denn zu jeder Zahl $x \in (0, 1)$ läßt sich eine größere Zahl (z. B. $\frac{x+1}{2}$) finden, die ebenfalls in $(0, 1)$ liegt. Die Menge besitzt aber ein Supremum.

Wir fordern weiter das sogenannte Vollständigkeitsaxiom.

V Jede nach oben beschränkte, nichtleere Teilmenge von \mathbb{R} besitzt ein Supremum.

Damit ist unsere axiomatische Beschreibung der reellen Zahlen abgeschlossen.

Bemerkung 1.29. Es ist für uns an dieser Stelle nicht ersichtlich, dass ein Objekt welches alle oben geforderten Eigenschaften erfüllt existiert, dass die Axiome konsistent sind. Man kann mit einigem Aufwand, nur auf Grundlage der Axiome der Mengenlehre, die reellen Zahlen konstruieren und damit ihre Existenz nachweisen.

Außerdem wäre es prinzipiell vorstellbar, dass es viele, wesentlich verschiedene Objekte gibt, die die Axiome erfüllen. Obwohl es viele verschiedene Körper und angeordnete Körper gibt, kann man zeigen, dass die reellen Zahlen durch die oben stehenden Axiome „im Wesentlichen“ eindeutig bestimmt sind. Es ist daher gerechtfertigt von **den** reellen Zahlen zu sprechen.

Wir wollen nun in \mathbb{R} die anderen Zahlbereiche wiederfinden.

Definition 1.30. Eine Menge A heißt induktiv, wenn gilt

$$1 \in A \text{ und } \forall x \quad x \in A \longrightarrow x + 1 \in A.$$

Lemma 1.31. Sei I eine (möglicherweise unendliche) Indexmenge und A_i für jedes $i \in I$ eine induktive Menge, dann ist

$$\bigcap_{i \in I} A_i$$

ebenfalls eine induktive Menge.

Beweis. Da A_i für jedes $i \in I$ induktiv ist, gilt $1 \in A_i$ für jedes $i \in I$ und es folgt nach Definition des Durchschnitts

$$1 \in \bigcap_{i \in I} A_i.$$

Sei nun

$$x \in \bigcap_{i \in I} A_i,$$

das heißt für jedes $i \in I$ gilt $x \in A_i$. Da jedes A_i induktiv ist gilt dann auch $x + 1 \in A_i$ für jedes $i \in I$ und damit

$$x + 1 \in \bigcap_{i \in I} A_i. \quad \square$$

Definition 1.32. Die natürlichen Zahlen \mathbb{N} sind die kleinste induktive Menge, das heißt

$$\mathbb{N} = \bigcap_{A \text{ induktiv}} A.$$

Wir schreiben \mathbb{N}_0 für $\mathbb{N} \cup \{0\}$.

Satz 1.33 (Induktionsprinzip). Sei $\Phi(x)$ eine Aussage mit einer freien Variablen (Prädikat) und es gelte $\Phi(1)$ und $\Phi(x) \rightarrow \Phi(x + 1)$, dann gilt $\Phi(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Wir definieren die Menge

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid \Phi(x)\}.$$

Die Voraussetzungen des Satzes bedeuten genau, dass A eine induktive Menge ist. Nach Definition sind die natürlichen Zahlen die kleinste induktive Menge also folgt $\mathbb{N} \subset A$, es gilt also $\Phi(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. \square

Korollar 1.34. Seien $n, m \in \mathbb{N}$. Dann gelten

- (i) $n + m \in \mathbb{N}$,
- (ii) $n \cdot m \in \mathbb{N}$,
- (iii) $1 \leq n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. (i) Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir beweisen die Aussage mittels Induktion über m oder, mit anderen Worten wir zeigen, dass die Menge

$$A = \{m \in \mathbb{N} \mid n + m \in \mathbb{N}\}$$

eine induktive Menge ist. Da die natürlichen Zahlen eine induktive Menge sind, gilt $1 \in A$. Angenommen es gilt $m \in A$, also $n + m \in \mathbb{N}$. Dann folgt, wiederum da \mathbb{N} eine induktive Menge ist, dass $n + m + 1 \in \mathbb{N}$ ist, also $m + 1 \in A$. Damit ist A induktiv und enthält somit mindestens die natürlichen Zahlen \mathbb{N} .

(ii) Übung.

(iii) Übung. □

Satz 1.35. Sei $n \in \mathbb{N}$. Zwischen n und $n + 1$ liegen keine weiteren natürlichen Zahlen.

Beweisidee. Zeige zunächst, dass für $x \in (1, 2)$ die Menge $\mathbb{N} \setminus \{x\}$ induktiv ist. Da \mathbb{N} die kleinste induktive Menge ist muss gelten $x \notin \mathbb{N}$.

Zeige dann, dass falls $\mathbb{N} \cap (n, n + 1) = \emptyset$ für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt und $x \in (n + 1, n + 2)$ ist, die Menge $\mathbb{N} \setminus \{x\}$ induktiv ist und wiederum $x \notin \mathbb{N}$ gelten muss. □

Satz 1.36 (Archimedisches Prinzip). Für jedes $x \in \mathbb{R}$ existiert $n \in \mathbb{N}$ so, dass $x < n$.

Beweis. Falls $x < 1$ ist, ist nichts zu zeigen. Es gelte also $1 \leq x$. Wir definieren

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq x\}.$$

Da A nach Voraussetzung nicht leer und durch x nach oben beschränkt ist, existiert nach dem Vollständigkeitsaxiom $s = \sup A$. Nach Definition des Supremums ist $s - 1$ keine obere Schranke von A , das heißt es existiert $m \in A$ so, dass $s - 1 < m$ also $s < m + 1$. Da $m \in A$, also eine natürliche Zahl ist, ist auch $m + 1 \in \mathbb{N}$ und da s eine obere Schranke von A ist, muss $m + 1 \notin A$ gelten. Das bedeutet aber $m + 1 > x$. □

Korollar 1.37. Jede nichtleere Teilmenge der natürlichen Zahlen besitzt ein Minimum. Jede nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge der natürlichen Zahlen besitzt ein Maximum.

Beweis. Sei $A \subset \mathbb{N}$. Angenommen A besitzt kein Minimum. Wir definieren die Menge

$$\tilde{A} := \{n \in \mathbb{N} \mid \forall m \in A \quad n < m\}.$$

Die Zahl 1 ist untere Schranke für \mathbb{N} und damit für A , da 1 aber kein Minimum ist, muss $1 \in \tilde{A}$ gelten. Sei nun $n \in \tilde{A}$, also $n < m$ für jedes $m \in A$. Wegen Satz 1.35 ist $n + 1$ untere Schranke für A und da $n + 1$ kein Minimum ist, muss $n + 1 \in \tilde{A}$ gelten. Damit ist $\tilde{A} = \mathbb{N}$. Die Mengen A und \tilde{A} sind aber disjunkt (das heißt $A \cap \tilde{A} = \emptyset$), da $n < n$ für kein $n \in \mathbb{N}$ erfüllt sein kann. Damit folgt $A = \emptyset$.

Der zweite Aussage kann als Übung bewiesen werden. □

Definition 1.38. Wir definieren die ganzen Zahlen

$$\mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in \mathbb{N}_0 \vee -x \in \mathbb{N}_0\}$$

und die rationalen Zahlen

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z} \wedge q \neq 0 \right\}.$$

Bemerkung 1.39. Als Übung beweise man die folgenden Aussagen. Für $x, y \in \mathbb{Z}$ sind auch $x + y$, $x \cdot y$ und $-x$ in \mathbb{Z} .

Für $x, y \in \mathbb{Q}$ sind auch $x + y$, $x \cdot y$, $-x$ in \mathbb{Q} sowie x^{-1} falls $x \neq 0$. Mit anderen Worten: \mathbb{Q} ist ein Körper.

Korollar 1.40 (Dichtheit der rationalen Zahlen). Seien $x, y \in \mathbb{R}$ und $x < y$. Dann existiert eine rationale Zahl r so, dass $x < r < y$.

Beweis. Nach dem Archimedischen Prinzip existiert $q \in \mathbb{N}$ so, dass $\frac{1}{y-x} < q$. Sei $p \in \mathbb{Z}$ die größte ganze Zahl kleiner als yq (deren Existenz folgt aus Korollar 1.37). Daraus folgt unmittelbar $\frac{p}{q} < y$. Außerdem gilt $p + 1 \geq yq$ also

$$y \leq \frac{p}{q} + \frac{1}{q} < \frac{p}{q} + (y - x).$$

Daraus folgt schließlich $x < \frac{p}{q}$. □

Definition 1.41 (Betragsfunktion). Die Betragsfunktion wird folgendermaßen definiert:

$$|\cdot| : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$$

$$x \mapsto \begin{cases} x & 0 \leq x \\ -x & 0 > x \end{cases}.$$

Beweis. Übung. □

Satz 1.42. Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $|xy| = |x| |y|$.

Definition 1.43 (Komplexe Zahlen). Auf der Menge $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ definieren wir die Addition und Multiplikation als Abbildungen von $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Für $(x, y), (\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathbb{C}$ definieren wir

$$(x, y) + (\tilde{x}, \tilde{y}) := (x + \tilde{x}, y + \tilde{y})$$

$$(x, y) \cdot (\tilde{x}, \tilde{y}) := (x\tilde{x} - y\tilde{y}, x\tilde{y} + \tilde{x}y).$$

Den so entstehenden Körper bezeichnen wir als die komplexen Zahlen.

Die Koordinaten von $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ bezeichnen wir als Real- beziehungsweise Imaginärteil von z und schreiben

$$\operatorname{Re} z = x \text{ und } \operatorname{Im} z = y.$$

Bemerkung 1.44. (i) Das die oben beschriebene Struktur tatsächlich einen Körper darstellt, muss natürlich erst gezeigt werden. Führe zur Übung die entsprechenden Beweise durch. Dazu können die folgenden Hinweise genutzt werden:

neutrales Element der Addition: $(0, 0)$
 additives Inverses zu (x, y) : $(-x, -y)$
 neutrales Element der Multiplikation: $(1, 0)$
 multiplikatives Inverses zu $(x, y) \neq (0, 0)$: $\left(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2} \right)$.

- (ii) Zahlen mit verschwindendem Imaginärteil nennen wir reell. In diesem Fall reduzieren sich die neuen Rechenoperationen auf die Addition und Multiplikation von reellen Zahlen:

$$(x, 0) + (\tilde{x}, 0) = (x + \tilde{x}, 0) \text{ und } (x, 0) \cdot (\tilde{x}, 0) = (x\tilde{x}, 0).$$

Wir können dann die reelle Zahl x mit der komplexen Zahl $(x, 0)$ identifizieren und so die reellen Zahlen in den komplexen Zahlen „wiederfinden“.

- (iii) Wir definieren die imaginäre Einheit $i = (0, 1)$. Dann gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}$, dass $i(x, y) = (-y, x)$. Insbesondere ist $i^2 = -(1, 0)$. Es gilt dann

$$(x, y) = (x, 0) + i(y, 0).$$

Wie oben bemerkt schreiben wir statt $(x, 0)$ lediglich x und erhalten so $x + iy$ als die übliche Schreibweise für die komplexe Zahl (x, y) .

Damit benötigen wir lediglich die üblichen Rechenregeln (Kommutativität, Assoziativität und Distributivität), sowie die Formel $i^2 = -1$ um uns die Formel für die Multiplikation komplexer Zahlen

$$(x + iy)(\tilde{x} + i\tilde{y}) = x\tilde{x} + ix\tilde{y} + i\tilde{x}y - \tilde{x}\tilde{y} = (x\tilde{x} - \tilde{x}\tilde{y}) + i(x\tilde{y} + \tilde{x}y)$$

sowie das multiplikative Inverse

$$\frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}$$

einzuprägen.

- (iv) Die komplexen Zahlen haben einerseits schlechtere Eigenschaften als die reellen Zahlen, sie lassen sich z.B. nicht mehr mit den arithmetischen Operationen verträglich anordnen. Andererseits haben sie auch bessere Eigenschaften, so gibt es zum Beispiel ein Element x mit $x^2 = -1$.

Theorem 1.45 (Fundamentalsatz der Algebra). *Jedes nicht konstante, komplexe Polynom besitzt eine Nullstelle. Mit anderen Worten, sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ mit $\alpha_n \neq 0$ dann existiert ein x so, dass*

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i x^i := \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_n x^n = 0.$$

Ohne Beweis.

2 Analysis Teil I

2.1 Einige elementare Ungleichungen

Große Teile der Analysis beruhen darauf, dass wir Ergebnisse, die wir nicht explizit „ausrechnen“ können – was immer das im Einzelfall bedeuten mag – zumindest abschätzen können, also zeigen können, dass sie nicht „zu groß“ oder „zu klein“ sind. Dazu werden wir einige Ungleichungen immer wieder verwenden.

Beispiel 2.1. Für jede reelle Zahl x gilt $0 \leq x^2$. Aus dieser einfachen Erkenntnis können wir bereits die ersten interessanten Ungleichungen ableiten, denn es gilt für beliebige $x, y \in \mathbb{R}$

$$x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2 \geq 0,$$

und daher auch $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

Für $a, b \in [0, \infty)$ ergibt sich, wenn wir $x = \sqrt{a}$ und $y = \sqrt{b}$ einsetzen die Ungleichung zwischen arithmetischen und geometrischen Mittel:

$$\frac{1}{2}(a + b) \geq \sqrt{ab}.$$

(Die genaue Definition der hier auftauchenden Wurzelfunktion werden wir später nachreichen.)

Satz 2.2. Sei $x \in \mathbb{R}$ und $c \in [0, \infty)$. Es gelten

(i) $-|x| \leq x \leq |x|$,

(ii) $|x| \leq c \iff -c \leq x \leq c$,

(iii) $|x| \geq c \iff x \geq c \vee x \leq -c$,

(iv) $|x| = 0 \iff x = 0$.

Beweis. Übung. □

Satz 2.3 (Dreiecksungleichung). Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Beweis. Wegen $x \leq |x|$ und $y \leq |y|$ gilt auch $x + y \leq |x| + |y|$. Analog folgt aus $-|x| \leq x$ und $-|y| \leq y$ die Ungleichung $-(|x| + |y|) \leq x + y$ und damit aus dem vorhergehenden Satz

$$|x + y| \leq |x| + |y|. \quad \square$$

Korollar 2.4. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

Beweis. Wir beweisen die Aussage durch Induktion über n . Für $n = 1$ ist sie trivial erfüllt. Sei nun $m \in \mathbb{N}$, $m \leq n$ und es gelte

$$\left| \sum_{i=1}^m x_i \right| \leq \sum_{i=1}^m |x_i|.$$

Dann folgt aus der Dreiecksungleichung sowie der Induktionsannahme

$$\left| \sum_{i=1}^{m+1} x_i \right| = \left| \sum_{i=1}^m x_i + x_{m+1} \right| \leq \left| \sum_{i=1}^m x_i \right| + |x_{m+1}| \leq \sum_{i=1}^m |x_i| + |x_{m+1}| = \sum_{i=1}^{m+1} |x_i|. \quad \square$$

Satz 2.5 (Bernoulliungleichung). Sei $x \in [-1, \infty]$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

falls $x \geq -1$.

Beweis. Wir führen einen Induktionsbeweis über n . Für $n = 1$ ist die Ungleichung trivial erfüllt.

Angenommen es gilt $(1+x)^n \geq 1+nx$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann ist, da $(1+x)$ und damit $(1+x)^n$ nichtnegative Zahlen sind,

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) = 1+nx+x+nx^2 \geq 1+(n+1)x.$$

Im letzten Schritt wurde benutzt, dass $x^2 \geq 0$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt. □

2.2 Folgen und Grenzwerte

Definition 2.6. Sei M eine Menge (hier zunächst meist \mathbb{R} oder \mathbb{C}). Eine Folge in M ist eine Abbildung von $\mathbb{N} \rightarrow M$. Abweichend von der üblichen Notation für Abbildungen schreiben wir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset M$ oder lediglich $(x_n) \subset M$ um eine Folge aus M zu bezeichnen. Dann ist x_n die Auswertung – das sogenannte Folgenglied – der Folge an der Stelle $n \in \mathbb{N}$.

Beispiel 2.7. Einige Beispiele für reelle Folgen:

$$x_n = \frac{1}{n} \quad \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right)$$

$$x_n = \sum_{k=1}^n k \quad (1, 3, 6, 10, 15, 21, \dots)$$

$$x_n = \text{kleinster Primfaktor von } n \quad (*, 2, 3, 2, 5, 2, 7, 2, 3, 2, 11, 2, \dots).$$

Wie wir am ersten Beispiel sehen, können sich reelle Folgen einem Wert annähern ohne ihn jemals zu erreichen.

Definition 2.8. Sei $(x_n) \subset \mathbb{R}$ eine Folge und $x \in \mathbb{R}$. Wir sagen, dass (x_n) gegen x konvergiert und schreiben $x_n \rightarrow x$ oder $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ falls für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert so, dass $|x_n - x| < \epsilon$ für jedes $n \geq N$.

Wir sagen eine Folge $(z_n) \subset \mathbb{C}$ konvergiert gegen $z \in \mathbb{C}$ falls gilt

$$\operatorname{Re} z_n \rightarrow \operatorname{Re} z \text{ und } \operatorname{Im} z_n \rightarrow \operatorname{Im} z.$$

Die Zahl x (beziehungsweise z) heißt Grenzwert der Folge.

Eine Folge heißt konvergent falls sie einen Grenzwert besitzt, andernfalls heißt sie divergent.

Eine gegen 0 konvergente Folge heißt Nullfolge.

Beispiel 2.9. (i) Sei $x \in \mathbb{R}$ und $(x_n) \subset \mathbb{R}$ die konstante Zahlenfolge $x_n = x$. Dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, denn für $\epsilon > 0$, $N = 1$ und jedes $n > N$ gilt

$$|x_n - x| = 0 < \epsilon.$$

(ii) Die reelle Folge $x_n = \frac{1}{n}$ konvergiert gegen 0. Sei dazu $\epsilon > 0$. Nach dem archimedischen Prinzip existiert $N \in \mathbb{N}$ so, dass $\frac{1}{\epsilon} \leq N$ ist und damit gilt für $n > N$:

$$x_n = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} \leq \epsilon$$

und damit $|x_n - 0| = x_n < \epsilon$.

(iii) Die Folge

$$x_n = \begin{cases} 1 & n \text{ gerade} \\ -1 & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

ist divergent. Wir sehen beispielsweise, dass sie nicht gegen 1 konvergiert, denn für $\epsilon = 1$ und für $N \in \mathbb{N}$ gilt stets $|x_{2N} - 1| = 2 > \epsilon$. (Zeige als Übung, dass auch keine andere Zahl Grenzwert der Folge sein kann.)

Bemerkung 2.10. Wir sagen, dass eine Eigenschaft für fast alle Folgenglieder gilt, falls sie lediglich für endlich viele von ihnen nicht gilt. Eine Folge ist also konvergent, falls für jedes $\epsilon > 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $|x_n - x| < \epsilon$, falls also fast alle Folgenglieder im Intervall $(x - \epsilon, x + \epsilon)$ liegen.

Satz 2.11. *Eine Folge $(x_n) \subset \mathbb{R}$ (oder \mathbb{C}) hat stets höchstens einen Grenzwert.*

Beweis. Angenommen x und \tilde{x} sind verschiedene Grenzwerte von $(x_n) \in \mathbb{R}$. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $x < \tilde{x}$, dann ist $\epsilon = \frac{1}{2}(\tilde{x} - x) > 0$. Da (x_n) gegen x konvergiert, muss x_n für fast alle $n \in \mathbb{N}$ in

$$(x - \epsilon, x + \epsilon) = \left(x - \epsilon, \frac{x + \tilde{x}}{2}\right)$$

liegen. Da (x_n) auch gegen \tilde{x} konvergiert, liegt x_n auch für fast alle $n \in \mathbb{N}$ in

$$(\tilde{x} - \epsilon, \tilde{x} + \epsilon) = \left(\frac{x + \tilde{x}}{2}, \tilde{x} + \epsilon\right)$$

liegen. Das ist jedoch nicht möglich, da die beiden Intervalle disjunkt sind. □

Satz 2.12. *Sei $(x_n) \subset \mathbb{R}$ (oder \mathbb{C}) eine Folge mit Grenzwert $x \in \mathbb{R}$. Sei $m \in \mathbb{N}$, dann gilt*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+m} = x.$$

Beweis. Übung. □

Definition 2.13. Eine Folge $(x_n) \subset \mathbb{R}$ heißt nach oben (nach unten) beschränkt falls $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ die entsprechende Eigenschaft hat.

Eine Folge heißt beschränkt, wenn sie sowohl nach oben, als auch nach unten beschränkt ist, falls also $K \in (0, \infty)$ existiert so, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$|x_n| \leq K.$$

Satz 2.14. *Jede konvergente Folge ist beschränkt.*

Beweis. Sei $(x_n) \subset \mathbb{R}$ eine Folge die gegen $x \in \mathbb{R}$ konvergiert. Das heißt insbesondere, es existiert $N \in \mathbb{N}$ so, dass $|x_n - x| < 1$ für alle $n \geq N$. Dann gilt für

$$K = \max\{|x_1|, \dots, |x_N|, |x| + 1\},$$

dass $|x_n| \leq K$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ (das Maximum existiert, da die Menge lediglich endlich viele Elemente enthält. Das ist offensichtlich für $n \leq N$ und für $n \geq N$ gilt mit der Dreiecksungleichung

$$|x_n| = |x_n - x + x| \leq |x_n - x| + |x| \leq |x| + 1 \leq K. \quad \square$$

Satz 2.15. Sei $(x_n) \subset \mathbb{R}$ beschränkt und $(y_n) \subset \mathbb{R}$ Nullfolge, dann ist auch $(x_n y_n)$ eine Nullfolge.

Beweis. Sei $\epsilon > 0$. Da (x_n) beschränkt ist, existiert $K \in (0, \infty)$ so, dass $|x_n| \leq K$. Da y eine Nullfolge ist, gilt für fast alle $n \in \mathbb{N}$, dass $|y_n| < \frac{\epsilon}{K}$. Damit ist aber für fast alle $n \in \mathbb{N}$

$$|x_n y_n| = |x_n| |y_n| < K \frac{\epsilon}{K} = \epsilon.$$

Damit ist $(x_n y_n)$ eine Nullfolge. □

Die Definition der Konvergenz ist für praktische Belange etwas unhandlich. Wir werden daher im Folgenden einige Sätze – gewissermaßen Rechenregeln – zusammenstellen, die uns das Bestimmen und die Arbeit mit Grenzwerten erleichtern.

Man beachte, dass häufig die Konvergenz der Folgen als Voraussetzung auftaucht. Eine häufige Fehlerquelle in Übungsaufgaben und Beweisen ist es, Aussagen über konvergente Folgen für divergente Folgen – oder Folgen deren Konvergenz noch nicht klar ist – zu benutzen.

Satz 2.16 (Einschließungssatz, Sandwichkriterium). Seien $(x_n), (y_n), (z_n) \subset \mathbb{R}$ Folgen und es gelte

$$x_n \leq y_n \leq z_n$$

für fast alle $n \in \mathbb{N}$, sowie $x_n \rightarrow x$ und $z_n \rightarrow x$. Dann ist (y_n) konvergent mit $y_n \rightarrow x$.

Beweis. Sei $\epsilon > 0$. Nach Voraussetzung existieren $N_1, N_2, N_3 \in \mathbb{N}$ so, dass $x_n \leq y_n \leq z_n$ für alle $n \geq N_1$, $|x_n - x| < \epsilon$ für alle $n \geq N_2$ sowie $|z_n - x| < \epsilon$ für alle $n \geq N_3$ gilt. Setze $N = \max \{N_1, N_2, N_3\}$ dann gilt für jedes $n \geq N$

$$-\epsilon < x_n - x \leq y_n - x \leq z_n - x < \epsilon$$

also $|y_n - x| < \epsilon$. Damit ist die Konvergenz gegen x bewiesen. □

Beispiel 2.17. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $n \leq n^2$ (Warum?) und damit auch

$$0 < \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n}.$$

Mit dem Einschließungssatz folgt also, dass $\frac{1}{n^2}$ gegen 0 konvergiert.

Satz 2.18. Seien $(x_n), (y_n) \subset \mathbb{R}$ konvergente Folgen so, dass für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $x_n \leq y_n$. Dann gilt auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

Beweis. Der Beweis ist sehr ähnlich dem von Satz 2.14 und sollte als Übung durchgeführt werden. □

Bemerkung 2.19. Man beachte, dass selbst dann, wenn $x_n < y_n$ für (fast) alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, lediglich $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ geschlussfolgert werden kann. Als Beispiel betrachte für $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}x_n &= 0 \\y_n &= \frac{1}{n}.\end{aligned}$$

Lemma 2.20. Sei $(x_n) \subset \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$. Die Folge (x_n) konvergiert gegen x genau dann, wenn $(|x_n - x|)$ eine Nullfolge ist.

Insbesondere ist (x_n) eine Nullfolge, genau dann wenn $(|x_n|)$ eine Nullfolge ist.

Beweis. Es gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$||x_n - x| - 0| = |x_n - x|.$$

Die Folge (x_n) konvergiert gegen x , falls für jedes $\epsilon > 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $|x_n - x| < \epsilon$. Die Folge $(|x_n - x|)$ ist eine Nullfolge, falls für jedes $\epsilon > 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $||x_n - x| - 0| < \epsilon$.

Die letzte Aussage folgt unmittelbar für $x = 0$. □

Satz 2.21. Seien $(x_n), (y_n) \subset \mathbb{R}$ (oder \mathbb{C}) Folgen mit $x_n \rightarrow x$ und $y_n \rightarrow y$. Dann gelten

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) &= x + y \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n &= xy\end{aligned}$$

und falls $y \neq 0$ ist auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{x}{y}.$$

Beweis. Sei $\epsilon > 0$. Nach Definition der Konvergenz existieren $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ so, dass $|x_n - x| < \frac{\epsilon}{2}$ für $n \geq N_1$ und $|y_n - y| < \frac{\epsilon}{2}$ für $n \geq N_2$. Setze $N = \max\{N_1, N_2\}$. Dann gilt für $n \geq N$ mit der Dreiecksungleichung

$$|x_n + y_n - (x + y)| = |x_n - x + y_n - y| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Damit ist die Konvergenz $x_n + y_n \rightarrow x + y$ gezeigt.

Wir benutzen erneut die Dreiecksungleichung um die folgende Ungleichungskette zu erhalten.

$$\begin{aligned}0 &\leq |x_n y_n - xy| = |x_n y_n - x_n y + x_n y - xy| \leq |x_n y_n - x_n y| + |x_n y - xy| \\ &= |x_n| |y_n - y| + |x_n - x| |y|.\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung und Lemma 2.20 sind $(|y_n - y|)$ und $(|x_n - x|)$ Nullfolgen. Nach Satz 2.14 und Satz 2.15 sind dann auch $(|x_n| |y_n - y|)$ sowie $(|x_n - x| |y|)$ Nullfolgen und

nach der soeben bewiesenen Aussage über Summen konvergenter Folgen konvergiert die rechte Seite gegen 0. Dann muss nach dem Einschließungssatz auch $|x_n y_n - xy|$ eine Nullfolge sein und aus Lemma 2.20 folgt $x_n y_n \rightarrow xy$.

Es sei nun $y \neq 0$ also $|y| > 0$. Wir müssen noch zeigen, dass $\frac{1}{y_n} \rightarrow \frac{1}{y}$ gilt. Nach Definition der Konvergenz existiert $N \in \mathbb{N}$ so, dass $|y_n - y| < \frac{|y|}{2}$ für alle $n \geq N$ gilt. Daraus folgt (Warum?)

$$0 < \frac{|y|}{2} \leq |y_n|$$

für alle $n \geq N$. Damit ist für diese N erstens $\frac{1}{y_n}$ wohldefiniert (wir teilen nicht durch 0) und zweitens ist die Folge $\frac{1}{y_n}$ beschränkt

$$\left| \frac{1}{y_n} \right| = \frac{1}{|y_n|} \leq \frac{2}{|y|}.$$

Dann gilt

$$\left| \frac{1}{y_n} - \frac{1}{y} \right| = \left| \frac{1}{y_n} \left(1 - \frac{1}{y} y_n \right) \right| = \left| \frac{1}{y_n} \right| \left| 1 - \frac{1}{y} y_n \right|.$$

Nach dem bereits bewiesenen konvergiert $\frac{1}{y} y_n$ gegen 1. Damit ist $\left| 1 - \frac{1}{y} y_n \right|$ eine Nullfolge und nach Satz 2.15 auch die rechte Seite der obigen Gleichung. Wir verwenden erneut Satz 2.15 um daraus auf $\frac{1}{y_n} \rightarrow \frac{1}{y}$ zu schließen. \square

Bemerkung 2.22. Selbst für $y \neq 0$ kann $y_n = 0$ für einzelne n gelten. Die Folge $\left(\frac{1}{y_n}\right)$ ist also nicht für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert, aber – wie wir oben gesehen haben – für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Wir werden öfter auf Folgen treffen, die lediglich für fast alle $n \in \mathbb{N}$ definiert sind. Solange wir uns lediglich für das Konvergenzverhalten solcher Folgen interessieren, müssen wir darauf nicht weiter eingehen, da dafür das Verhalten der Folge an lediglich endlich vielen Stellen irrelevant ist.

Korollar 2.23. Sei $K \in \mathbb{N}$ und $a_0, \dots, a_K, b_0, \dots, b_K \in \mathbb{R}$ und sei $b_K \neq 0$. Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \mathbb{N}} \frac{a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \dots + a_{K-1} n^{K-1} + a_K n^K}{b_0 + b_1 n + b_2 n^2 + \dots + b_{K-1} n^{K-1} + b_K n^K} = \frac{a_K}{b_K}.$$

Beweis. Wir erweitern den Bruch mit $\frac{1}{n^K}$ und erhalten

$$\frac{a_0 \frac{1}{n^K} + a_1 \frac{1}{n^{K-1}} + a_2 \frac{1}{n^{K-2}} + \dots + a_{K-1} \frac{1}{n} a_K}{b_0 \frac{1}{n^K} + b_1 \frac{1}{n^{K-1}} + b_2 \frac{1}{n^{K-2}} + \dots + b_{K-1} \frac{1}{n} + b_K}.$$

Wir wissen, dass $\frac{1}{n}$ eine Nullfolge ist und damit – nach dem vorhergehenden Satz – auch $\frac{1}{n^k}$ für beliebiges $k \in \mathbb{N}$. Der Zähler des Ausdrucks konvergiert also gegen a_K und der Nenner gegen b_K . Das Ergebnis folgt dann aus dem vorhergehenden Satz. \square

Beispiel 2.24. Sei $x \in (-1, 1)$. Dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$.

Beweis. Für $x = 0$ ist die Aussage trivial, es sei also $x \neq 0$. Dann gilt $|x| \in (0, 1)$ und damit $\frac{1}{|x|} \in (1, \infty)$. Wir setzen $s := \frac{1}{|x|} - 1 \in (0, \infty)$ und benutzen die Bernoulli Ungleichung:

$$(1 + s)^n \geq 1 + sn.$$

Daraus folgt

$$0 \leq |x|^n = \frac{1}{(1 + s)^n} \leq \frac{1}{1 + sn} = \frac{1 + 0 \cdot n}{1 + sn} \rightarrow \frac{0}{s} = 0.$$

Nach dem Sandwichkriterium ist also $|x|^n = |x^n|$ eine Nullfolge und damit auch x^n Lemma 2.20. \square

Definition 2.25. Eine Folge $(x_n) \subset \mathbb{R}$ heißt monoton wachsend (fallend) falls für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $x_{n+1} \geq x_n$ ($x_{n+1} < x_n$).

Satz 2.26 (Monotoniekriterium). Sei $(x_n) \subset \mathbb{R}$ eine monoton wachsende, nach oben beschränkte (oder monoton fallende, nach unten beschränkte) Folge, dann ist (x_n) konvergent.

Beweis. Wir zeigen die Aussage für monoton wachsende, nach oben beschränkte Folgen $(x_n) \subset \mathbb{R}$. Setze

$$A = \sup \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \text{ und } x = \sup A$$

Sei nun $\epsilon > 0$. Nach der Definition des Supremums ist $x - \epsilon$ keine obere Schranke von A und daher existiert $N \in \mathbb{N}$ so, dass $x_N > x - \epsilon$. Wegen der Monotonie der Folge und da x obere Schranke von A ist gilt damit für $n \geq N$

$$-\epsilon < x_N - x \leq x_n - x \leq 0 < \epsilon,$$

also $|x_n - x| \leq \epsilon$. Damit ist die Konvergenz gegen x gezeigt. \square

Man beachte, dass der Satz auch den Grenzwert bestimmt. Wegen Satz 2.12 ist es ausreichend, dass die Folge ab einem Index $N \in \mathbb{N}$ monoton wachsend ist.

Bemerkung 2.27. Um die Monotonie einer positiven Folge $((x_n) \subset (0, \infty))$ zu überprüfen, ist es manchmal einfacher Quotienten statt Differenzen zu betrachten. Man überzeugt sich leicht, dass gilt

$$\begin{aligned} (x_n) \text{ monoton wachsend} &\iff \frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ (x_n) \text{ monoton fallend} &\iff \frac{x_{n+1}}{x_n} \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Beispiel 2.28. Sei $a \in [0, \infty)$. Betrachte die rekursiv definierte Folge

$$\begin{aligned}x_1 &= 1 \\x_{n+1} &= \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right).\end{aligned}$$

Wir wollen mittels des Monotoniekriteriums die Konvergenz dieser Folge nachweisen. Zunächst zeigt ein einfacher Induktionsbeweis (Wie?), dass $0 < x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, die Folge also insbesondere nach unten beschränkt ist.

Wir betrachten für $n \in \mathbb{N}$

$$x_{n+1}^2 = \frac{1}{4} \left(x_n^2 + 2a + \frac{a^2}{x_n^2} \right) = \frac{1}{4} \left(x_n^2 - 2a + \frac{a^2}{x_n^2} \right) + a = \frac{1}{4} \left(x_n - \frac{a}{x_n} \right)^2 + a \geq a.$$

Es gilt also $x_n^2 \geq a$ für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Daraus folgt aber für jedes solche n auch $\frac{a}{x_n} \leq x_n$ und somit

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right) \leq \frac{1}{2} (x_n + x_n) = x_n.$$

Damit ist die Folge monoton fallend (für $n \geq 2$) und nach dem Monotoniekriterium konvergent.

Satz und Definition 2.29. Sei $a \in [0, \infty)$. Dann existiert genau eine Zahl $x \in [0, \infty)$ so, dass $x^2 = a$ gilt. Wir nennen sie die Quadratwurzel (oder nur Wurzel) aus a und schreiben $x = \sqrt{a}$.

Beweis. Zunächst kann es höchstens eine solche Zahl geben, denn falls $x^2 = a = y^2$ für $x, y \in [0, \infty)$ gilt, dann folgt

$$0 = x^2 - y^2 = (x + y)(x - y),$$

also $x + y = 0$, was lediglich für $x = y = 0$ möglich ist, oder $x - y = 0$. In jedem Fall gilt also $x = y$.

Wir müssen nun noch zeigen, dass es überhaupt eine solche Zahl gibt. Dazu betrachten wir die Folge aus dem vorangegangenen Beispiel. Wir haben bereits gezeigt, dass sie konvergiert. Da alle Folgenglieder positiv sind, ist ihr Grenzwert $x \geq 0$ (Satz 2.18). Stellen wir die Rekursionsformel um, so erhalten wir

$$2x_{n+1}x_n = x_n^2 + a.$$

Nach Satz 2.21 und Satz 2.12 konvergieren beide Seiten dieser Gleichung und wir erhalten

$$2x \cdot x = x^2 + a$$

oder $x^2 = a$. □

Bemerkung 2.30. Die Folge die wir zur Definition der Wurzel verwendet haben liefert auch einen recht schnell konvergierenden Algorithmus zu ihrer Berechnung. Mit analogen Methoden – und etwas mehr Rechenaufwand – kann man auch zeigen, dass es für jedes $a \in [0, \infty)$ und jedes $q \in \mathbb{N}$ ein eindeutig bestimmtes $x \in [0, \infty)$ gibt so, dass $x^q = a$. Wir nennen diese Zahl die q -te Wurzel aus a und schreiben

$$x = \sqrt[q]{a} \text{ oder } x = a^{\frac{1}{q}}.$$

Es gilt dann für beliebiges $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \left(\left(a^{\frac{1}{q}} \right)^p \right)^q &= \left(\left(a^{\frac{1}{q}} \right)^q \right)^p = a^p \text{ also} \\ \left(a^{\frac{1}{q}} \right)^p &= \left(a^p \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Wir schreiben für die letzten beiden Ausdrücke $a^{\frac{p}{q}}$.

Diese Notation ist deshalb sinnvoll, weil sich die Potenzgesetze – die wir bisher für ganzzahlige Exponenten bewiesen haben – jetzt für rationale Exponenten verallgemeinern lassen. Seien $x, y \in [0, \infty)$ und $u, v \in \mathbb{Q}$, dann gelten (Übung)

$$\begin{aligned} (xy)^u &= x^u y^u \\ x^u x^v &= x^{(u+v)} \\ (x^u)^v &= x^{(u \cdot v)}. \end{aligned}$$

Wir stellen noch einige wichtige Eigenschaften der Wurzelfunktionen zusammen.

Satz 2.31. *Es gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$, falls $x < y$ dann ist $\sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y}$.*

Seien $n, m \in \mathbb{N}$ und $n < m$ dann gilt für $x \in (1, \infty)$ und $y \in (0, 1)$

$$\sqrt[n]{x} < \sqrt[m]{x} \text{ und } \sqrt[n]{y} > \sqrt[m]{y}.$$

Satz 2.32. *Sei $a \in (0, \infty)$, dann gelten*

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} &= 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} &= 1. \end{aligned}$$

Beweis. Sei $\epsilon > 0$. Dann gilt (Blatt 4 Aufgabe 4)

$$\frac{n}{(1 + \epsilon)^n} \rightarrow 0,$$

es existiert also $N \in \mathbb{N}$ so, dass für $n \geq N$ gilt

$$\frac{n}{(1 + \epsilon)^n} < 1.$$

Für solche n gilt dann $n \leq (1 + \epsilon)^n$ und es folgt aus der Monotonie der Wurzelfunktion

$$1 \leq \sqrt[n]{n} \leq 1 + \epsilon$$

also $|\sqrt[n]{n} - 1| < \epsilon$. Damit ist die erste Konvergenz gezeigt.

Die zweite Konvergenz ist klar für $a = 1$. Sei nun zunächst $a \in (1, \infty)$, dann ist wegen des archimedischen Prinzips $a \leq n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ und wegen der Monotonie der Wurzel gilt

$$1 \leq \sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{n}.$$

Dann folgt die gesuchte Konvergenz aus dem Sandwichkriterium.

Falls schließlich $a \in (0, 1)$, dann ist $\frac{1}{a} \in (1, \infty)$ und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = 1. \quad \square$$

Definition 2.33. Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Damit muss gelten $f(x_0) = y$. Der Betrag der komplexen Zahl $z = x + iy$ ist definiert durch

$$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Man überzeugt sich leicht, dass diese Definition für reelle Zahlen mit der alten übereinstimmt und das gilt $|z| = 0$ genau dann wenn $z = 0$.

Satz 2.34. Seien $u, v \in \mathbb{C}$, dann gelten

$$\begin{aligned} |uv| &= |u| |v| \\ \left| \frac{1}{u} \right| &= \frac{1}{|u|} \text{ falls } u \neq 0 \\ |u + v| &\leq |u| + |v|. \end{aligned}$$

Die Ungleichung ist die Dreiecksungleichung für komplexe Zahlen.

Beweis. Die erste Gleichung folgt unmittelbar aus der Definition des Betrages

$$|uv| = \sqrt{uv\bar{u}\bar{v}} = \sqrt{u\bar{u}v\bar{v}} = \sqrt{u\bar{u}}\sqrt{v\bar{v}}.$$

Wenden wir das soeben gezeigt auf das folgende Produkt an, erhalten wir

$$\left| \frac{1}{u} \right| |u| = \left| \frac{1}{u} \cdot u \right| = 1$$

und damit die zweite Gleichung.

Um die Dreiecksungleichung zu zeigen betrachte zunächst eine beliebige komplexe Zahl $z = x + iy$. Für jede komplexe Zahl gelten die Ungleichungen (Übung)

$$\operatorname{Re} z \leq |\operatorname{Re} z| \leq |z| \quad \text{und} \quad \operatorname{Im} z \leq |\operatorname{Im} z| \leq |z|.$$

Wir wenden diese Ungleichung auf uv an und erhalten

$$\begin{aligned} |u+v|^2 &= (u+v)(\bar{u}+\bar{v}) = u\bar{u} + v\bar{u} + u\bar{v} + v\bar{v} \\ &= |u|^2 + 2\operatorname{Re}(uv) + |v|^2 \leq |u|^2 + 2|u||v| + |v|^2 = (|u|+|v|)^2 \end{aligned}$$

woraus – mittels der Monotonie der Wurzel – die gesuchte Ungleichung folgt. \square

Lemma 2.35. *Sei $(z_n) \subset \mathbb{C}$ eine Folge und $z \in \mathbb{C}$. Dann konvergiert (z_n) gegen z , genau dann wenn $|z_n - z|$ eine Nullfolge ist. Insbesondere ist (z_n) Nullfolge genau dann wenn $(|z_n|)$ Nullfolge ist.*

Beweis. Wir setzen

$$x_n = \operatorname{Re} z_n, y_n = \operatorname{Im} z_n, x = \operatorname{Re} z \text{ und } y = \operatorname{Im} z.$$

Sei zunächst $|z_n - z|$ eine Nullfolge, dann gilt

$$0 \leq |x_n - x| = |\operatorname{Re}(z_n - z)| \leq |z_n - z| \rightarrow 0.$$

Damit folgt aus dem Sandwichkriterium die Konvergenz $x_n \rightarrow x$. Mit einem analogen Argument folgt auch $y_n \rightarrow y$. Damit ist die Konvergenz von (z_n) gegen z gezeigt.

Konvergiere andererseits (z_n) gegen z , gelte also $x_n \rightarrow x$ und $y_n \rightarrow y$. Mit der Dreiecksungleichung für komplexe Zahlen folgt

$$0 \leq |z_n - z| = |(x_n - x) + i(y_n - y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y| \rightarrow 0.$$

Die gesuchte Aussage folgt damit wieder aus dem Sandwichkriterium. \square

Bemerkung 2.36. Mit dem obigen Lemma kann man nun Satz 2.21 und Korollar 2.23 auf komplexe Zahlen verallgemeinern (Übung).

Definition 2.37. Eine Folge $(x_n) \subset \mathbb{R}$ (oder \mathbb{C}) heißt Cauchy-Folge wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert so, dass für $n, m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq N$ und $n \geq N$ gilt

$$|x_n - x_m| < \epsilon.$$

Satz 2.38 (Cauchy-Kriterium). *Sei $(x_n) \subset \mathbb{R}$ (oder \mathbb{C}) eine Folge. Dann ist (x_n) konvergent genau dann wenn es eine Cauchy-Folge ist.*

Beweis. Es sei zunächst (x_n) konvergent gegen $x \in \mathbb{R}$. Das heißt es gibt $N \in \mathbb{N}$ so, dass $|x_n - x| \leq \frac{\epsilon}{2}$ für alle $n \geq N$. Dann gilt für $n, m \geq N$:

$$|x_n - x_m| = |x_n - x + x - x_m| \leq |x_n - x| + |x_m - x| \leq \epsilon.$$

Damit ist (x_n) Cauchy-Folge.

Sei andererseits (x_n) eine Cauchy-Folge. Wir betrachten zunächst den Fall einer reellen Folge. Wir zeigen zunächst, dass (x_n) beschränkt ist. Nach Voraussetzung existiert $N \in \mathbb{N}$ so, dass für $n, m \geq N$ gilt $|x_n - x_m| < 1$. Damit folgt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$|x_n| \leq |x_n - x_N| + |x_N| \leq 1 + |x_N|.$$

Wir definieren nun Hilfsfolgen

$$y_n = \sup \{x_m \mid m \geq n\} \quad \text{und} \\ z_n = \inf \{x_m \mid m \geq n\}.$$

Diese sind ebenfalls beschränkt. Für $\tilde{n} \leq n$ gilt

$$\{x_m \mid m \geq \tilde{n}\} \supset \{x_m \mid m \geq n\}$$

und daher $y_{\tilde{n}} \geq y_n$. Die Folge (y_n) ist also monoton fallend. Da sie auch beschränkt ist, konvergiert sie gegen ein $y \in \mathbb{R}$. Mit einem analogen Argument folgt, dass (z_n) monoton wachsend ist und damit gegen ein $z \in \mathbb{R}$ konvergiert.

Offenbar gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$z_n \leq x_n \leq y_n.$$

Falls also $z = y$ gilt, folgt aus dem Sandwichkriterium die Konvergenz der Folge x_n .

Wir nehmen nun an es sei $z < y$. Wir setzen $\epsilon := \frac{y-z}{5} > 0$. Für $N \in \mathbb{N}$ groß genug, gilt auf Grund der Konvergenz von (y_n) und (z_n)

$$\sup \{x_k \mid k \geq N\} = y_N \geq y - \epsilon \quad \text{und} \\ \inf \{x_k \mid k \geq N\} = z_N \leq z + \epsilon.$$

Für jedes $N \in \mathbb{N}$ finden wir also ein $k, l \geq N$ so, dass

$$x_k \geq y - 2\epsilon \quad \text{und} \quad x_l \leq z + 2\epsilon.$$

Für diese Elemente gilt

$$|x_k - x_l| \geq \epsilon = \frac{y-z}{5}$$

was jedoch im Widerspruch zur Cauchy-Bedingung steht. Es muss also $z = y$ gelten womit der Beweis beendet ist.

Sei schließlich $(z_n) \subset \mathbb{C}$ eine Cauchy-Folge und $x_n := \operatorname{Re} z_n$, $y_n := \operatorname{Im} z_n$. Wegen

$$|x_n - x_m| \leq |z_n - z_m| \quad \text{und} \quad |y_n - y_m| \leq |z_n - z_m|$$

sind dann auch (x_n) und (y_n) (reelle) Cauchy-Folgen und damit nach dem soeben gezeigten konvergent. \square

Bemerkung 2.39. (i) Für konkrete Folgen ist es häufig schwierig die Cauchy-Bedingung nachzuprüfen, der Satz ist aber ein wichtiges Werkzeug in Beweisen. Außerdem liefert er ein gutes Kriterium um zu zeigen, dass eine Folge **nicht** konvergiert.

(ii) Für die Cauchy-Bedingung ist es nicht ausreichend zu überprüfen, dass der Abstand aufeinanderfolgender Folgenglieder beliebig klein wird. Die Folge (\sqrt{n}) beispielsweise erfüllt

$$|\sqrt{n+1} - \sqrt{n}| = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \rightarrow 0,$$

ist aber offensichtlich nicht konvergent.

(iii) Die im Beweis benutzten Konstruktionen

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \{x_k \mid k \geq n\} \quad (\text{limes superior}) \quad \text{und}$$

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \{x_k \mid k \geq n\} \quad (\text{limes inferior})$$

sind auch in anderen Zusammenhängen nützlich.

Es gilt stets

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$$

und die Folge ist genau dann konvergent falls Gleichheit gilt.

Der Vorteil ist, dass $\overline{\lim}$ und $\underline{\lim}$ für jede beschränkte Folge existieren. Der Nachteil ist, dass sie sich schlechter mit den arithmetischen Operationen vertragen.

Definition 2.40. Eine Folge $(x_n) \subset \mathbb{R}$ heißt bestimmt divergent gegen $+\infty$ ($-\infty$) falls für jedes $K \in (0, \infty)$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert so, dass $x_n \geq K$ ($x_n \leq -K$) für alle $n \geq N$ gilt. Wir schreiben auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty \quad \text{beziehungsweise} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty.$$

Bemerkung 2.41. Es ist wichtig sich bewusst zu machen, dass $+\infty$ und $-\infty$ oben keine Grenzwerte sind (es sind ja nicht einmal Zahlen). Nichtsdestotrotz wird die Formulierung „ (x_n) konvergiert gegen unendlich“ häufig verwendet.

Satz 2.42. Sei $(x_n) \subset \mathbb{R}$ eine Folge mit $|x_n| \rightarrow \infty$, dann gilt $\frac{1}{x_n} \rightarrow 0$.

Sei umgekehrt $(y_n) \subset (0, \infty)$ eine Nullfolge dann gilt $\frac{1}{y_n} \rightarrow \infty$.

Beweis. Sei $\epsilon > 0$. Dann existiert nach Voraussetzung ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass für $n \geq N$ gilt $|x_n| > \frac{1}{\epsilon}$. Für solche n gilt dann auch

$$\frac{1}{|x_n|} < \epsilon.$$

Damit ist gezeigt, dass $\left(\frac{1}{x_n}\right)$ eine Nullfolge ist und damit auch (Lemma 2.20) $\left(\frac{1}{x_n}\right)$.

Der Beweis der zweiten Aussage kann als Übung durchgeführt werden. \square

Bemerkung 2.43. Die Aussage des obigen Satzes wird häufig mittels der folgenden „Rechenregeln“ – Merkgeln wäre wohl das passendere Wort – ausgedrückt:

$$\frac{1}{\pm\infty} = 0 \text{ und } \frac{1}{+0} = \infty.$$

Es gibt eine Reihe ähnlicher Sätze, die sich mit den Regeln ($a \in \mathbb{R}$, $b \in (0, \infty)$, $c \in (1, \infty)$, $d \in (0, 1)$)

$$\begin{array}{ll} a + \infty = \infty & a - \infty = -\infty \\ \infty + \infty = \infty & -\infty - \infty = -\infty \\ b \cdot \infty = \infty & b \cdot (-\infty) = -\infty \\ \infty \cdot \infty = \infty & \infty \cdot (-\infty) = -\infty \\ c^\infty = \infty & c^{-\infty} = 0 \\ d^\infty = 0 & d^{-\infty} = \infty \end{array}$$

merken lassen. Zu beachten ist, dass es für Ausdrücke der Form

$$\infty - \infty, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty \text{ und } 1^\infty$$

keine allgemeingültigen Regeln gibt.

Satz 2.44. Sei (x_n) eine gegen x konvergente Folge und $(k_n) \subset \mathbb{N}$ erfülle $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = \infty$. Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{k_n} = x.$$

Beweis. Sei $\epsilon > 0$, dann existiert $K \in \mathbb{N}$ so, dass $|x_k - x| < \epsilon$ für alle $k \geq K$. Weiter existiert $N \in \mathbb{N}$ so, dass $k_n \geq K$ für jedes $n \geq N$. Für solche n gilt also $|x_{k_n} - x| < \epsilon$ womit die gesuchte Konvergenz gezeigt ist. \square

Beispiel 2.45. Wir möchten den Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{2n} + 2n^n - n}{n^{3n} - n^n}$$

bestimmen. Zunächst gilt $\frac{n}{n^{3n}} = \frac{1}{n^{n-1}(n^{2n}-1)} \rightarrow 0$ nach den Regeln aus Bemerkung 2.43.

Den anderen Teil können wir mittels der Potenzgesetze wie folgt umschreiben

$$\frac{n^{2n} + 2n^n}{n^{3n} - n^n} = \frac{(n^n)^2 + 2n^n}{(n^n)^3 - n^n}.$$

Wir wissen bereits, dass

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^2 + 2k}{k^3 - k} = 0$$

ist und es gilt $n^n \rightarrow \infty$ (Warum?). Damit folgt aus dem Satz (sowie den Rechenregeln für Grenzwerte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{2n} + 2n^n - n}{n^{3n} - n^n} = 0$$

2.3 Konvergenz von Reihen

Definition 2.46. Sei $(x_k) \subset \mathbb{R}$ (oder \mathbb{C}) eine Folge. Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k$$

ist die Partialsummenfolge (s_n)

$$s_n = \sum_{k=1}^n x_k.$$

Sie heißt konvergent falls (s_n) konvergent ist und andernfalls divergent.

Für konvergente Reihen bezeichnen wir auch den Grenzwert mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n x_k.$$

Bemerkung 2.47. Das Symbol $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ steht also sowohl für die Folge (s_n) als auch für ihren Grenzwert falls dieser existiert. Diese Notation ist etwas unglücklich, aber weit verbreitet. Es ist jedoch wichtig sich bewusst zu machen, dass man mit $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ nur wie mit jeder beliebigen Zahl rechnen kann, wenn man die Konvergenz der Reihe bereits gezeigt hat.

Satz 2.48. Sei $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ eine konvergente (reelle oder komplexe) Reihe, dann ist (x_n) eine Nullfolge.

Beweis. Da die Reihe konvergent ist, ist die Partialsummenfolge (s_n) eine Cauchy-Folge. Insbesondere existiert also für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass für jedes $n \geq N$ gilt

$$\epsilon > |s_{n+1} - s_n| = \left| \sum_{k=1}^{n+1} x_k - \sum_{k=1}^n x_k \right| = |x_{n+1}|.$$

Damit ist $(|x_n|)$ eine Nullfolge und somit auch (x_n) . □

Beispiel 2.49 (Geometrische Reihe). Sei $x \in \mathbb{R}$ (oder \mathbb{C}). Die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

ist divergent falls $|x| \geq 1$ und konvergent falls $|x| < 1$. Im Falle der Konvergenz gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}.$$

Beweis. Falls $|x| \geq 1$ so gilt auch $|x^n| = |x|^n \geq 1$ und (x^n) ist somit keine Nullfolge.

Für jedes $x \neq 1$ gilt (Aufgabe 2 vom Blatt 3)

$$\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Falls $|x| < 1$ ist, ist x^n eine Nullfolge (Beispiel 2.24) und es folgt die gesuchte Konvergenz. \square

Beispiel 2.50 (Harmonische Reihe). Die Umkehrung der Aussage gilt nicht. Die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ beispielsweise ist nicht konvergent, obwohl $(\frac{1}{n})$ eine Nullfolge ist. Um das zu sehen betrachte die endliche Summe

$$\sum_{k=2^{m-1}+1}^{2^m} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=2^{m-1}+1}^{2^m} \frac{1}{2^m} = (2^m - 2^{m-1}) \frac{1}{2^m} = \frac{1}{2}$$

Für die Partialsummenfolge

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

gilt also für beliebiges $m \in \mathbb{N}$

$$|s_{2^m} - s_{2^{m-1}}| \geq \frac{1}{2}$$

sie ist also keine Cauchy-Folge und somit nicht konvergent.

Mit ähnlichen Methoden (Cauchy'scher Verdichtungssatz) kann man zeigen, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^r}$$

konvergiert genau dann, wenn $r > 1$ ist.

Lemma 2.51. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x_n$ konvergiert genau dann, wenn es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt so, dass $\sum_{k=N}^{\infty} x_n$ konvergiert.

Beweis. Übung. \square

Auf Grund dieses Lemmas ist es ausreichend, wenn die Voraussetzungen der im Folgenden zu beweisenden Konvergenzkriterien für fast alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt sind.

Satz 2.52 (Leibnitz-Kriterium). Sei $(x_n) \subset [0, \infty)$ eine monoton fallende Nullfolge. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k x_k$ und es gilt

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k x_k - \sum_{k=1}^N (-1)^k x_k \right| \leq x_{N+1}. \quad (2.1)$$

Beweis. Sei (s_n) die Partialsummenfolge

$$s_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k x_k$$

und betrachte die Folgen $a_n = s_{2n}$ und $b_n = s_{2n+1}$. Es gilt

$$a_{n+1} = s_{2n} - (x_{2n+1} - x_{2n+2}) \leq s_{2n},$$

die Folge ist also monoton fallend (analog ist b_n monoton wachsend). Dann ist für alle $m, n \in \mathbb{N}$, $n \geq m$

$$b_m \leq b_n = a_n - x_{2n+1} \leq a_n \leq a_m.$$

Insbesondere sind beide Folgen beschränkt und nach dem Monotoniekriterium konvergent gegen a beziehungsweise b . Schließlich stimmen die Grenzwerte überein, da $b_n - a_n = -x_{2n+1} \rightarrow 0$.

Aus der obigen Ungleichungskette folgt dann auch $b_m \leq b = a \leq a_m$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} |s_{2n} - a| &= a_n - a \leq a_n - b_n = x_{2n+1} \text{ und} \\ |s_{2n+1} - a| &= b - b_n \leq a_{n+1} - b_n = x_{2n+2}. \end{aligned}$$

Zusammen ergeben diese Ungleichungen die gesuchte Abschätzung (2.1) sowie die Konvergenz von (s_n) . \square

Bemerkung 2.53. (i) Die Monotonie ist notwendig.

(ii) Die Fehlerabschätzung (2.1) erlaubt es uns zu wissen, wann wir die gewünschte Genauigkeit bei der Berechnung von $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k x_k$ erreicht haben. Alternierende Reihen eignen sich daher besonders gut für numerische Berechnungen.

Beispiel 2.54 (Alternierende Harmonische Reihe). Nach dem obigen Satz konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

gegen einen Grenzwert $s \in [\frac{1}{2}, 1]$ (den konkreten Wert $s = \ln 2$ können wir an dieser Stelle noch nicht bestimmen).

Wir betrachten nun die folgende überraschende Rechnung. Anstatt positive und negative Summanden im Wechsel schreiben wir nun einen positiven und dann zwei negative

auf:

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) - \frac{1}{12} + \dots \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots\right) \\ &= \frac{1}{2}s \end{aligned}$$

Für s scheint also $s = \frac{1}{2}s$ zu gelten, was aber unmöglich ist, da $s \neq 0$. Das ist jedoch nur scheinbar ein Widerspruch. Tatsächlich zeigt es, dass die umgeordnete Reihe einen anderen Grenzwert als die ursprüngliche besitzt.

Bemerkung 2.55. (i) Das Konvergenzverhalten und der Wert einer Reihe ändert sich nicht, wenn nur endlich viele Summanden umgeordnet werden (Warum?).

(ii) Man kann sich auch davon überzeugen (Wie?) dass das Assoziativgesetz uneingeschränkt gültig bleibt. Es gilt also zum Beispiel für jede Folge (x_n) , dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_n$$

genau dann konvergiert, wenn

$$\sum_{k=0}^{\infty} (x_{2n+1} + x_{2n})$$

konvergiert und im Falle der Konvergenz stimmen die Grenzwerte überein.

(iii) Wie wir oben gesehen haben gilt für Reihen das Kommutativgesetz nicht mehr uneingeschränkt. Eine Reihe ist eben nicht „nur“ eine Summe, sondern ein Grenzwert einer Summenfolge. Das Umordnen der Reihe ändert die Folge der Partialsummen und kann damit – vielleicht etwas unerwartet – auch deren Grenzwert verändern.

Häufig ist die Situation folgendermaßen: gegeben ist eine Indexmenge I und zu jedem $i \in I$ eine Zahl a_i (also eine Abbildung $I \rightarrow \mathbb{R}$, $i \mapsto a_i$) und wir möchten die Summe

$$\sum_{i \in I} a_i$$

bestimmen. Für endliches I ist das kein Problem. Falls die Indexmenge unendlich ist, kann natürlich der Fall auftreten, dass das Ergebnis ebenfalls unendlich ist. Es kann aber auch – wie oben gesehen – vorkommen, dass das Ergebnis von der Reihenfolge der Summation abhängt.

Definition 2.56. Sei $(x_n) \subset \mathbb{R}$ (oder \mathbb{C}). Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ heißt absolut konvergent, wenn $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$ konvergent ist.

Bemerkung 2.57 (Konvergenz von nichtnegativen Reihen). Sei $(x_n) \subset [0, \infty)$. Dann ist die zur Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ gehörige Partialsummenfolge (s_n) monoton wachsend. Es gibt also lediglich zwei Möglichkeiten: entweder sie ist beschränkt und konvergiert damit gegen (Satz 2.26)

$$\sup \{s_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \sup \left\{ \sum_{k=1}^n x_k \mid n \in \mathbb{N} \right\},$$

oder sie ist unbeschränkt und divergiert bestimmt gegen $+\infty$. Wir schreiben für den zweiten Fall auch manchmal

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_n = \infty.$$

Entsprechend schreiben wir die absolute Konvergenz häufig als

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| < \infty.$$

Lemma 2.58. Sei $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ eine Reihe. Dann sind äquivalent

- (i) $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ ist absolut konvergent,
- (ii) $\{ \sum_{k \in I} |x_k| \mid I \subset \mathbb{N} \text{ endlich} \}$ ist beschränkt,
- (iii) für jedes $\epsilon > 0$ existiert ein endliches $I \subset \mathbb{N}$ so, dass für jedes endliche $J \subset \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k \in J \setminus I} |x_k| < \epsilon.$$

Beweis. Es gelte (i) also

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| = K \in [0, \infty).$$

Sei $I \subset \mathbb{N}$ endlich und $n = \max I$. Dann gilt (Monotonie)

$$\sum_{k \in I} |x_k| \leq \sum_{k=1}^n |x_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| = K$$

also (ii)

Es gelte nun (ii) also sei

$$K := \sup \left\{ \sum_{k \in I} |x_k| \mid I \subset \mathbb{N} \text{ endlich} \right\} \in [0, \infty).$$

Sei $\epsilon > 0$. Nach der Definition des Supremums existiert ein endliches $I \subset \mathbb{N}$ so, dass

$$\sum_{k \in I} |x_k| > K - \epsilon.$$

Dann gilt für jedes endliche $J \subset \mathbb{N}$

$$K - \epsilon < \sum_{k \in I} |x_k| \leq \sum_{k \in I \cup J} |x_k| \leq K$$

also

$$\sum_{k \in J \setminus I} |x_k| = \sum_{k \in I \cup J} |x_k| - \sum_{k \in I} |x_k| < \epsilon.$$

Schließlich gelte (iii). Es sei $I \subset \mathbb{N}$ endlich so, dass für alle endlichen $J \subset \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k \in J \setminus I} |x_k| < 1.$$

Dann ist für jedes endliche $J \subset \mathbb{N}$

$$\sum_{k \in J} |x_k| \leq \sum_{k \in J \setminus I} |x_k| + \sum_{k \in I} |x_k| < \sum_{k \in I} |x_k| + 1.$$

Damit ist die Partialsummenfolge

$$\sum_{k=1}^n |a_k|$$

beschränkt und, da sie auch monoton ist, konvergent. □

Satz 2.59. *Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent und der Grenzwert ändert sich nicht bei Umordnungen.*

Beweis. Sei $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ absolut konvergent und $\epsilon > 0$. Nach dem obigen Lemma existiert ein endliches $I \subset \mathbb{N}$ so, dass für jedes endliche $J \subset \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k \in J \setminus I} |x_k| < \epsilon.$$

Setze $N = \max I$ und seien $n \geq m \geq N$. Für die Partialsummenfolge

$$s_n = \sum_{k=1}^n x_k$$

gilt dann

$$|s_n - s_m| \leq \sum_{k=m+1}^n |x_k| \leq \sum_{k \in \{1, \dots, n\} \setminus I} |x_k| < \epsilon.$$

Damit ist die Folge der Partialsummen eine Cauchy-Folge und somit konvergent.

Sei nun $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung. Aus Bedingung (ii) ist ersichtlich, dass dann auch die umgeordnete Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x_{\varphi(k)}$ absolut konvergent und nach dem eben gezeigten konvergent ist. Sei $\epsilon > 0$ und sei $I \subset \mathbb{N}$ endlich so, dass für jedes endliche $J \subset \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k \in J \setminus I} |x_k| < \frac{\epsilon}{2}$$

Wähle $N \in \mathbb{N}$ so, dass

$$I \subset \{\varphi(1), \varphi(2), \dots, \varphi(N)\} \cap \{1, \dots, N\}.$$

Das ist möglich, da φ surjektiv ist. Dann gilt für $n \geq N$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^n x_k - \sum_{k=1}^n x_{\varphi(k)} \right| &= \left| \sum_{k \in \{1, \dots, n\} \setminus I} x_k - \sum_{k \in \{\varphi(1), \dots, \varphi(n)\} \setminus I} x_k \right| \\ &\leq \sum_{k \in \{1, \dots, n\} \setminus I} |x_k| + \sum_{k \in \{\varphi(1), \dots, \varphi(n)\} \setminus I} |x_k| < \epsilon. \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n x_k - \sum_{k=1}^n x_{\varphi(k)} \right) = 0$$

gilt, also beide Grenzwerte übereinstimmen. □

Satz 2.60. Sei $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ eine konvergente Reihe. Dann gilt

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} x_k \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|.$$

Beweis. Übung. □

Satz 2.61 (Majoranten-/Minorantenkriterium). Sei $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ eine Reihe. Die Reihe konvergiert absolut, falls es eine konvergente Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ mit $|x_k| \leq y_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ – eine sogenannte Majorante – gibt. Gibt es eine divergente Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ mit $0 \leq z_k \leq x_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ – eine sogenannte Minorante – so divergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$.

Bemerkung 2.62. Konvergenz und Divergenz einer Reihe hängen nicht von endlich vielen ihrer Terme ab. Es ist also ausreichend, wenn die geforderten Ungleichungen für fast alle $k \in \mathbb{N}$ gelten.

Korollar 2.63 (Quotientenkriterium). Sei (x_n) eine Folge. Gibt es ein $q \in (0, 1)$ so, dass für fast alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| \leq q,$$

so konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ absolut, gilt für fast alle $k \in \mathbb{N}$

$$\left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| \geq 1,$$

so divergiert sie.

Beweis. Es sei $q \in (0, 1)$ und es gelte für fast alle $k \in \mathbb{N}$

$$\left| \frac{x_{k+1}}{x_k} \right| \leq q,$$

das heißt für $k \geq N$ für ein $N \in \mathbb{N}$. Insbesondere muss also $|x_k| \neq 0$ für solche k gelten. Dann folgt mittels eines einfachen Induktionsbeweises

$$|x_{N+1}| \leq |x_N|q, |x_{N+2}| \leq |x_N|q^2, \dots, |x_{N+n}| \leq |x_N|q^n,$$

und damit

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| = \sum_{k=1}^N |x_k| + \sum_{k=N+1}^{\infty} |x_N|q^{k-N} < \infty.$$

Dabei haben wir benutzt, dass die oben auftretende geometrische Reihe konvergent ist.

Falls andererseits für fast alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left| \frac{x_{k+1}}{x_k} \right| \geq 1,$$

so folgt, analog wie oben für ein hinreichend großes $N \in \mathbb{N}$ und für alle $n \in \mathbb{N}$

$$|x_{N+n}| \geq |x_N|.$$

Die Folge (x_n) ist also keine Nullfolge woraus die Divergenz der Reihe folgt. \square

Korollar 2.64 (Wurzelkriterium). Sei (x_n) eine Folge. Gibt es ein $q \in (0, 1)$ so, dass für fast alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sqrt[n]{|x_n|} \leq q$$

dann ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ absolut konvergent. Gilt für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$

$$\sqrt[n]{|x_n|} \geq 1,$$

dann ist die Reihe divergent.

Beweis. Übung. □

Bemerkung 2.65. (i) Die Voraussetzungen für die obigen Kriterien sind insbesondere erfüllt, falls für Konvergenz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| < 1$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x_n|} < 1$$

oder für Divergenz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| > 1$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x_n|} > 1$$

gilt.

(ii) Es gibt Reihen, für die beide Kriterien keine Konvergenzaussage treffen, z. B. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^r}$:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left(\frac{n}{n+1} \right)^r \rightarrow 1$$
$$\sqrt[n]{x_n} = \frac{1}{\sqrt[n]{n^r}} \rightarrow 1.$$

Dieses Beispiel (für $r = 1$) zeigt auch, dass < 1 für Konvergenz nicht ausreichend ist. Es muss $< q$ für ein $q < 1$ gefordert werden.

Beispiel 2.66. Sei $z \in \mathbb{C}$. Dann ist die folgende Reihe konvergent

$$\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!},$$

denn

$$\frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{|z|^n} = \frac{|z|}{n+1} \rightarrow 0.$$

Die so definierte Funktion $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ nennen wir Exponentialfunktion.

Bemerkung 2.67. Um die entscheidende Eigenschaft der Exponentialfunktion nachweisen zu können, benötigen wir einige Fakten über Binomialkoeffizienten, die wir hier kurz zusammenstellen, sie jedoch aus Zeitgründen nicht beweisen. Wir definieren rekursiv für $n, k \in \mathbb{N}_0$:

$$\binom{n}{0} = 1$$
$$\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} \frac{n-k}{k+1}.$$

Man zeigt nun durch mehr oder weniger gradlinige Induktionsbeweise nacheinander die folgenden Eigenschaften:

(i) $\binom{n}{k} = 0$ falls $k > n$,

(ii) falls $k \leq n$ gilt

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

(iii)

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k},$$

(iv) für $x, y \in \mathbb{C}$ gilt

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Satz 2.68. *Es gilt für alle $u, v \in \mathbb{C}$*

$$\exp(u+v) = \exp(u) \exp(v).$$

Beweisskizze. Als Vorbetrachtung wollen wir alle Zahlen im folgenden Schema aufsummieren

$$\begin{array}{cccccc} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} & \dots & x_{1,m} & \dots \\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} & \dots & x_{2,m} & \dots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ x_{n,1} & x_{n,2} & x_{n,3} & \dots & x_{n,m} & \dots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots \end{array}$$

Es gibt dazu verschiedene Möglichkeiten, z. B. kann man zuerst entlang der Zeilen summieren und anschließend diese aufsummieren

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} x_{n,m}$$

oder zunächst entlang der Diagonalen (Summe der Indizes ist konstant) summieren und anschließend diese Zwischensummen aufsummieren

$$\sum_{l=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{l-1} x_{k,l-k}.$$

Im Allgemeinen werden diese Summen, falls sie überhaupt konvergieren, verschieden sein. Falls die Zahlen jedoch absolut summierbar sind, falls also

$$\left\{ \sum_{(k,l) \in I} |x_{k,l}| \mid I \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N} \text{ endlich} \right\}$$

beschränkt ist, dann führen alle Summationsmethoden zum selben Ergebnis (Großer Umordnungssatz).

Wir wenden dieses Ergebnis nun auf

$$x_{k,l} = \frac{u^k v^l}{k!l!} \quad k, l \in \mathbb{N}_0$$

an. Für jedes endliche $I \subset \mathbb{N}_0^2$ gibt es $N, M \in \mathbb{N}$ so, dass

$$I \subset \{0, 1, \dots, N\} \times \{0, 1, \dots, M\}$$

und es gilt

$$\begin{aligned} \sum_{(k,l) \in I} |x_{k,l}| &\leq \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^M \frac{|u|^k |v|^l}{k!l!} = \left(\sum_{k=1}^N \frac{|u|^k}{k!} \right) \left(\sum_{l=1}^M \frac{|v|^l}{l!} \right) \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|u|^k}{k!} \right) \left(\sum_{l=1}^{\infty} \frac{|v|^l}{l!} \right) = \exp(|u|) \exp(|v|) < \infty. \end{aligned}$$

Damit haben wir die absolute Summierbarkeit gezeigt.

Wir berechnen nun für ein $l \in \mathbb{N}_0$ die Diagonalsumme

$$\sum_{k=0}^l x_{k,l-k} = \sum_{k=0}^l \frac{u^k v^{l-k}}{k!(l-k)!} = \frac{1}{l!} \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} u^k v^{l-k} = \frac{(u+v)^l}{l!}.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \exp(u) \exp(v) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!} \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{v^m}{m!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{u^n v^m}{n!m!} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^l \frac{u^k v^{l-k}}{k!(l-k)!} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(u+v)^l}{l!} = \exp(u+v). \quad \square \end{aligned}$$

Bemerkung 2.69. Die Zahl $e = \exp(1)$ heißt Eulersche Zahl. Zunächst gilt für jedes $x \in \mathbb{C}$

$$1 = \exp(0) = \exp(x) \exp(-x)$$

also $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} = \exp(x)^{-1}$. Weiter folgt

$$\exp(nx) = \exp(x + x + \dots + x) = \exp(x)^n.$$

Wir setzen $x = \frac{y}{n}$, ziehen die n -te Wurzel (wir zeigen gleich noch dass $\exp(x) > 0$) und erhalten

$$\exp\left(\frac{y}{n}\right) = \exp(y)^{\frac{1}{n}}.$$

Zusammen erhalten wir, dass für rationale Zahlen $q \in \mathbb{Q}$ gilt

$$\exp(q) = e^q.$$

Aus diesem Grund schreiben wir häufig statt $\exp(x)$ auch e^x obwohl letzterer Ausdruck für irrationale und echt komplexe Zahlen keinen Sinn ergibt.

Satz 2.70. *Es gelten die folgenden Eigenschaften für die reelle Exponentialfunktion \exp*

(i)

$$x < y \implies \exp(x) < \exp(y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$, die Exponentialfunktion ist also streng monoton wachsend,

(ii) $\exp(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$,

(iii) $\exp(x) \geq 1 + x$ für alle $x \in \mathbb{R}$,

(iv)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^d}{\exp(n)} = 0$$

für jedes $d \in \mathbb{N}$, die Exponentialfunktion wächst also schneller als jede Potenz von n .

Beweis. (i) Übung.

(ii) Für nichtnegative $x \in \mathbb{R}$ folgt $\exp(x) > 0$ direkt aus der Definition. Für negative x ist

$$\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)} > 0.$$

(iii) Die Ungleichung $\exp(x) > 1 + x$ folgt für positive x direkt aus der Definition. Für negative x ist die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

alternierend und $\exp(x) > 1 + x$ folgt aus Satz 2.52 (Wie?).

(iv) Sei $d \in \mathbb{N}$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$0 < \frac{n^d}{\exp n} < \frac{n^d}{\sum_{k=1}^{d+1} \frac{n^k}{k!}} \rightarrow 0. \quad \square$$

Definition 2.71. Wir definieren Funktionen $\sin, \cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\begin{aligned} \sin(x) &:= \operatorname{Im} \exp(ix) \\ \cos(x) &:= \operatorname{Re} \exp(ix). \end{aligned}$$

Bemerkung 2.72. (i) Es gilt automatisch die Eulersche Formel $\exp(ix) = \cos(x) + i \sin(x)$.

(ii) Direkt aus der Definition der Exponentialfunktion folgt $\overline{\exp(z)} = \exp(\bar{z})$ für jedes $z \in \mathbb{C}$. Insbesondere gilt also für jedes $x \in \mathbb{R}$

$$|\exp(ix)|^2 = \exp(ix) \overline{\exp(ix)} = \exp(ix) \exp(-ix) = 1,$$

die Zahlen $\exp(ix)$ liegen also alle auf dem Einheitskreis um den Koordinatenursprung der komplexen Zahleneben.

Weiterhin folgt unmittelbar die wichtige Gleichung

$$|\exp(ix)|^2 = \cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1.$$

Auch die Symmetrieeigenschaften der Trigonometrischen Funktionen lassen sich so ableiten:

$$\cos(-x) + i \sin(-x) = \exp(-ix) = \exp(\overline{ix}) = \overline{\exp(ix)} = \cos(x) - i \sin(x).$$

Durch Vergleich von Real- und Imaginärteil folgt

$$\cos(-x) = \cos(x) \text{ und } \sin(-x) = -\sin(x).$$

(iii) An der Reihendarstellung

$$\exp(ix) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!}$$

können wir erkennen, dass die aufsummierten Terme im Wechsel reell und rein imaginär sind. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \sin(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ \cos(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}. \end{aligned}$$

Beide Reihendarstellungen (sowie die Reihendarstellung für $\exp(x)$ für $x < 0$) erfüllen (ab einem gewissen Index) die Voraussetzungen des Leibnizkriteriums.

- (iv) Die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion eignet sich gut, um viele Gleichungen über trigonometrische Funktionen zu beweisen. So gilt zum Beispiel für alle $x \in \mathbb{R}$ einerseits

$$\exp(i2x) = \cos(2x) + i \sin(2x)$$

und andererseits

$$\exp(i2x) = \exp(ix)^2 = (\cos(x) + i \sin(x))^2 = \cos(x)^2 - \sin(x)^2 + 2i \sin(x) \cos(x).$$

Vergleichen wir wieder Real- und Imaginärteil, so folgt

$$\begin{aligned}\cos(2x) &= \cos(x)^2 - \sin(x)^2 \\ \sin(2x) &= 2 \sin(x) \cos(x).\end{aligned}$$

- (v) Wir werden später beweisen, dass die Cosinusfunktion genau eine Nullstelle im Intervall $[0, 2]$ besitzt. Wir definieren nun π als diejenige Zahl in $[0, 4]$, die

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

erfüllt. Dann muss

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pm 1$$

gelten (tatsächlich $+1$ aus der Reihendarstellung).

Zusammen ergibt sich

$$\exp\left(i\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = i$$

und somit $\exp(2\pi i) = 1$.

Damit erhalten wir nun die $2\pi i$ Periodizität der Exponentialfunktion:

$$\exp(z + 2\pi i) = \exp(z) \exp(2\pi i) = \exp(z).$$

Daraus ergibt sich auch, dass \sin und \cos 2π -periodisch sind.

Satz 2.73. Für jedes $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{z}{n}\right)^{-n} = \exp(z).$$

Ohne Beweis.

3 Lineare Algebra

3.1 Vektorräume

Im folgenden Kapitel bezeichnet \mathbb{K} stets einen der Körper \mathbb{R} oder \mathbb{C} . Die meisten Aussagen sind auch für allgemeinere Körper gültig, was für uns jedoch nicht unmittelbar von Belang ist.

Definition 3.1. Ein Vektorraum über dem Körper \mathbb{K} ist eine Menge V mit den Operationen Addition

$$\begin{aligned} V \times V &\rightarrow V \\ (x, y) &\mapsto x + y \end{aligned}$$

und skalare Multiplikation

$$\begin{aligned} \mathbb{K} \times V &\rightarrow V \\ (\alpha, x) &\mapsto \alpha \cdot x = \alpha x. \end{aligned}$$

Dabei sollen für die folgenden Vektorraumaxiome gelten

(i) es existiert ein neutrales Element $0 \in V$ so, dass für alle $x \in V$

$$x + 0 = x,$$

(ii) für jedes $x \in V$ existiert ein inverses Element $-x \in V$ so, dass

$$x + (-x) = 0,$$

(iii) für alle $x, y \in V$ gilt

$$x + y = y + x,$$

(iv) für alle $x, y, z \in V$ gilt

$$(x + y) + z = x + (y + z),$$

(v) für alle $\alpha \in \mathbb{K}$ und $x, y \in V$ gilt

$$\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y,$$

(vi) für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ und $x \in V$ gilt

$$(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x,$$

(vii) für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ und $x \in V$ gilt

$$(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x),$$

(viii) für alle $x \in V$ gilt

$$1 \cdot x = x.$$

Die Elemente eines Vektorraums bezeichnen wir als Vektoren, die Elemente von \mathbb{K} in diesem Kontext als Skalare.

Bemerkung 3.2. Im Kontext von Vektorräumen gibt es stets zwei Additionsoperationen, die im Allgemeinen beide mit dem Symbol $+$ bezeichnet werden. Eine ist eine Abbildung von Vektoren $V \times V \rightarrow V$, die andere eine von Skalaren (Zahlen) $\mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$. Im Distributivgesetz

$$(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$$

taucht links die Addition von Skalaren und rechts die von Vektoren auf.

Analog gibt es auf \mathbb{K} eine Multiplikation $\mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ und die skalare Multiplikation $\mathbb{K} \times V \rightarrow V$.

Es gibt auch zwei neutrale Elemente, die üblicherweise beide mit 0 bezeichnet werden. Eines in K und ein weiteres in V .

Diese Mehrdeutigkeiten in der Notation können wir uns erlauben, da stets aus dem Kontext klar wird, welche Operation gemeint ist. Wir werden zur besseren Unterscheidung versuchen, Skalare stets mit griechischen und Vektoren stets mit lateinischen Buchstaben zu bezeichnen.

Beispiel 3.3. (i) Der Körper $\mathbb{K} = \mathbb{K}^1$ selbst ist mit den Körperoperationen ein Vektorraum.

(ii) Betrachte nun die Menge $V = \mathbb{K}^2$ und definiere für $\alpha \in \mathbb{K}$ und $(\chi_1, \chi_2), (\eta_1, \eta_2) \in V$

$$\begin{aligned}(\chi_1, \chi_2) + (\eta_1, \eta_2) &:= (\chi_1 + \eta_1, \chi_2 + \eta_2) \\ \alpha \cdot (\chi_1, \chi_2) &:= (\alpha\chi_1, \alpha\chi_2).\end{aligned}$$

Diese Operationen erfüllen alle oben genannten Axiome. Das neutrale Element ist $(0, 0)$ und das Inverse zu (χ_1, χ_2) ist $(-\chi_1, -\chi_2)$.

Analog können wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ auf der Menge \mathbb{K}^n eine Vektorraumstruktur definieren. Ob wir die Elemente dieses Vektorraums als Zeilen oder Spalten schreiben spielt hier noch keine Rolle. Wir werden sie aus Platzgründen meist als Spalten schreiben.

(iii) Wir können auf der Menge aller \mathbb{K} -wertigen Folgen

$$V = \{(\chi_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \alpha_n \in \mathbb{K} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}$$

mittels der Operationen

$$\begin{aligned}(\chi_n)_{n \in \mathbb{N}} + (\eta_n)_{n \in \mathbb{N}} &= (\chi_n + \eta_n)_{n \in \mathbb{N}} \\ \alpha \cdot (\chi_n)_{n \in \mathbb{N}} &= (\alpha\chi_n)_{n \in \mathbb{N}}\end{aligned}$$

eine Vektorraumstruktur definieren.

- (iv) Sei M eine Menge, dann ist die Menge aller \mathbb{K} -wertigen Funktionen auf M ein Vektorraum

$$\{f \mid f : M \rightarrow \mathbb{K}\}$$

wenn wir die Addition und skalare Multiplikation wie folgt definieren (für $x \in M$)

$$\begin{aligned}(f + g)(x) &:= f(x) + g(x) \\ (\alpha f)(x) &:= \alpha f(x).\end{aligned}$$

Das neutrale Element ist dabei die Funktion $x \mapsto 0$ und das Inverse zur Funktion f ist $x \mapsto -f(x)$. Das vorhergehende Beispiel ist ein Spezialfall von diesem Raum ($M = \mathbb{N}$).

Definition 3.4. Sei V ein Vektorraum und $x, x_1, \dots, x_n \in V$ und $M \subset V$.

- (i) Wir sagen dass x eine Linearkombination von x_1, \dots, x_n ist, wenn es Koeffizienten $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ gibt so, dass

$$x = \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k.$$

- (ii) Die Menge aller Linearkombinationen die sich aus Elementen von M bilden lässt, bezeichnen wir als den Spann oder die lineare Hülle von M :

$$\text{lin } M := \left\{ \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k \mid n \in \mathbb{N}, x_1, \dots, x_n \in M, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K} \right\}.$$

- (iii) Wir sagen M ist (oder die Elemente von M sind) linear unabhängig, wenn für alle $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ und $x_1, \dots, x_n \in M$ gilt

$$0 = \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0.$$

Andernfalls heißen die Elemente von M linear abhängig.

- (iv) Die Teilmenge M heißt Erzeugendensystem, wenn $\text{lin } M = V$ gilt.
 (v) Die Teilmenge M heißt Basis von V falls sie ein linear unabhängiges Erzeugendensystem ist.
 (vi) Der Raum V heißt endlichdimensional, falls es ein endliches Erzeugendensystem gibt andernfalls heißt er unendlichdimensional.

Beispiel 3.5. (i) Sei $V = \mathbb{R}^2$. Die Elemente $x = (1, 0)$ und $y = (1, 1)$ sind linear unabhängig, denn aus

$$\alpha x + \beta y = (0, 0) \tag{3.1}$$

folgen die Gleichungen $\alpha + \beta = 0$ und $\beta = 0$, die ausschließlich die Lösung $\alpha = \beta = 0$ haben.

Das Element $(0, 2)$ ist eine Linearkombination von x und y denn

$$(0, 2) = -2(1, 0) + 2(1, 1).$$

Tatsächlich ist $\text{lin}\{x, y\} = \mathbb{R}^2$, jedes Element von V lässt sich also als Linearkombination von x und y schreiben:

$$(\alpha, \beta) = (\alpha - \beta)x + \beta y.$$

Insbesondere ist damit \mathbb{R}^2 endlichdimensional.

(ii) Die Elemente $x = (1, -1, 2)$, $y = (2, -1, 0)$ und $z = (4, -3, 4)$ aus $V = \mathbb{R}^3$ sind linear abhängig da gilt

$$2x + y - z = (0, 0, 0).$$

(iii) Sei

$$V = \{f \mid f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}.$$

Betrachte für $n \in \mathbb{N}_0$ die Funktionen

$$\begin{aligned} f_n : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^n. \end{aligned}$$

Dann sind diese Funktionen linear unabhängig, denn falls

$$0 = \sum_{k=1}^N \alpha_k f_k$$

gilt, also falls

$$0 = \sum_{k=1}^N \alpha_k x^k$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt folgt $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n$. Das gilt daher, dass Polynome vom Grad $n \geq 1$ höchstens n verschiedene Nullstellen haben.

Die lineare Hülle

$$\text{lin} \{f_0, \dots, f_n\}$$

ist dann der Raum aller polynomialen Funktionen vom Grad höchstens n .

Die Funktion $x \mapsto (x-1)^3$ ist eine Linearkombination der f_n denn es gilt für jedes $x \in \mathbb{R}$

$$(x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

Bemerkung 3.6. Uns geht es hier zunächst fast ausschließlich um endlichdimensionale Vektorräume. Das klassische – und in gewissem Sinne einzige – Beispiel für einen endlichdimensionalen Vektorraum ist \mathbb{K}^n .

Später werden auch unendlichdimensionale Vektorräume (meist Funktionenräume) eine wichtige Rolle spielen. So werden in der üblichen Darstellung der Quantenmechanik Hilberträume – spezielle unendlichdimensionale Räume – benutzt.

Für unendlichdimensionale Räume (und bereits für endlichdimensionale Räume mit Dimension > 3) versagt unser geometrisches Vorstellungsvermögen, wir können diese Objekte dennoch untersuchen.

Bemerkung 3.7. Sei V ein Vektorraum, y eine Linearkombination von $y_1, \dots, y_n \in V$ und jedes dieser Elemente sei eine Linearkombination von x_1, \dots, x_m . Es gibt also Skalare $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ und $\beta_{k,l}$ für $(k,l) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\}$ so, dass

$$y = \sum_{k=1}^n \alpha_k y_k$$

und für jedes $k \in \{1, \dots, n\}$

$$y_k = \sum_{l=1}^m \beta_{k,l} x_l.$$

Dann gilt auch

$$y = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m \beta_{k,l} x_l = \sum_{l=1}^m \left(\sum_{k=1}^n \beta_{k,l} \right) x_l$$

also ist y eine Linearkombination von x_1, \dots, x_m . Insbesondere gilt für jedes $M \subset V$

$$\text{lin lin } M = \text{lin } M.$$

Satz 3.8. Sei V ein (endlichdimensionaler) Vektorraum und $x_1, \dots, x_n \in V$. Dann sind äquivalent

(i) x_1, \dots, x_n ist eine Basis von V ,

- (ii) x_1, \dots, x_n ist ein minimales Erzeugendensystem von V , das heißt es ist ein Erzeugendensystem und jede echte Teilmenge ist kein Erzeugendensystem mehr,
- (iii) x_1, \dots, x_n ist ein maximales linear unabhängiges System, das heißt es ist linear unabhängig und für jedes $y \in V$ ist x_1, \dots, x_n, y linear abhängig,
- (iv) für jedes $x \in V$ existieren eindeutig bestimmte Skalare $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ so, dass

$$x = \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k.$$

Beweis. (i) \implies (ii): Sei x_1, \dots, x_n eine Basis von V . Angenommen es gibt ein echt kleineres Erzeugendensystem, also (gegebenenfalls unnummerieren) x_2, \dots, x_n ist auch noch ein Erzeugendensystem also $\text{lin}\{x_2, \dots, x_n\} = V$. Dann existieren insbesondere $\alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ so, dass

$$x_1 = \sum_{k=2}^n \alpha_k x_k.$$

Damit sind aber die Elemente x_1, \dots, x_n linear abhängig, was jedoch nicht möglich ist, da sie eine Basis sind.

(ii) \implies (iii): Sei x_1, \dots, x_n ein minimales Erzeugendensystem. Seien $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ so, das

$$0 = \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k.$$

Angenommen mindestens ein Koeffizient sei ungleich 0 (durch unnummerieren können wir annehmen $\alpha_1 \neq 0$). Dann gilt

$$x_1 = \sum_{k=2}^n -\frac{\alpha_k}{\alpha_1} x_k.$$

Da x_1, \dots, x_n ein Erzeugendensystem ist, existieren für $x \in V$ Koeffizienten β_1, \dots, β_n so, dass

$$x = \sum_{k=1}^n \beta_k x_k = \sum_{k=2}^n -\frac{\alpha_k}{\alpha_1} x_k + \sum_{k=2}^n \beta_k x_k,$$

also ist $x \in \text{lin}\{x_2, \dots, x_n\}$. Da $x \in V$ beliebig war folgt $V = \text{lin}\{x_2, \dots, x_n\}$ was im Widerspruch zur Minimalität des Erzeugendensystems steht. Also war die Annahme, einer der Koeffizienten sei ungleich 0 falsch, es muss also $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots, \alpha_n = 0$ gelten und damit sind x_1, \dots, x_n linear unabhängig. Sei nun $y \in V$. Dann existieren $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ so, dass

$$y = \sum_{k=1}^n \gamma_k x_k$$

also sind x_1, \dots, x_n, y linear abhängig.

(iii) \implies (iv): Sei x_1, \dots, x_n ein maximales linear unabhängiges System und $y \in V$. Dann existieren $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta \in \mathbb{K}$ so, dass

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k + \beta y = 0$$

und mindestens einer der Koeffizienten $\neq 0$ ist. Falls $\beta = 0$ wäre, dann wäre

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k = 0,$$

was jedoch nur für $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ möglich ist, da x_1, \dots, x_n linear unabhängig sind. Es muss also $\beta \neq 0$ gelten und damit

$$y = \sum_{k=1}^n -\frac{\alpha_k}{\beta} x_k.$$

Die Eindeutigkeit der Darstellung von y als Linearkombination von x_1, \dots, x_n sollte als Übung gezeigt werden.

(iv) \implies (i): Nach Voraussetzung kann jedes $x \in V$ als Linearkombination von x_1, \dots, x_n geschrieben werden, also gilt $\text{lin}\{x_1, \dots, x_n\} = V$. Falls

$$0 = \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k$$

gilt, dann folgt aus der Eindeutigkeit der Darstellung $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$, die Elemente sind also linear unabhängig. \square

Korollar 3.9. *Jeder (endlichdimensionale) Vektorraum besitzt eine Basis.*

Beweis. Wir beweisen die Aussage nur für endlichdimensionale Räume. Da V endlichdimensional ist, existiert ein endliches Erzeugendensystem x_1, \dots, x_n . Wir entfernen nun so lange Elemente, bis wir ein minimales Erzeugendensystem erhalten und dieses ist nach dem vorhergehenden Satz eine Basis. \square

Lemma 3.10. *Sei V ein Vektorraum, $x_1, \dots, x_n \in V$ linear unabhängig und $y \in V$. Dann ist x_1, \dots, x_n, y genau dann linear unabhängig, wenn*

$$y \notin \text{lin}\{x_1, \dots, x_n\}.$$

Beweis. Die Richtung \implies ist klar.

Sei andererseits

$$y \notin \text{lin}\{x_1, \dots, x_n\}$$

und

$$0 = \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k + \beta y$$

für Koeffizienten $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta \in \mathbb{K}$. Dann muss $\beta = 0$ gelten – andernfalls könnten wir nach y auflösen. Da die Elemente x_1, \dots, x_n linear unabhängig sind, können wir nun auch $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ schlussfolgern. \square

Satz 3.11 (Basisaustauschsatz). *Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum, x_1, \dots, x_m ein Erzeugendensystem und y_1, \dots, y_n seien linear unabhängig. Dann gilt $m \geq n$. Insbesondere folgt $m = n$ falls beide Systeme Basen sind.*

Beweis. Wir zeigen, dass wir die Elemente y_1, \dots, y_n stückweise durch die x_i ersetzen können, ohne die lineare Unabhängigkeit zu zerstören. Sei dazu $k \in \{0, \dots, \min\{m, n\} - 1\}$ und sei $x_1, \dots, x_k, y_{k+1}, \dots, y_n$ linear unabhängig.

Angenommen es gilt

$$x_{k+1}, \dots, x_m \in \text{lin}\{x_1, \dots, x_k, y_{k+2}, \dots, y_n\}.$$

Dann gilt, da die x_i ein Erzeugendensystem sind

$$y_{k+1} \in \text{lin}\{x_1, \dots, x_m\} \subset \text{lin}\{x_1, \dots, x_k, y_{k+2}, \dots, y_n\}$$

was jedoch im Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit von $x_1, \dots, x_k, y_{k+1}, \dots, y_n$ steht. Es muss also eines der Elemente x_{k+1}, \dots, x_m nicht in $\text{lin}\{x_1, \dots, x_k, y_{k+2}, \dots, y_n\}$ liegen und wir können durch Umnummerieren annehmen $x_{k+1} \notin \text{lin}\{x_1, \dots, x_k, y_{k+2}, \dots, y_n\}$. Das System $x_1, \dots, x_{k+1}, y_{k+2}, \dots, y_m$ ist nun nach dem obigen Lemma linear unabhängig.

Wir können also Schritt für Schritt die y_i durch x_i austauschen solange bis entweder die x_i oder die y_i aufgebraucht sind. Falls $n > m$ wäre, erhielten wir auf diesem Wege ein linear unabhängiges System $x_1, \dots, x_m, y_{m+1}, \dots, y_n$. Das ist jedoch unmöglich, da x_1, \dots, x_m ein Erzeugendensystem ist und daher y_{m+1} als Linearkombination dieser Elemente geschrieben werden kann.

Sind schließlich beide Systeme Basen, so so können wir die Rollen von x_i und y_i vertauschen und erhalten so auch $m \leq n$. \square

Definition 3.12. Sei V ein Vektorraum. Die Anzahl $\dim V$ der Elemente einer Basis von V heißt die Dimension von V .

Beispiel 3.13. (i) In \mathbb{R}^n oder \mathbb{C}^n können wir für $k \in \{1, \dots, n\}$ die Elemente e_k betrachten, deren k -ter Eintrag 1 und alle anderen Einträge 0 sind.

Dann sind e_1, \dots, e_n ein Erzeugendensystem denn es gilt für $\alpha_1, \dots, \alpha_n$

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k.$$

Das Erzeugendensystem ist minimal, denn falls wir e_k entfernen, haben alle Linearkombinationen der verbliebenen Elemente den Eintrag 0 in der k -ten Koordinate.

Die Elemente e_1, \dots, e_n sind also eine Basis die wir die Standardbasis von \mathbb{R} oder \mathbb{C} nennen.

(ii) Der Vektorraum aller Polynome

$$\left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{N}_0, \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_k x^k \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \right\}$$

besitzt die Basis

$$\{x \mapsto x^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}.$$

Diese ist jedoch unendlich, der Vektorraum daher unendlichdimensional.

Korollar 3.14. *In einem Vektorraum der Dimension n hat jedes Erzeugendensystem mindesten n Elemente und jedes linear unabhängige System höchstens n Elemente.*

Korollar 3.15 (Basisergänzungssatz). *Sei V ein (endlichdimensionaler) Vektorraum, x_1, \dots, x_n linear unabhängig und $M \subset V$ ein Erzeugendensystem. Dann existieren $y_{n+1}, \dots, y_{n+m} \in M$ so, dass $x_1, \dots, x_n, y_{n+1}, \dots, y_{n+m}$ eine Basis für V ist (der Fall $m = 0$ ist hier zugelassen).*

Beweis. Entweder es gilt

$$M \subset \text{lin} \{x_1, \dots, x_n\}$$

und damit

$$V = \text{lin} M \subset \text{lin} \{x_1, \dots, x_n\}.$$

Dann ist x_1, \dots, x_n bereits ein Erzeugendensystem und es ist nichts zu zeigen.

Oder es existiert $y_{n+1} \in M \setminus \text{lin} \{x_1, \dots, x_n\}$. Dann ist x_1, \dots, x_n, y_{n+1} linear unabhängig (Lemma 3.10). Wir können auf diese Weise schrittweise und linear unabhängige Elemente aus M zu x_1, \dots, x_n hinzufügen. Da jedes linear unabhängige System höchstens $\dim V$ Elemente enthalten kann, muss dieser Prozess irgendwann mit einem Erzeugendensystem $x_1, \dots, x_n, y_{n+1}, \dots, y_{n+m}$ beendet sein. \square

Definition 3.16 (Untervektorraum). Sei V ein Vektorraum. Eine nichtleere Teilmenge $W \subset V$ heißt Untervektorraum wenn für alle $x, y \in W$ und alle $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt

$$x + \alpha y \in W.$$

Beispiel 3.17. Die Menge

$$W = \{(\chi, \chi) \in \mathbb{R}^2 \mid \chi \in \mathbb{R}\}$$

ist ein Untervektorraum von \mathbb{R}^2 , denn für $\alpha, \chi, \eta \in \mathbb{R}$ gilt

$$(\chi, \chi) + \alpha(\eta, \eta) = (\chi + \alpha\eta, \chi + \alpha\eta) \in W.$$

Der Einheitskreis

$$A = \{(\chi, \eta) \in \mathbb{R}^2 \mid \chi^2 + \eta^2 = 1\}$$

ist kein Untervektorraum denn es gilt $(1, 0), (0, 1) \in A$ aber

$$(1, 0) + (0, 1) = (1, 1) \notin A.$$

Bemerkung 3.18. (i) Jeder Untervektorraum $W \subset V$ enthält das neutrale Element $0 = 0 + 0 \cdot x$ und zu jedem $x \in W$ auch das Inverse $-x = 0 + (-1) \cdot x$.

(ii) Geometrisch betrachtet sind Untervektorräume von \mathbb{R}^n genau die Punkte, Geraden, Ebenen oder Hyperebenen die den Koordinatenursprung enthalten.

(iii) Ist W ein Untervektorraum von V und $x_1, \dots, x_n \in W$ und $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ dann gilt

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k \in W.$$

Insbesondere folgt aus $M \subset W$ schon $\text{lin } M \subset W$.

(iv) Eine Menge $M \subset V$ ist ein Untervektorraum, genau dann wenn $\text{lin } M = M$ gilt. Die Richtung „ \implies “ erhalten wir aus dem vorhergehenden Punkt, die andere Richtung folgt, da für $x, y \in M$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt

$$x + \alpha y \in \text{lin } M = M.$$

(v) Sei I eine Indexmenge und W_i ein Untervektorraum von V für jedes $i \in I$. Wir setzen

$$W = \bigcap_{i \in I} W_i.$$

Für beliebiges $x, y \in W$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt dann $x, y \in W_i$ für jedes $i \in I$ und da W_i ein Unterraum ist auch $x + \alpha y \in W_i$ für alle $i \in I$. Daraus folgt $x + \alpha y \in W$.

Wir haben gezeigt, dass Durchschnitte von Untervektorräumen wieder Untervektorräume sind.

- (vi) Vereinigungen von Untervektorräumen sind im Allgemeinen keine Untervektorräume. Betrachte zum Beispiel die x - und y -Achse als Untervektorräume von \mathbb{R}^2

$$W_1 = \{(\alpha, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

$$W_2 = \{(0, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Dann enthält $W_1 \cup W_2$ die Punkte $(1, 0)$ und $(0, 1)$ aber nicht $(1, 1) = (1, 0) + (0, 1)$.

- (vii) Sei $M \subset V$ eine Teilmenge. Dann ist die lineare Hülle $\text{lin } M$ der kleinste Untervektorraum von V der M enthält, genauer gilt

$$\text{lin } M = \bigcap_{W \text{ Untervektorraum von } V, M \subset W} W.$$

Die Inklusion \supset folgt, da $\text{lin } M$ ein Untervektorraum ist der M enthält. Die andere Inklusion folgt aus

$$M \subset \bigcap_{W \text{ Untervektorraum von } V, M \subset W} W$$

mittels (iii) und (v).

3.2 Matrizen und der Gauß-Algorithmus

Wie gehabt bezeichnet \mathbb{K} stets einen der Körper \mathbb{R} oder \mathbb{C} .

Definition 3.19. Seien $a_{ij} \in \mathbb{K}$ für $i \in \{1, \dots, n\}$ und $j \in \{1, \dots, m\}$. Das rechteckige Zahlenschema

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

heißt $n \times m$ -Matrix. Der erste Index i wird als Zeilenindex, der zweite Index j als Spaltenindex bezeichnet. Das Paar (n, m) heißt Dimension der Matrix. Im Fall $n = m$ nennen wir die Matrix quadratisch.

Die Menge aller $n \times m$ -Matrizen bezeichnen wir mit $\mathbb{K}^{n \times m}$. Alternativ zur obigen Darstellung schreiben wir manchmal in Anlehnung an die Notation bei Folgen $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n \times m}$. Wir werden üblicherweise lateinische Großbuchstaben verwenden um Matrizen zu bezeichnen, und die entsprechenden lateinischen Kleinbuchstaben für deren Einträge.

Wir definieren für Matrizen $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathbb{K}^{n \times m}$ und $C = (c_{ij}) \in \mathbb{K}^{m \times l}$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ die folgenden Rechenoperationen:

(i) Addition:

$$A + B := \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1m} + b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & \dots & a_{nm} + b_{nm} \end{pmatrix}$$

(ii) Skalare Multiplikation:

$$\alpha A := \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \dots & \alpha a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{n1} & \dots & \alpha a_{nm} \end{pmatrix}$$

(iii) Matrixmultiplikation:

Wir definieren $AC := A \cdot C$ in $\mathbb{K}^{n \times l}$ durch

$$\begin{pmatrix} \alpha a_{11}c_{11} + a_{12}c_{21} + \dots + a_{1m}c_{m1} & \dots & \alpha a_{11}c_{1l} + a_{12}c_{2l} + \dots + a_{1m}c_{ml} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}c_{11} + a_{n2}c_{21} + \dots + a_{nm}c_{m1} & \dots & a_{n1}c_{1l} + a_{n2}c_{2l} + \dots + a_{nm}c_{ml} \end{pmatrix}$$

also

$$(AC)_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik}c_{kj}.$$

(iv) Transposition:

Die Transponierte von A ist die Matrix A^T in $\mathbb{K}^{m \times n}$, die entsteht indem wir aus den Zeilen von A die Spalten von A^T machen (oder an der Hauptdiagonalen spiegeln), also

$$(A^T)_{ij} = a_{ji}.$$

(v) Adjungierung:

Die Adjungierte A^* von A entsteht durch Transposition und anschließende komplexe Konjugation

$$A^* = \overline{A}^T.$$

Für reelle Matrizen ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) stimmt diese Operation mit der Transposition überein.

Bemerkung 3.20. (i) Matrizen sind eine Möglichkeit, die in den $n \cdot m$ Zahlen enthaltene Information effizient zu verwalten. Die Sinnhaftigkeit und Nützlichkeit der oben definierten Operationen wird sich erst nach und nach erweisen.

(ii) Der Raum $\mathbb{K}^{n \times m}$ (für festes $n, m \in \mathbb{N}$) ist mit den oben definierten Operationen Addition und skalare Multiplikation ein Vektorraum. Tatsächlich unterscheidet er sich von $\mathbb{K}^{n \cdot m}$ lediglich durch die visuelle Anordnung der Elemente, was jedoch auf die mathematischen Gesetzmäßigkeiten keinen Einfluss hat.

(iii) Das Produkt $A \times B$ zweier Matrizen ist nur dann definiert, wenn die Anzahl der Spalten von A mit der Anzahl der Zeilen von B übereinstimmt.

(iv) Sowohl der Raum der $n \times 1$ -Matrizen (Spaltenvektoren) als auch der Raum der $1 \times n$ -Matrizen (Zeilenvektoren) können trivial mit \mathbb{K}^n identifiziert werden. Mit Blick auf die Matrixmultiplikation ist es jedoch entscheidend, ob wir die Vektoren als Zeilen oder Spalten schreiben. Wir legen als Konvention fest, dass wir $v \in \mathbb{R}^n$ stets als Spaltenvektor, also als $n \times 1$ -Matrix interpretieren.

(v) Für die Multiplikation von Matrizen A, B, C, D, E und $\alpha \in \mathbb{K}$ gelten – passende Dimensionen vorausgesetzt – die folgenden Rechenregeln

$$(A + B)C = AC + BC$$

$$A(C + D) = AC + AD$$

$$A(CE) = (AC)E$$

$$\alpha(AC) = (\alpha A)C = A(\alpha C)$$

$$(A + B)^T = A^T + B^T$$

$$(\alpha A)^T = \alpha A^T$$

$$(AC)^T = C^T A^T$$

$$\text{und} \quad (A + B)^* = A^* + B^*$$

$$\text{und} \quad (\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$$

$$\text{und} \quad (AC)^* = C^* A^*.$$

Diese Regeln folgen unmittelbar aus den Definitionen. Wir beweisen hier nur die Assoziativität. Seien also $A \in \mathbb{K}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{K}^{m \times l}$ und $E \in \mathbb{K}^{l \times p}$. Dann ist AC eine $n \times l$ -Matrix und CE eine $m \times p$ -Matrix. Es gilt für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ und jedes $j \in \{1, \dots, p\}$

$$\begin{aligned} ((AC)E)_{ij} &= \sum_{k=1}^l (AC)_{ik} e_{kj} = \sum_{k=1}^l \left(\sum_{\bar{k}=1}^m a_{i\bar{k}} c_{\bar{k}k} \right) e_{kj} = \sum_{k=1}^l \sum_{\bar{k}=1}^m a_{i\bar{k}} c_{\bar{k}k} e_{kj} \\ &= \sum_{\bar{k}=1}^m a_{i\bar{k}} \left(\sum_{k=1}^l c_{\bar{k}k} e_{kj} \right) = \sum_{\bar{k}}^m a_{i\bar{k}} \left(\sum_{k=1}^l (CE)_{\bar{k}k} \right) = (A(CE))_{ij}. \end{aligned}$$

Dabei haben wir lediglich die Definition des Matrixproduktes sowie die Kommutativität, Assoziativität und Distributivität in \mathbb{K} benutzt.

- (vi) Die Matrizenmultiplikation ist nicht kommutativ. Zunächst sind die Produkte AB und BA überhaupt nur beide definiert, wenn A eine $n \times m$ -Matrix und B eine $m \times n$ Matrix ist ($n, m \in \mathbb{N}$). Doch selbst für quadratische Matrizen findet man leicht Gegenbeispiele

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (vii) Für jedes $n, m \in \mathbb{N}$ besitzt $\mathbb{K}^{n \times m}$ genau ein neutrales Element der Addition, die sogenannte Nullmatrix, deren Einträge alle gleich Null sind. Man überzeugt sich leicht, dass Matrixmultiplikation mit der Nullmatrix stets wieder die Nullmatrix (möglicherweise anderer Dimension) ergibt.
- (viii) Wir führen das Symbol

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ein. Die entsprechende Matrix $I = (\delta_{ij}) \in \mathbb{K}^{n \times n}$ heißt $n \times n$ -Einheitsmatrix. Die diversen Einheitsmatrizen sind die neutralen Elemente der Matrixmultiplikation, denn man überzeugt sich leicht, dass – passende Dimensionen vorausgesetzt – für beliebige Matrizen A und B gilt

$$IA = A \text{ und } BI = B.$$

Um die Einheitsmatrizen unterschiedlicher Dimensionen zu unterscheiden, schreiben wir manchmal die Dimension in den Index: I_n .

- (ix) Für Matrizen kann $AB = 0$ gelten, selbst wenn $A \neq 0$ und $B \neq 0$ ist:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt unmittelbar, dass es nicht in jedem Falle multiplikative Inverse zu einer Matrix geben kann, wir können also nicht ohne weiteres „durch A teilen“.

Beispiel 3.21. Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem mit n Gleichungen in m Unbekannten x_1, \dots, x_m :

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1m}x_m &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2m}x_m &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nm}x_m &= b_n. \end{aligned}$$

Fassen wir die Unbekannten sowie die rechte Seite zu Spaltenvektoren $x = (x_1, \dots, x_m)^T$ und $b = (b_1, \dots, b_n)^T$ und die Koeffizienten zu einer Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n \times m}$ zusammen, so können wir das Gleichungssystem nun sehr kompakt als

$$Ax = b$$

schreiben. Damit sind wir der Lösung des Gleichungssystems natürlich noch nicht näher gekommen, wir können aber jetzt allgemeine Eigenschaften deutlich einfacher untersuchen.

Wir bezeichnen das obige Gleichungssystem als homogenes System, falls $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0$ gilt, andernfalls als inhomogenes System.

Satz 3.22. *Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times m}$ eine Matrix und $b \in \mathbb{K}^n$. Die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems $Ax = 0$, also die Menge*

$$\{x \in \mathbb{K}^m \mid Ax = 0\} \subset \mathbb{K}^m$$

ist ein Untervektorraum von \mathbb{K}^m .

Seien x und \tilde{x} Lösungen des inhomogenen Gleichungssystems $Ax = b$, dann ist $x - \tilde{x}$ Lösung des homogenen Systems $Ax = 0$.

Beweis. Zunächst gilt

$$A \cdot 0 = 0,$$

das homogene Gleichungssystem hat also stets eine Lösung. Seien $x, y \in \mathbb{K}^m$ Lösungen des homogenen Systems, es gelte also $Ax = Ay = 0$. Dann gilt für beliebiges $\alpha \in \mathbb{K}$ auch

$$A(x + \alpha y) = Ax + \alpha Ay = 0,$$

also ist auch $x + \alpha y$ Lösung des homogenen Systems.

Falls nun x und \tilde{x} das inhomogene System lösen, falls also gilt $Ax = A\tilde{x} = b$, dann folgt

$$A(x - \tilde{x}) = Ax - A\tilde{x} = b - b = 0$$

und damit ist $x - \tilde{x}$ Lösung des zugehörigen homogenen Systems. □

Bemerkung 3.23. Nach dem obigen Satz können wir also die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems angeben, indem wir eine Basis e_1, \dots, e_k für den Raum

$$\{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = 0\} \subset \mathbb{K}^n$$

sowie eine feste Lösung x_0 des inhomogenen Systems angeben. Dann lässt sich jede Lösung eindeutig in der Form

$$x = x_0 + \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_k e_k$$

schreiben. Geometrisch bedeutet das, die Lösungsmenge ist stets entweder leer, oder eine Hyperebene in \mathbb{R}^n .

Beispiel 3.24. Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dann hat das Gleichungssystem $Ax = b$ keine Lösung, da in der vierten Zeile $0 = 4$ steht.

Betrachten wir nun das Gleichungssystem $Ax = c$ also

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 & & + x_5 & = 3 \\ & x_3 & & = 2 \\ & & x_4 - x_5 & = 1. \end{aligned}$$

Zunächst können wir, wenn wir $x_2 = x_5 = 0$ setzen, unmittelbar eine Lösung des Inhomogenen Systems gewinnen: $x_1 = 3$, $x_3 = 2$ und $x_4 = 1$.

Sei nun (y_1, \dots, y_5) eine Lösung des zugehörigen homogenen Systems, dann gilt offenbar

$$\begin{aligned} y_1 &= -2y_2 - y_5 \\ y_3 &= 0 \\ y_4 &= y_5 \end{aligned}$$

oder

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} y_2 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} y_5.$$

Umgekehrt können wir für y_2 und y_5 beliebige Werte einsetzen und erhalten mittels obiger Formel eine Lösung des homogenen Gleichungssystems. Wir haben also gezeigt

$$\{y \in \mathbb{K}^n \mid Ay = 0\} = \text{lin} \{(-2, 1, 0, 0, 0)^T, (-1, 0, 0, 1, 1)^T\}$$

und kennen damit den vollständigen Lösungsraum des linearen Gleichungssystems $Ax = c$:

$$\{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = c\} = \{(3, 0, 2, 1, 0)^T + (-2, 1, 0, 0, 0)^T \alpha + (-1, 0, 0, 1, 1)^T \beta \mid \alpha, \beta \in \mathbb{K}\}.$$

Definition 3.25. Eine Zeile einer Matrix heißt Nullzeile, wenn sie alle ihre Einträge null sind.

Das am weitesten links stehende, von Null verschiedene Element einer Zeile heißt Zeilenführer.

Wir sagen eine Matrix hat Zeilenstufenform, wenn

- jede Nullzeile unter jeder Nichtnullzeile steht,
- der Zeilenführer jeder Nichtnullzeile rechts vom Zeilenführer jeder darüber liegenden Zeile steht.

Wir sagen die Matrix hat reduzierte Zeilenstufenform, wenn zusätzlich

- jeder Zeilenführer den Wert 1 hat,
- jeder Zeilenführer in seiner Spalte das einzige von Null verschiedene Element ist.

Bemerkung 3.26. Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times m}$ und $b \in \mathbb{K}^n$. Falls A reduzierte Zeilenstufenform hat, können wir für das Gleichungssystem $Ax = y$ ganz analog zum obigen Beispiel den Raum aller Lösungen angeben. Wir lösen dazu alle Gleichungen nach den Zeilenführern auf und behandeln die Unbekannten, die keine Zeilenführer sind als freie Parameter.

Wir geben nun einen Satz von elementaren Operationen an, der es uns erlauben wird beliebige Matrizen auf Zeilenstufenform zu bringen.

Definition 3.27 (Zeilenoperationen). Sei A eine Matrix (oder ein sonstiges rechteckiges Zahlenschema). Die elementaren Zeilenoperationen sind

- (i) Vertauschen der Zeilen i und j ,
- (ii) Addition der Zeile i zur Zeile j ,
- (iii) Multiplikation der Zeile i mit $\lambda \neq 0$,
- (iv) Addition des λ -fachen der Zeile i zur Zeile j .

Bemerkung 3.28. Die letzte Operation lässt sich aus den vorhergehenden zusammensetzen: zuerst multiplizieren wir die i -te Zeile mit λ , addieren dann Zeile i zu Zeile j und multiplizieren schließlich Zeile i mit λ^{-1} .

Satz 3.29 (Gauß-Algorithmus). *Jede Matrix A kann durch endlich viele elementare Zeilenoperationen auf (reduzierte) Zeilenstufenform gebracht werden.*

Beweisskizze. Falls A die Nullmatrix ist, so ist nichts zu zeigen. Andernfalls wende den folgenden Algorithmus an.

- Finde die erste Spalte, die ein von Null verschiedenes Element enthält – ihr Spaltenindex sei j – und vertausche Zeilen so, dass dieses Element in der obersten Zeile steht.
- Bringe durch Addition passender Vielfacher der ersten Zeile, alle weiteren Elemente der j -ten Spalte zum Verschwinden.
- Entferne die erste Zeile und wende das Verfahren auf die verbleibende Matrix an.

Das Verfahren endet offenbar nach endlich vielen Schritten mit einer Matrix in Zeilenstufenform.

Ausgehend von dieser kann man nun mit weiteren Zeilenoperationen auch die reduzierte Zeilenstufenform erreichen (Übung). \square

Beispiel 3.30. Wir illustrieren den Algorithmus am Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 & = & 3 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 & = & 3 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 - 6x_4 & = & -2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 & = & 2. \end{array}$$

Wir bringen zunächst die Einträge der ersten Spalte zum Verschwinden (wir schreiben nur noch die letzten drei Zeilen)

$$\begin{array}{rcl} -3x_3 - 3x_4 & = & -3 \\ 2x_2 + x_3 - 3x_4 & = & 1 \\ -x_2 - x_3 + x_4 & = & -1. \end{array}$$

Vertauschen und Multiplikation liefert:

$$\begin{array}{rcl} x_2 + x_3 - x_4 & = & 1 \\ x_3 + x_4 & = & 1 \\ 2x_2 + x_3 - 3x_4 & = & 1. \end{array}$$

Wir bringen nun die zweite Spalte zum Verschwinden (wir schreiben nur noch die letzten beiden Zeilen):

$$\begin{array}{rcl} x_3 + x_4 & = & 1 \\ -x_3 - x_4 & = & -1. \end{array}$$

Addition beider Zeilen liefert eine Nullzeile und wir erhalten eine Zeilenstufenform:

$$\begin{array}{rcccc} x_1 - & x_2 + & 2x_3 + & 3x_4 = & 3 \\ & x_2 + & x_3 - & x_4 = & 1 \\ & & x_3 + & x_4 = & 1 \\ & & & & 0 = 0. \end{array}$$

Einige weitere Zeilenoperationen ergeben dann die reduzierte Zeilenstufenform:

$$\begin{array}{rcccc} x_1 & & & - x_4 = & 1 \\ & x_2 & & - 2x_4 = & 0 \\ & & x_3 + & x_4 = & 1 \end{array}$$

Daraus können wir nun die allgemeine Lösung ablesen:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1 + \alpha, 2\alpha, 1 - \alpha, \alpha) \quad \alpha \in \mathbb{K}.$$

Analog kann man für jedes lineare Gleichungssystem mittels des Gauß-Algorithmus eine Lösung bestimmen.

Bemerkung 3.31. Die elementaren Zeilenoperationen lassen sich durch elementare Zeilenoperationen rückgängig machen.

Man kann sich überlegen, dass zwei durch elementare Zeilenoperationen auseinander hervorgegangene lineare Gleichungssysteme die selbe Lösungsmenge haben (wir werden weiter unten noch einen Beweis für diese Tatsache geben). Aus diesem Grund führt das obige Verfahren tatsächlich zur Lösung des ursprünglichen Gleichungssystems.

Definition 3.32. Eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ heißt invertierbar, falls es ein multiplikatives Inverses zu A gibt, also eine Matrix $B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ gibt so, dass

$$AB = BA = I.$$

Wir schreiben A^{-1} für das multiplikative Inverse.

Bemerkung 3.33. Man überzeugt sich leicht (Übung), dass das multiplikative Inverse tatsächlich eindeutig bestimmt ist.

Wir wissen bereits, dass es nichttriviale Matrizen gibt, die $A^2 = 0$ erfüllen. Solche Matrizen können nicht invertierbar sein da Multiplikation mit A^{-1} sonst $A = 0$ ergäbe.

Satz 3.34. Seien $A, B, C \in \mathbb{K}^{n \times n}$, B invertierbar und $A = BC$. Dann ist A invertierbar genau dann wenn C invertierbar ist. Insbesondere ist das Produkt invertierbarer Matrizen wieder invertierbar.

Beweis. Übung. □

Bemerkung 3.35. Wir stellen fest, dass Matrizenmultiplikation von links mit einer Matrix A die Spalten der multiplizierten Matrix nicht „vermischt“. Das heißt, um die j -te Spalte des Produktes AB zu bestimmen, müssen wir lediglich die j -te Spalte von B kennen, die anderen Einträge haben keinen Einfluss (wir benötigen andererseits alle Einträge von A). In anderen Worten: wir erhalten das Produkt AB auch, indem wir die Spalten von B einzeln mit A multiplizieren und die Ergebnisse zu einer Matrix zusammensetzen.

Die analoge Eigenschaft gilt auch für die elementaren Zeilenoperationen.

Satz 3.36. *Sei A eine Matrix und \tilde{A} sei aus A durch elementare Zeilenoperationen hervorgegangen. Dann existiert eine invertierbare Matrix T so, dass $\tilde{A} = TA$. Wir sagen, die Zeilenoperationen auf A werden durch Linksmultiplikation mit T realisiert.*

Beweisskizze. Wir betrachten zunächst die einzelnen elementaren Zeilenoperationen. Wir geben hier nun Beispiele für die realisierenden Matrizen an, die sich jedoch einfach verallgemeinern lassen.

Auf Grund der obigen Bemerkung müssen wir lediglich untersuchen, wie die entsprechenden Matrizen auf einen Spaltenvektor wirken. Es gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_3 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

Multiplikation von links mit der angegebenen Matrix vertauscht also die 2. und 4. Zeile. Analog erhalten wir Addition der ersten zur dritten Zeile

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 + x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

sowie Multiplikation der zweiten Zeile mit $\lambda \neq 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \lambda x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

Für die erste Matrix finden wir nun leicht

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

die Matrix ist also ihr eigenes Inverses. Man überlege sich als Übung die Inversen der anderen oben stehenden Matrizen (beziehungsweise die inversen Zeilenoperationen).

Sei nun \tilde{A} aus A durch elementare Zeilenoperationen hervorgegangen, dann finden wir für jede einzelne dieser Operationen wie oben eine realisierende Matrix, es gibt also $T_1, \dots, T_n \in \mathbb{K}^{n \times n}$ invertierbar, so dass

$$\tilde{A} = T_n T_{n-1} \cdots T_1 A.$$

Da das Produkt invertierbarer Matrizen wieder invertierbar ist erfüllt $T = T_n T_{n-1} \cdots T_1$ die Anforderungen des Satzes. \square

Korollar 3.37. *Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times m}$ und $b \in \mathbb{K}^n$ und T invertierbar. Dann stimmen die Lösungsmengen der linearen Gleichungssysteme $Ax = b$ und $TAx = Tb$ überein. Insbesondere haben das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ sowie das auf (reduzierte) Zeilenstufenform gebrachte Gleichungssystem $\tilde{A}x = \tilde{b}$ die selbe Lösungsmenge.*

Beweis. Sei $x \in \mathbb{K}^m$ eine Lösung, es gelte also $Ax = b$, dann folgt offenbar auch $TAx = Tb$. Falls umgekehrt $TAx = Tb$ für ein $x \in \mathbb{K}^m$ gilt, dann liefert Multiplikation mit der Inversen Matrix T^{-1}

$$Ax = T^{-1}TAx = T^{-1}Tb = b.$$

Insbesondere wissen wir, dass wir jede Matrix A mit dem Gauß-Algorithmus auf (reduzierte) Zeilenstufenform bringen können und nach dem obigen Satz können wir diese Zeilenstufenoperationen durch Multiplikation mit einer invertierbaren Matrix T realisieren ($\tilde{A} = TA$). Dabei wenden wir die selben Operationen auf b an es gilt also $\tilde{b} = Tb$ und das auf (reduzierte) Zeilenstufenform gebrachte Gleichungssystem hat die Form $TAx = Tb$. \square

Lemma 3.38. *Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ in Zeilenstufenform ist invertierbar, genau dann wenn alle Diagonaleinträge von 0 verschieden sind (genau dann wenn die letzte Zeile von A keine Nullzeile ist). Eine Matrix in reduzierter Zeilenstufenform ist invertierbar, genau dann wenn sie die Einheitsmatrix ist.*

Beweis. Sei A invertierbar. Angenommen die letzte Zeile von A sei eine Nullzeile. Dann gilt

$$(0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 1) \cdot A = (0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 0).$$

Multiplikation der oberen Gleichung von rechts mit A^{-1} führt jedoch zu einem Widerspruch, also müssen alle Diagonaleinträge von 0 verschieden sein.

Seien andererseits alle Diagonaleinträge von 0 verschieden. Wir können A nun mittels Zeilenstufentransformation – also durch Linksmultiplikation mit einer invertierbaren Matrix T – in die Einheitsmatrix überführen, es gilt also $TA = I$ und damit ist $A = T^{-1}$ invertierbar.

Schließlich ist die Einheitsmatrix die einzige Matrix in reduzierter Zeilenstufenform, deren Diagonaleinträge alle von 0 verschieden sind. \square

Korollar 3.39. Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ eine Matrix. Dann ist A invertierbar genau dann, wenn jede ihrer Zeilenstufenformen von Null verschiedene Einträge auf der Hauptdiagonalen hat, genau dann wenn die reduzierte Zeilenstufenform von A die Einheitsmatrix ist.

Beweis. Wir wissen bereits, dass wir jede Matrix durch elementare Zeilenoperationen auf (reduzierte) Zeilenstufenform bringen können und dass diese Zeilenoperationen durch Linksmultiplikation mit invertierbaren Matrizen realisiert werden. Jede Zeilenstufenform von A hat also die Form TA mit T invertierbar und es gibt S invertierbar so, dass SA reduzierte Zeilenstufenform hat.

Nach Satz 3.34 wissen wir, dass A invertierbar ist genau dann wenn TA invertierbar ist genau dann wenn SA invertierbar ist. \square

Bemerkung 3.40. Das obige Korollar gibt uns eine Möglichkeit zu entscheiden, ob eine Matrix A invertierbar ist. Wir bringen dazu A mittels des Gauß-Algorithmus auf Zeilenstufenform.

Es liefert darüber hinaus auch ein Verfahren zur Berechnung der Inversen. Gegeben seien Matrizen $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ invertierbar und $B \in \mathbb{K}^{n \times m}$. Dann können wir $A^{-1}B$ folgendermaßen berechnen. Wir schreiben A und B nebeneinander bringen die erweiterte Matrix $(A|B)$ mittels des Gauß-Algorithmus auf die Form $(I|\tilde{B})$. Das ist stets möglich, da die reduzierte Zeilenstufenform von A die Einheitsmatrix ist. Wenn T die invertierbare Matrix ist, die die entsprechenden Zeilenoperationen realisiert, dann gilt $TA = I$ und $TB = \tilde{B}$. Daraus folgt dann $T = A^{-1}$ und $\tilde{B} = A^{-1}B$.

Insbesondere erhalten wir falls wir mit $B = I$ starten auf diesem Wege die Inverse.

Beispiel 3.41. Wir wollen die Inverse zu

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

bestimmen (wir wissen aus unserem Kriterium, dass diese Matrix invertierbar ist). Wir wenden dazu den Gauß-Algorithmus auf das Schema

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

an bis im linken Teil die Einheitsmatrix steht.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Nun finden wir im rechten Teil die gesuchte Inverse.

Definition 3.42. Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times m}$ eine Matrix und seien $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{K}^{1 \times m}$ die Zeilen von A . Wir definieren den Zeilenraum von A als den von z_1, \dots, z_n aufgespannten Untervektorraum von $\mathbb{K}^{1 \times m}$ also

$$\text{lin} \{z_1, \dots, z_n\}$$

und nennen die Dimension dieses Raumes den Zeilenrang von A .

Analog definiert man den Spaltenraum und den Spaltenrang von A .

Man kann zeigen – was wir jedoch hier nicht tun werden – dass der Zeilenrang und der Spaltenrang einer Matrix übereinstimmen, daher nennt man beide Zahlen auch den Rang der Matrix A .

Satz 3.43. Sei A eine Matrix in Zeilenstufenform. Dann bilden die von Null verschiedenen Zeilen von A eine Basis für den Zeilenraum.

Beweis. Seien $z_1, \dots, z_k \in \mathbb{K}^{1 \times m}$ ($k \leq n$) die von Null verschiedenen Zeilen von A von oben nach unten. Sei sind ein Erzeugendensystem für den Zeilenraum. Es gelte nun

$$\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \dots + \alpha_n z_n = 0$$

für Koeffizienten $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$. Sei $a_{1j} \neq 0$ der Zeilenführer der Zeile z_1 . Dann gilt (Zeilenstufenform) $a_{2j} = a_{3j} = \dots = a_{nj} = 0$ und die j -te Spalte der obigen Gleichung lautet

$$\alpha_1 a_{1j} = 0$$

woraus $\alpha_1 = 0$ folgt. Induktiv folgt nun mit dem selben Argument, dass auch die anderen Koeffizienten verschwinden müssen, die Zeilen sind also linear unabhängig. \square

Satz 3.44. Die elementaren Zeilenoperationen lassen den Zeilenraum – und damit auch den Rang – unverändert.

Beweis. Es ist unmittelbar ersichtlich, dass das Vertauschen von Zeilen und die Multiplikation einer Zeile mit $\lambda \neq 0$ den Zeilenraum unverändert lassen. Sei nun A eine Matrix mit den Zeilen z_1, \dots, z_n . Addieren wir (ohne Einschränkung der Allgemeinheit) die zweite zur ersten Zeile. Offenbar ist jede Linearkombination von $z_1 + z_2, z_2, z_3, \dots, z_n$ auch eine Linearkombination von z_1, z_2, \dots, z_n . Andererseits gilt $z_1 = (z_1 + z_2) - z_2$ und so lässt sich jede Linearkombination von z_1, z_2, \dots, z_n auch als Linearkombination von $z_1 + z_2, z_2, z_3, \dots, z_n$ schreiben. \square

Bemerkung 3.45. Die obigen Sätze liefern nun Verfahren zur Lösung diverser Probleme der linearen Algebra.

- (i) Um den Rang einer Matrix zu bestimmen, bringen wir sie mit dem Gauß-Algorithmus auf Zeilenstufenform und zählen die von Null verschiedenen Zeilen.

(ii) Seien $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{K}^m$ gegeben. Wir suchen eine Basis für

$$\text{lin} \{v_1, \dots, v_n\}$$

beziehungsweise wollen die Dimension dieses Raumes bestimmen. Wir schreiben dazu v_1, \dots, v_n als Zeilen einer Matrix und bringen diese auf Zeilenstufenform, die von Null verschiedenen Zeilen sind dann eine Basis des Raumes.

(iii) Natürlich lässt sich auf diese Weise auch feststellen ob ein gegebenes System v_1, \dots, v_n linear unabhängig ist. Das ist genau dann der Fall, wenn bei obigem Verfahren keine Nullzeilen entstehen.

3.3 Die Determinante

In diesem Kapitel sei stets $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ und z_1, \dots, z_n die Zeilenvektoren von A . Wir werden unten Abbildungen $\det : \mathbb{K}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{K}$ untersuchen. Für Zeilenvektoren $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{K}^{n \times 1}$ sei A die Matrix, die entsteht wenn wir z_1, \dots, z_n von oben nach unten übereinanderschreiben. Dann definieren wir

$$\det(z_1, z_2, \dots, z_n) := \det(A).$$

Satz und Definition 3.46. Es existiert genau eine Abbildung $\det : \mathbb{K}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{K}$ die die folgenden Eigenschaften hat:

(i) Linearität in der ersten Zeile, das heißt

$$\det(z_1 + \lambda \tilde{z}_1, z_2, \dots, z_n) = \det(z_1, z_2, \dots, z_n) + \lambda \det(\tilde{z}_1, z_2, \dots, z_n),$$

(ii) falls \tilde{A} aus A durch Vertauschen zweier Zeilen entsteht, gilt $\det(A) = -\det(\tilde{A})$ (Antisymmetrie),

(iii) $\det(I) = 1$.

Die Abbildung heißt Determinante und wir schreiben für $\det(A)$ auch

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Beispiel 3.47. Für 2×2 und 3×3 -Matrizen kann man sich überzeugen, dass

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

beziehungsweise

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

solche Abbildungen sind (Übung).

Für höhere Dimensionen wächst die Anzahl der Terme in den Formeln jedoch rasant.

Wir nennen zunächst jede Abbildung, die die obigen Eigenschaften besitzt eine Determinante. Wir werden nun weitere Eigenschaften zeigen, die jede Determinante erfüllt und schließlich zeigen, dass es überhaupt nur eine solche Abbildung geben kann.

Bemerkung 3.48. (i) Jede Determinante ist linear bezüglich jeder Zeile (wenn die anderen Zeilen fest gewählt sind). Man sagt auch sie ist multilinear in den Zeilen von A .

(ii) Falls zwei Zeilen übereinstimmen, dann ist $\det(A) = 0$.

(iii) Falls eine Zeile (oBdA. z_1) eine Linearkombination der anderen ist, falls also

$$z_1 = \alpha_2 z_2 + \dots + \alpha_n z_n$$

für irgendwelche Koeffizienten $\alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ gilt, dann folgt aus der Linearität

$$\det(z_1, \dots, z_n) = \alpha_2 \det(z_2, z_2, z_3, \dots, z_n) + \dots + \alpha_n \det(z_n, z_2, z_3, \dots, z_n) = 0.$$

(iv) Es folgt weiterhin

$$\begin{aligned} \det(z_1 + \lambda z_2, z_2, z_3, \dots, z_n) &= \det(z_1, z_2, z_3, \dots, z_n) + \lambda \det(z_2, z_2, z_3, \dots, z_n) \\ &= \det(z_1, z_2, z_3, \dots, z_n). \end{aligned}$$

Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen ändert den Wert einer Determinanten nicht.

(v) Wir haben in Satz 3.36 festgestellt, dass sich die elementaren Zeilenoperationen durch Linksmultiplikation mit entsprechenden Matrizen darstellen lassen. Wir führen die folgenden Matrizen ein

$T_{i,j}$ vertauscht die Zeilen i und j (Typ (i)),
 $M_i(\lambda)$ multipliziert Zeile i mit $\lambda \neq 0$ (Typ (iii)),
 $L_{i,j}(\lambda)$ addiert das λ -fache der Zeile j zur Zeile i (Typ (iv)).

Dann folgt unmittelbar

$$\begin{aligned} \det(T_{i,j}A) &= -\det(A) \\ \det(L_{i,j}(\lambda)A) &= \det(A) \\ \det(M_i(\lambda)A) &= \lambda \det(A). \end{aligned}$$

Insbesondere gilt $\det(T_{i,j}) = \det(L_{i,j}(\lambda)) = 1$ und $\det(M_i(\lambda))$ und Zeilenoperationen vom Typ (i) und (iv) lassen die Determinante unverändert.

Lemma 3.49. Sei \det eine Determinante, $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ und A habe Zeilenstufenform, dann gilt

$$\det(AB) = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn} \det(B).$$

Beweis. Falls A nicht invertierbar ist, dann ist die letzte Zeile eine Nullzeile. Dann ist auch die letzte Zeile von AB eine Nullzeile und damit $\det(AB) = 0$. Andererseits ist $a_{nn} = 0$ und die Gleichheit ist erfüllt.

Falls A invertierbar ist, sind alle ihre Diagonalelemente von 0 verschieden (Lemma 3.38). Dann ist es möglich, die Matrix durch Typ (iv) Zeilenoperationen auf Diagonalgestalt zu bringen ohne ihre Diagonaleinträge zu ändern. Da

$$\det(L_{i,j}(\lambda)AB) = \det(AB)$$

gilt, bleiben dabei beide Seiten der zu zeigenden Gleichheit unverändert.

Sei A also oBdA. eine Diagonalmatrix. Dann gilt

$$A = M_1(a_{11})M_2(a_{22}) \cdots M_n(a_{nn})I$$

und die geforderte Gleichheit folgt. □

Bemerkung 3.50. Insbesondere erhalten wir für $B = I$ eine Formel zur Berechnung der Determinante einer Matrix in Zeilenstufenform.

Da wir jede Matrix durch elementare Zeilenoperationen vom Typ (i) und (iv) auf Zeilenstufenform bringen können, lässt sich der Wert jeder Determinante auf diese Weise berechnen. Daraus folgt insbesondere, dass es höchstens eine solche Abbildung geben kann. Das heißt, falls eine Determinantenabbildung existiert, dann lässt sich ihr Wert nur mit Hilfe der definierenden Eigenschaften und des Gauß-Algorithmus berechnen.

Tatsächlich ist dieses Verfahren im Allgemeinen deutlich effizienter als die expliziten Formeln zur Berechnung von Determinanten.

Satz 3.51. *Seien $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$, dann gilt $\det(AB) = \det(A) \det(B)$.*

Beweis. Zunächst gilt für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$ und alle $\lambda \neq 0$

$$\begin{aligned} \det(T_{i,j}AB) &= -\det(AB) \text{ und } \det(T_{i,j}A) = -\det(A) \\ \det(L_{i,j}(\lambda)AB) &= \det(AB) \text{ und } \det(L_{i,j}(\lambda)A) = \det(A) \end{aligned}$$

Wir können A durch derartige Zeilenoperationen auf Zeilenstufenform bringen und ändern dabei lediglich das Vorzeichen von $\det(AB)$ beziehungsweise $\det(A)$. Dabei wenden wir die selben Zeilenoperationen auf A beziehungsweise AB an, die Anzahl der Vorzeichenwechsel ist also auf beiden Seiten der Gleichung die selbe.

Wir können also annehmen, dass A Zeilenstufenform hat, dann gilt aber mit 3.49

$$\det(AB) = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn} \det B = \det(A) \det(B). \quad \square$$

Korollar 3.52. *Die Matrix A ist invertierbar, genau dann wenn $\det(A) \neq 0$.*

Beweis. Zeilenoperationen vom Typ (i) und (iv) ändern weder die Determinante (bis auf das Vorzeichen), noch die Invertierbarkeit (Korollar 3.39), wir können also wieder ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass A Zeilenstufenform hat. Dann gilt aber $\det(A) = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn} \neq 0$ genau dann wenn alle Diagonaleinträge ungleich Null sind, was genau dann der Fall ist wenn A invertierbar ist. \square

Satz 3.53. *Es gilt $\det(A) = \det(A^T)$.*

Beweis. Wir berechnen zunächst

$$\det((T_{i,j})^T) = \det(T_{i,j}) = -1 \text{ und } \det((L_{i,j}(\lambda))^T) = \det(L_{i,j}(\lambda)) = 1.$$

Ist T also eine dieser Zeilenoperationsmatrizen, dann gilt

$$\begin{aligned} \det(TA) &= \det(T) \det(A) \\ \det((TA)^T) &= \det(A^T T^T) = \det(A^T) \det(T^T) = \det(T) \det(A^T). \end{aligned}$$

Es gilt also $\det(TA) = \det((TA)^T)$ genau dann, wenn $\det(A) = \det(A^T)$ gilt. Wir können also wieder ohne Beschränkung der Allgemeinheit davon ausgehen, dass A Zeilenstufenform hat.

Falls A nicht invertierbar ist, dann ist die letzte Zeile von A eine Nullzeile (also $\det(A) = 0$) und damit die letzte Spalte von A^T eine Nullspalte. Die Matrix A^T ist nicht in Zeilenstufenform, kann aber durch Typ (i) und (iv) Operationen auf Zeilenstufenform gebracht werden ohne die Determinante (bis auf das Vorzeichen) zu ändern. Da diese Operationen spaltenweise wirken, bleibt dabei die Nullspalte erhalten. Das (n, n) -Element der Zeilenstufenform von A^T verschwindet also und damit gilt auch $\det(A^T) = 0$.

Falls A invertierbar ist, dann kann A durch Typ (i) und (iv) Operationen auf Diagonalgestalt gebracht werden. Mit dem obigen Argument können wir dann annehmen, dass A bereits Diagonalgestalt hat. In diesem Fall gilt aber bereits $A = A^T$. \square

Bemerkung 3.54. Auf Grund dieses Satzes gelten alle Aussagen über Zeilen von Determinanten sinngemäß auch für deren Spalten. In einigen Fällen kann sich dadurch der Rechenaufwand substantiell reduzieren.

Beweisskizze für Satz und Definition 3.46. Wir wissen bereits, dass höchstens eine Determinantenabbildung existieren kann.

Wir beweisen die Existenz per Induktion. Für $n = 1$ überprüft man leicht, dass $(a) \mapsto a$ eine Determinantenabbildung von $\mathbb{K}^{1 \times 1} \rightarrow \mathbb{K}$ ist. Sei nun \det_n die Determinantenabbildung auf $n \times n$ -Matrizen. Für eine Matrix A bezeichne $A_{i,j}$ die Matrix die aus A entsteht, wenn die i -te Zeile und die j -te Spalte gestrichen wird. Wir definieren für $A \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$ (Entwicklung nach der ersten Spalte)

$$\det_{n+1}(A) = a_{11} \det_n(A_{1,1}) - a_{21} \det_n(A_{2,1}) + a_{31} \det_n(A_{3,1}) \pm \cdots \pm a_{n1} \det_n(A_{n,1}).$$

Man überzeugt sich nun, dass diese Abbildung tatsächlich die definierenden Eigenschaften einer Determinante erfüllt. Zunächst hängt bereits jeder einzelne Term der Summe linear von der ersten Zeile von A ab.

Vertauschen wir die Zeilen mit den Nummern i und j ($i < j$). In allen Summanden deren indexwechseln alle Summanden außer dem i -ten und dem j -ten das Vorzeichen.

Schließlich überzeugt man sich leicht, dass $\det_{n+1}(I) = 1$ gilt. \square

Bemerkung 3.55. Auf Grund der bereits bekannten Eigenschaften von Determinanten, erhalten wir aus dem obigen Beweis auch den Entwicklungssatz

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} A_{i,j}.$$

Bemerkung 3.56 (Leibniz-Formel). Sei $n \in \mathbb{N}$. Eine bijektive Abbildung $\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ heißt Permutation. Die Menge aller Permutationen bezeichnen wir mit S_n . Sie enthält $n!$ Elemente. Es gilt die folgende Formel

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}.$$

Den Faktor $\operatorname{sgn} \sigma \in \{-1, 1\}$, das sogenannte Vorzeichen der Permutation σ erhält man dabei wie folgt. Eine Permutation die genau zwei Elemente vertauscht (z. B. $(1, 2, 3, 4) \rightarrow (3, 2, 1, 4)$) bezeichnen wir als elementare Permutation. Man schreibe σ als Hintereinanderausführung von k elementaren Permutationen (man überzeugt sich leicht, dass das stets möglich ist). Dann ist $\operatorname{sgn} \sigma = (-1)^k$. Diese Definition ist tatsächlich wohldefiniert, obwohl die Zerlegung in elementare Permutationen nicht eindeutig ist.

Ohne Beweis.

3.4 Skalarprodukte

Im Folgenden sei V stets ein (endlichdimensionaler) Vektorraum über dem Körper \mathbb{K} (\mathbb{R} oder \mathbb{C}).

Definition 3.57. Ein Skalarprodukt ist eine Abbildung $\langle \cdot | \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ die die folgenden Bedingungen erfüllt für alle $v_1, v_2, w_1, w_2 \in V$ und alle $\lambda, \rho \in \mathbb{K}$.

- (i) $\langle v_1 | w_1 + \rho w_2 \rangle = \langle v_1 | w_1 \rangle + \rho \langle v_1 | w_2 \rangle$ (Linearität im zweiten Argument),
- (ii) $\langle v_1 | w_1 \rangle = \overline{\langle w_1 | v_1 \rangle}$ (konjugierte Symmetrie)
- (iii) $\langle v_1 | v_1 \rangle \geq 0$ (Positivität),
- (iv) $\langle v_1 | v_1 \rangle = 0 \implies v_1 = 0$ (Definitheit).

Wir nennen die Abbildung $v \mapsto \|v\| := \sqrt{\langle v | v \rangle}$ die zum Skalarprodukt gehörige Norm.

Beispiel 3.58. Auf \mathbb{R}^n können wir durch

$$\langle (x_1, \dots, x_n)^T | (y_1, \dots, y_n)^T \rangle := x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

ein Skalarprodukt (man überprüfe, dass die oben geforderten Eigenschaften erfüllt sind). Es gilt dann der n -dimensionale Satz des Pythagoras

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2.$$

Analog ist auf \mathbb{C}^n die Abbildung

$$\langle (u_1, \dots, u_n)^T | (v_1, \dots, v_n)^T \rangle := \overline{u_1} v_1 + \overline{u_2} v_2 + \dots + \overline{u_n} v_n$$

ein Skalarprodukt.

Diese Abbildungen werden als Standardskalarprodukt bezeichnet, die zugehörige Norm heißt euklidische Norm. Wir werden für eine Weile lediglich mit diesen Skalarprodukten und Normen arbeiten, wir können also $\langle \cdot | \cdot \rangle$ beziehungsweise $\|\cdot\|$ als Abkürzungen für die obigen Formeln auffassen. Man sollte jedoch im Hinterkopf behalten, dass es (selbst auf \mathbb{R}^n) andere Skalarprodukte gibt.

Bemerkung 3.59. Mittels des Skalarprodukts und der Norm können wir nun über geometrische Konzepte wie die Länge von Vektoren v ($\|v\|$), den Abstand von v und w ($\|v - w\|$) sowie den Winkel φ zwischen zwei Vektoren v und w gegeben durch

$$\cos(\varphi) = \frac{\langle v | w \rangle}{\|v\| \|w\|}$$

sprechen.

Wir können nun auch einige geometrische Objekte wie zum Beispiel die Kugel

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq r\}$$

oder Sphäre

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = r\}$$

mit Radius $r \in (0, \infty)$ definieren.

Satz 3.60. *Es gelten für alle $v, w \in V$ die Ungleichungen*

$$\begin{aligned} |\langle v|w \rangle| &\leq \|v\| \|w\| && \text{Cauchy-Schwarz-Ungleichung} \\ \|v + w\| &\leq \|v\| + \|w\| && \text{Dreiecksungleichung.} \end{aligned}$$

Beweis. Es gilt für beliebiges $\lambda \in \mathbb{K}$

$$0 \leq \langle v - \lambda w | v - \lambda w \rangle = \langle v | v \rangle - \lambda \langle v | w \rangle - \bar{\lambda} \langle w | v \rangle + |\lambda|^2 \langle w | w \rangle.$$

Falls $\|w\| \neq 0$ ist, so folgt die Cauchy-Schwarz-Ungleichung indem wir $\lambda = \frac{\langle w | v \rangle}{\|w\|^2}$ einsetzen:

$$0 \leq \|v\|^2 - \frac{\langle w | v \rangle \langle v | w \rangle}{\|w\|^2} - \frac{\overline{\langle w | v \rangle} \langle w | v \rangle}{\|w\|^2} + \frac{|\langle w | v \rangle|^2}{\|w\|^4} \|w\|^2 = \|v\|^2 - \frac{|\langle w | v \rangle|^2}{\|w\|^2}.$$

Umstellen und Multiplikation mit $\|w\|^2$ ergibt

$$|\langle w | v \rangle|^2 \leq \|v\|^2 \|w\|^2$$

woraus mit der Monotonie der Wurzel die Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt.

Dann gilt auch

$$\begin{aligned} \|v + w\|^2 &= \langle v + w | v + w \rangle = \|v\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle v | w \rangle + \|w\|^2 \\ &\leq \|v\|^2 + 2 |\langle v | w \rangle| + \|w\|^2 \leq \|v\|^2 + 2 \|v\| \|w\| + \|w\|^2 = (\|v\| + \|w\|)^2 \end{aligned}$$

und wiederum mit der Monotonie der Wurzel folgt die Dreiecksungleichung. \square

Definition 3.61. Wir nennen Vektoren $v, w \in V$ orthogonal, falls sie $\langle v | w \rangle = 0$ erfüllen.

Die Elemente $v_1, \dots, v_n \in V$ bilden ein Orthogonalsystem, wenn sie alle von Null verschieden und paarweise orthogonal zueinander sind, wenn also $\langle v_i | v_j \rangle = 0$ für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$ und $i \neq j$ gilt.

Gilt zusätzlich $\|v_i\| = 1$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$, dann bilden sie ein Orthonormalsystem (ONS).

Spannen die Vektoren den Raum V auf, sprechen wir von einer Orthonormalbasis (ONB).

Satz 3.62. *Sei v_1, \dots, v_n ein Orthogonalsystem, dann sind v_1, \dots, v_n linear unabhängig.*

Beweis. Falls für $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ gilt

$$0 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n,$$

dann erhalten wir, durch skalare Multiplikation mit v_i von links ($i \in \{1, \dots, n\}$)

$$0 = \langle v_i | \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n \rangle = \alpha_1 \langle v_i | v_1 \rangle + \alpha_2 \langle v_i | v_2 \rangle + \dots + \alpha_n \langle v_i | v_n \rangle = \alpha_i \langle v_i | v_i \rangle.$$

Da $v_i \neq 0$ und damit $\langle v_i | v_i \rangle \neq 0$ folgt $\alpha_i = 0$ und da i beliebig war, haben wir die lineare Unabhängigkeit gezeigt. \square

Beispiel 3.63. (i) Die Standardbasis von \mathbb{R}^n (oder \mathbb{C}^n) ist bezüglich des Standardskalarprodukts eine Orthonormalbasis.

(ii) Sei $\varphi \in \mathbb{R}$. Dann bilden die Vektoren

$$v_1 = (\cos(\varphi), \sin(\varphi))^T, v_2 = (-\sin(\varphi), \cos(\varphi))^T$$

eine Orthonormalbasis von \mathbb{R}^2 denn

$$\|v_1\|^2 = \|v_2\|^2 = \cos(\varphi)^2 + \sin(\varphi)^2 = 1 \text{ und } \langle v_1 | v_2 \rangle = 0.$$

Satz 3.64. Sei v_1, \dots, v_n eine Orthonormalbasis von V , dann gilt

$$v = \sum_{i=1}^n \langle v_i | v \rangle v_i.$$

Beweis. Da v_1, \dots, v_n eine Basis ist, existieren für festes $v \in V$ eindeutig bestimmte Koeffizienten $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ so, dass

$$v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i.$$

Dann gilt

$$\langle v_j | v \rangle = \alpha_j \langle v_j | v_j \rangle = \alpha_j$$

für jedes $j \in \{1, \dots, n\}$. □

Satz 3.65. Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ und $\langle \cdot | \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt auf \mathbb{K}^n . Dann gilt $\langle v | Aw \rangle = \langle A^* v | w \rangle$ für alle $v, w \in \mathbb{K}^n$.

Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ gilt also $\langle v | Aw \rangle = \langle A^T v | w \rangle$.

Beweis. Nach Definition des Matrizenproduktes gilt

$$(Aw)_i = \sum_{j=1}^n A_{ij} w_j \text{ und}$$

$$(A^* v)_j = \sum_{i=1}^n \overline{A_{ij}} v_i$$

und damit

$$\begin{aligned} \langle v | Aw \rangle &= \sum_{i=1}^n \overline{v_i} (Aw)_i = \sum_{i=1}^n \overline{v_i} \left(\sum_{j=1}^n A_{ij} w_j \right) = \sum_{i,j=1}^n A_{ij} \overline{v_i} w_j \\ &= \sum_{j=1}^n \overline{\left(\sum_{i=1}^n A_{ij} v_i \right)} w_j = \sum_{j=1}^n \overline{(A^* v)_j} w_j = \langle A^* v | w \rangle. \end{aligned} \quad \square$$

Definition 3.66. Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ heißt orthogonal, wenn

$$A^T A = A A^T = I$$

gilt, wenn also $A^T = A^{-1}$ ist.

Die Menge der orthogonalen Matrizen

$$O(n) := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A^T A = I\}$$

heißt orthogonale Gruppe, die Menge

$$SO(n) := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A^T A = I \wedge \det A = 1\}$$

heißt spezielle orthogonale Gruppe oder Drehgruppe.

Beispiel 3.67. Für $\varphi \in [0, 2\pi]$ ist die Matrix

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

orthogonal. Betrachtet man ihre Wirkung auf die Standardbasis, so erkennt man leicht, dass es sich um eine Drehung um den Winkel φ entgegen des Uhrzeigersinns handelt.

Bemerkung 3.68. (i) Für quadratische Matrizen folgt aus $BA = I$ bereits $AB = I$ (wir werden diese Aussage später beweisen), es reicht also aus eine der Bedingungen $A^T A = I$ beziehungsweise $AA^T = I$ zu überprüfen.

(ii) Für eine orthogonale Matrix gilt

$$1 = \det I = \det(A^T A) = \det(A^T) \det(A) = \det(A)^2$$

und damit $\det(A) \in \{-1, 1\}$.

(iii) Gemäß der Definition der Matrizenmultiplikation ergibt sich die (i, j) -Komponente von $A^T A$ als Standardskalarprodukt der i -ten Zeile von $({}^T A)$ mit der j -ten Spalte von A . Die Zeilen von A^T sind aber gerade die Spalten von A . Seien s_1, \dots, s_n die Spalten von A , dann ist A orthogonal genau dann, wenn gilt

$$\langle s_i \mid s_j \rangle = \delta_{ij}$$

also genau dann, wenn s_1, \dots, s_n eine Orthonormalbasis von \mathbb{R}^n (bezüglich des Standardskalarprodukts) ist. Daher rührt der Name „orthogonale Matrix“.

Analog folgt aus der Bedingung $AA^T = I$, dass eine Matrix orthogonal ist genau dann wenn ihre Zeilen eine Orthonormalbasis von \mathbb{R}^n bilden.

- (iv) Für eine orthogonale Matrix A und beliebiges $x, y \in \mathbb{R}^n$ gelten

$$\begin{aligned}\langle Ax | Ay \rangle &= \langle A^T Ax | y \rangle = \langle x | y \rangle, \\ \|Ax\| &= \sqrt{\langle Ax | Ax \rangle} = \|x\| \text{ und} \\ \|Ax - Ay\| &= \|A(x - y)\| = \|x - y\|.\end{aligned}$$

Geometrisch bedeutet die letzte Aussage, dass die Punkte Ax und Ay den selben Abstand haben wie x und y . Multiplikation von links mit A erhält also die Abstände (und Skalarprodukte und Winkel). Der Nullvektor bleibt ebenfalls erhalten.

Operationen die diese Eigenschaften haben, sind Drehungen um den Koordinatenursprung und Spiegelungen am Koordinatenursprung beziehungsweise an einer Ebene durch den Koordinatenursprung. Die orthogonalen Matrizen sind also eine Möglichkeit um solche Operationen – sogenannte Drehspiegelungen – zu beschreiben. Die spezielle orthogonale Gruppe $SO(n)$ enthält dabei die Elemente, die Drehungen im engeren Sinne sind.

- (v) Wenn $A, B \in O(n)$ orthogonale Matrizen sind, dann gilt

$$(AB)^T(AB) = B^T A^T AB = B^T B = I,$$

also ist auch das Produkt AB eine orthogonale Matrix.

Offensichtlich ist die Einheitsmatrix I eine orthogonale Matrix.

Darüber hinaus gilt für jedes $A \in O(n)$ auch $A^T = A^{-1}$ also

$$(A^{-1})^T A^{-1} = (A^T)^T A^{-1} = AA^{-1} = I.$$

Das heißt A^{-1} ist ebenfalls eine orthogonale Matrix.

Eine solche Struktur, also eine Menge (hier $O(n)$) mit einem Produkt (hier das Matrizenprodukt) einem multiplikativen neutralen Element (hier I) und multiplikativen Inversen zu jedem Element (hier A^{-1}) heißt Gruppe. Gruppen sind die mathematischen Strukturen, die wir zur Beschreibung von Symmetrien verwenden. Wir haben bereits einige weitere Beispiele von Gruppen kennengelernt: die Gruppe $Gl(n)$ der invertierbaren Matrizen, die Drehgruppe $SO(n)$ sowie die Gruppe S_n der Permutationen. Die Menge $K^{n \times n}$ aller Matrizen ist keine Gruppe da einige Elemente kein multiplikatives Inverses besitzen.

- (vi) Analoge Konstruktionen existieren für den komplexen Fall. Eine Matrix U heißt unitär, falls

$$U^*U = UU^* = I$$

gilt. Wir definieren die unitäre Gruppe

$$U(n) := \{U \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid U^*U = I\}$$

sowie die spezielle unitäre Gruppe

$$SU(n) := \{U \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid U^*U = I \wedge \det(U) = 1\}.$$

3.5 Eigenwertprobleme

Definition 3.69. Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ eine Matrix. Dann heißt $\lambda \in \mathbb{K}$ ein Eigenwert von A , wenn es ein $v \in \mathbb{K}^n$, $v \neq 0$ gibt so, dass

$$Av = \lambda v.$$

Jedes solche v heißt Eigenvektor zum Eigenwert λ .

Für einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{K}$ heißt die Menge

$$\{v \in \mathbb{K}^n \mid Av = \lambda v\}$$

der zu λ gehörige Eigenraum.

Beispiel 3.70. Für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

überzeugt man sich leicht, dass gilt

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bemerkung 3.71. Der Eigenraum zum Eigenwert λ ist ein Untervektorraum.

Beweis. Übung. □

Bemerkung 3.72. Wir besitzen bereits die Techniken um das sogenannte Eigenwertproblem, also das Finden von Eigenwerten und Eigenvektoren, zu lösen. Gesucht sind $\lambda \in \mathbb{K}$ und $v \in \mathbb{K}^n$ so, dass die Eigenwertgleichung $Av = \lambda v$ erfüllt ist.

Wir schreiben die Eigenwertgleichung um zu

$$(A - \lambda I)v = 0.$$

Falls die Matrix $A - \lambda I$ invertierbar ist, dann ist die einzige Lösung $v = 0$ und λ ist kein Eigenwert. Wir suchen also die Werte von λ für die $A - \lambda I$ nicht invertierbar ist. Das ist genau dann der Fall, wenn $\det(A - \lambda I) = 0$ ist. Die Funktion $\lambda \mapsto \det(A - \lambda I)$ ist ein Polynom vom Grad n , das charakteristische Polynom. Die Eigenwerte sind also die Nullstellen des charakteristischen Polynoms der Matrix A , welche wir (zumindest numerisch) bestimmen können.

Anschließend können wir für jeden der so bestimmten Eigenwerte das lineare Gleichungssystem $(A - \lambda I)v = 0$ lösen um die Eigenvektoren zu diesem Eigenwert zu bestimmen.

Beispiel 3.73. Wir wollen das Eigenwertproblem für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

lösen. Wir bestimmen dazu zunächst das charakteristische Polynom:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$$

Die Nullstellen des Polynoms sind i sowie $-i$.

Für den Eigenvektor $(x, y)^T \in \mathbb{C}^2$ zum Eigenwert i erhalten wir das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -ix + y &= 0 \\ -x - iy &= 0 \end{aligned}$$

welches durch $x = -i$ und $y = 1$ gelöst wird.

Für den Eigenvektor zum zweiten Eigenwert $-i$ erhalten wir

$$\begin{aligned} ix + y &= 0 \\ -x + iy &= 0 \end{aligned}$$

mit der Lösung $x = 1$ und $y = -i$.

Man beachte, dass die Eigenvektoren nicht eindeutig sind (jedes Vielfache ist ebenfalls Eigenvektor).

Die Lösungen für das Eigenwertproblem hängen davon ab, ob der zugrundeliegende Körper \mathbb{R} oder \mathbb{C} ist. Bei dem obigen Beispiel hat das Eigenwertproblem über \mathbb{R} keine Lösungen (das charakteristische Polynom hat keine Nullstellen).

Beispiel 3.74. Sei D eine Diagonalmatrix mit den Diagonaleinträgen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Um das Eigenwertproblem für D zu lösen stellen wir fest, dass $D - \lambda I$ ebenfalls eine Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen $\lambda_1 - \lambda, \lambda_2 - \lambda, \dots, \lambda_n - \lambda$ ist. Damit erhalten wir das charakteristische Polynom

$$(\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda)$$

dessen Nullstellen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ wir unmittelbar ablesen können.

Die zugehörigen Eigenvektoren sind dann gerade die Elemente der Standardbasis (Warum?).

Definition 3.75. Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ heißt diagonalisierbar, wenn \mathbb{K}^n eine Basis besitzt, die aus Eigenvektoren von A besteht.

Satz 3.76. Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ist diagonalisierbar, wenn es eine Diagonalmatrix D und eine invertierbare Matrix T gibt so, dass

$$D = T^{-1}AT.$$

Beweis. Sei e_1, \dots, e_n die Standardbasis von \mathbb{K}^n .

Es gelte zunächst $T^{-1}AT = D$ und es seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die Diagonaleinträge der Matrix D , dann gilt nach dem obigen Beispiel $De_i = \lambda_i e_i$ für $i \in \{1, \dots, n\}$. Da T invertierbar ist, sind auch die Vektoren Te_1, \dots, Te_n eine Basis für \mathbb{K}^n (Übung) und es gilt für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$

$$A(Te_i) = T(T^{-1}AT)e_i = TDe_i = \lambda_i Te_i.$$

Damit ist Te_i Eigenvektor von A zum Eigenwert λ_i .

Sei andererseits v_1, \dots, v_n eine Basis aus Eigenvektoren zu den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Sei D die Diagonalmatrix mit den Diagonaleinträgen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Wir schreiben die Basisvektoren v_1, \dots, v_n als die Spalten einer Matrix T . Dann gilt offensichtlich $Te_i = v_i$ und

$$ATe_i = T^{-1}Av_i = \lambda_i v_i = \lambda_i Te_i = TDe_i.$$

Es gilt also für $i \in \{1, \dots, n\}$ die Gleichung $(AT - TD)e_i = 0$. Damit sind alle Spalten der Matrix $AT - TD$ Nullspalten und es muss gelten $AT = TD$. Da die Matrix T invertierbar ist (Warum?), folgt daraus $T^{-1}AT = D$. \square

Beispiel 3.77. (i) Wir haben oben bereits das Eigenwertproblem für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

gelöst. Die Transformationsmatrix T ist hier also

$$T = \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Diese Matrix ist invertierbar – mit dem Gauß-Algorithmus bestimmt man die inverse Matrix

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & 1 \\ -i & 1 \end{pmatrix}.$$

Man rechnet nun leicht nach (und wir wissen bereits aus den theoretischen Überlegungen oben) dass gilt

$$D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = T^{-1}AT.$$

(ii) Nicht alle Matrizen sind diagonalisierbar. Man überzeugt sich beispielsweise leicht, dass die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

lediglich den Eigenvektor $(1, 0)^T$ besitzt.

Bemerkung 3.78. Eine Anwendung der Diagonalisierung von Matrizen, ist das Berechnen hoher Potenzen oder allgemeiner Polynome von Matrizen. Man überzeugt sich leicht, dass für Diagonalmatrizen gilt

$$\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)^k = \text{diag}(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_n^k),$$

Potenzen (und Polynome) von Diagonalmatrizen sind also substantiell einfacher zu berechnen als Potenzen beliebiger Matrizen. Aus der Gleichung $T^{-1}AT = D$ folgt für jedes $k \in \mathbb{N}$

$$(T^{-1}AT)^k = T^{-1}A^kT = D^k.$$

Wir können also A^k als TD^kT^{-1} bestimmen.

Satz 3.79. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix, das heißt es gilt $A = A^T$ (beziehungsweise $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine selbstadjungierte Matrix also $A = A^*$) dann besitzt A eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren. Insbesondere ist A diagonalisierbar.

Ohne Beweis.

Bemerkung 3.80. Wir zeigen nur einige Eigenschaften selbstadjungierter (symmetrischer) Matrizen. Zunächst gilt für einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ zum Eigenvektor $v \in \mathbb{C}^n$

$$\lambda \langle v|v \rangle = \langle v|Av \rangle = \langle A^*v|v \rangle = \langle Av|v \rangle = \langle \lambda v|v \rangle = \bar{\lambda} \langle v|v \rangle.$$

Es gilt also $(\lambda - \bar{\lambda}) \langle v|v \rangle = 0$ und da $v \neq 0$ und damit auch $\langle v|v \rangle \neq 0$ folgt $\lambda = \bar{\lambda}$ – der Eigenwert ist also reell.

Seien nun $\lambda, \rho \in \mathbb{R}$ Eigenwerte zu den Eigenvektoren v beziehungsweise w und $\lambda \neq \rho$. Dann gilt

$$\lambda \langle v|w \rangle = \langle v|Aw \rangle = \langle A^*v|w \rangle = \langle Av|w \rangle = \langle \rho v|w \rangle = \rho \langle v|w \rangle.$$

Daraus folgt $(\lambda - \rho) \langle v|w \rangle = 0$ also $\langle v|w \rangle = 0$ – die Eigenvektoren sind orthogonal.

Die hier gezeigten Aussagen gelten natürlich insbesondere auch für den reellen Fall, also für symmetrische Matrizen.

4 Analysis Teil II

4.1 Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit

Wir werden im Folgenden häufig mit Intervallen der Form $(x - \epsilon, x + \epsilon)$ für $x \in \mathbb{R}$ und $\epsilon > 0$ arbeiten. Wir führen für solche Intervalle – sogenannte ϵ -Umgebungen – daher die Bezeichnung $B_\epsilon(x)$ ein. Die ϵ -Umgebung von x ist genau die Menge aller Punkte, deren Abstand zu x kleiner als ϵ ist.

Definition 4.1. Sei $D \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge und $x \in \mathbb{R}$. Dann heißt x Berührungspunkt von D , falls für jedes $\epsilon > 0$ die Menge $D \cap B_\epsilon(x)$ nicht leer ist.

Die Menge aller Berührungspunkte von D heißt der Abschluss von D und wir bezeichnen sie mit \overline{D} .

Beispiel 4.2. (i) Jeder Punkt $x \in D$ ist ein Berührungspunkt von D , denn es gilt für jedes $\epsilon > 0$

$$x \in D \cap B_\epsilon(x).$$

(ii) Es gibt Berührungspunkte, die nicht in der Menge liegen. Für $D = (0, 1)$ ist beispielsweise 0 (und 1) ein Berührungspunkt, denn für $\epsilon > 0$ gilt

$$\frac{\epsilon}{2} \in (0, 1) \cap B_\epsilon(0).$$

Es gilt $\overline{(0, 1)} = [0, 1]$ (Übung).

(iii) Für $D = \mathbb{Q}$ ist jedes $x \in \mathbb{R}$ Berührungspunkt, denn für jedes $\epsilon > 0$ enthält das Intervall $(x - \epsilon, x + \epsilon)$ mindestens eine rationale Zahl (Korollar 1.40).

Damit gilt

$$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}.$$

Bemerkung 4.3. Formal aufgeschrieben bedeutet „ x ist ein Berührungspunkt von D “:

$$\forall \epsilon > 0 \exists y \in D : |x - y| < \epsilon.$$

Daraus folgt die Bedeutung von „ x ist kein Berührungspunkt von D “:

$$\exists \epsilon > 0 \forall y \in D : |x - y| \geq \epsilon,$$

oder in Worten – es gibt ein $\epsilon > 0$ so, dass alle Punkte in D mindestens Abstand ϵ zu x haben.

Satz 4.4. Der Punkt $x \in \mathbb{R}$ ist ein Berührungspunkt von $D \subset \mathbb{R}$ genau dann, wenn es eine Folge $(x_n) \subset D$ gibt, die gegen x konvergiert.

Beweis. Sei x Berührungspunkt von D . Dann können wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein

$$x_n \in D \cap \left(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n} \right)$$

auswählen. Die so entstehende Folge (x_n) liegt offenbar in D und es gilt

$$|x - x_n| < \frac{1}{n}.$$

Daraus folgt für $n \rightarrow \infty$ dass x_n gegen x konvergiert.

Sei andererseits $(x_n) \subset D$ eine gegen x konvergente Folge. Sei $\epsilon > 0$, dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass $|x - x_N| < \epsilon$ und damit gilt

$$x_N \in D \cap B_\epsilon(x).$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war, folgt daraus, dass x Berührungspunkt von D ist. □

Definition 4.5. Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, x_0 Berührungspunkt von D und $y \in \mathbb{R}$. Wir sagen, dass f für $x \rightarrow x_0$ gegen y konvergiert und schreiben

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y$$

wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert so, dass $|f(x) - y| < \epsilon$ falls $x \in D$ und $|x - x_0| < \delta$.

Wir sagen $f(x)$ konvergiert für $x \rightarrow x_0$ falls es ein $y \in \mathbb{R}$ gibt, mit

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y.$$

Bemerkung 4.6. Die Menge D steht in der obigen Definition, da die Funktion f in vielen relevanten Fällen nicht für alle reellen Zahlen definiert ist (weil zum Beispiel ein Ausdruck im Nenner Nullstellen hat oder ein Ausdruck unter einer Wurzel negativ wird). Für x außerhalb des Definitionsbereiches D ergibt aber $f(x)$ und damit der Ausdruck $|f(x) - y| < \epsilon$ keinen Sinn. In dem Fall, den wir am häufigsten antreffen werden, ist $D = (x_0 - a, x_0 + a) \setminus \{x_0\}$ für ein $a > 0$, die obige Definition gilt aber für allgemeinere Definitionsbereiche D . Sie ergibt jedoch nur für Berührungspunkte x_0 von D Sinn, denn andernfalls enthält $B_\delta(x_0)$ für hinreichend kleine δ keinen Punkt mehr aus D . Dann gibt es keine Möglichkeit mehr, festzustellen, ob $f(x)$ „nahe“ bei y liegt.

Beispiel 4.7. (i) Sei $a \in \mathbb{R}$. Für

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto ax \end{aligned}$$

gilt stets

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$

Wir betrachten den Fall $a \neq 0$ (der Fall $a = 0$ bleibt zur Übung). Sei $\epsilon > 0$. Wir möchten, dass gilt

$$|f(x) - 0| = |ax| = |a||x| \leq \epsilon.$$

Man sieht leicht, dass das der Fall ist falls $|x| \leq \frac{\epsilon}{|a|}$ gilt. Setzen wir also $\delta = \frac{\epsilon}{|a|}$, dann gilt für jedes x , das

$$|x - 0| = |x| < \delta$$

erfüllt, die gewünschte Ungleichung.

(ii) Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

konvergiert nicht für $x \rightarrow 0$ denn angenommen y wäre der Grenzwert, dann gäbe es $\delta > 0$ so, dass für $|x| < \delta$ gilt $|f(x) - y| < 1$. Dann folgt mit der Dreiecksungleichung für jedes $x \in (0, \delta)$

$$2 = |f(x) - f(-x)| \leq |f(x) - y| + |y - f(-x)| < 2$$

was offensichtlich ein Widerspruch ist.

Satz 4.8. Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 Berührungspunkt von D und $y \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y$$

genau dann, wenn für jede Folge $(x_n) \subset D$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = y$.

Beweis. Wir haben oben gesehen, dass es für Berührungspunkte x_0 stets solche Folgen gibt. Angenommen es gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y,$$

und die Folge $(x_n) \subset D$ konvergiert gegen x_0 . Sei $\epsilon > 0$. Dann existiert ein $\delta > 0$ so, dass $|f(x) - y| < \epsilon$ vorausgesetzt $|x - x_0| < \delta$. Auf Grund der Konvergenz von (x_n) existiert $N \in \mathbb{N}$ so, dass $|x_n - x_0| < \delta$ für alle $n > N$ gilt. Für solche n gilt dann aber auch $|f(x_n) - y| < \epsilon$ und damit ist die Konvergenz von $(f(x_n))$ gegen y gezeigt.

Es gelte nun andererseits für jede Folge $(x_n) \subset D$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ dass $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = y$. Angenommen $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y$ gilt nicht, das heißt es existiert ein $\epsilon > 0$ so, dass für jedes $\delta > 0$ mindestens ein $x \in D$ existiert mit $|x - x_0| < \delta$ aber $|f(x) - y| \geq \epsilon$. Dann können wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ aus der Menge

$$D \cap \left(x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n} \right)$$

eine Element x_n auswählen, dass $|f(x_n) - y| \geq \epsilon$ erfüllt. Die so entstehende Folge (x_n) konvergiert gegen x_0 da $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ ist aber $(f(x_n))$ konvergiert nicht gegen y . Das ist aber ein Widerspruch zur Voraussetzung. \square

Korollar 4.9. Seien $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen, x_0 Berührungspunkt und $y, z \in \mathbb{R}$. Falls

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y \text{ und } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = z,$$

so gelten auch

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + g(x) &= y + z, \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) &= yz \end{aligned}$$

sowie falls $z \neq 0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{y}{z}.$$

Beweis. Wir beweisen die letzte Aussage, die Beweise der anderen beiden Aussagen sind analog. Da $g(x)$ Nullstellen besitzen kann, ist der Quotient $\frac{f(x)}{g(x)}$ nicht überall definiert. Es gilt jedoch, da $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = z \neq 0$ ist, dass es ein $\delta > 0$ gibt so, dass $|g(x) - z| < |z|$ falls $|x - x_0| < \delta$. Die Funktion g kann also im Intervall $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ keine Nullstellen besitzen und $\frac{f}{g}$ ist (mindestens) auf $D \cap B_\delta(x_0)$ definiert.

Sei nun $(x_n) \subset D$ eine gegen x_0 konvergente Folge. Dann gilt nach dem vorhergehenden Satz $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = y$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = z$ und damit nach den Rechenregeln für Grenzwerte von Folgen auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{y}{z}.$$

Da (x_n) eine beliebige Folge war, können wir den Satz nun in die umgekehrte Richtung verwenden um die gewünschte Aussage zu erhalten. \square

Korollar 4.10 (Einschließungssatz für Funktionen). Seien $f, g, h : D \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen und x_0 Berührungspunkt von D . Gilt für ein $y \in \mathbb{R}$

$$y = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) \text{ und } f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

auf einer ϵ -Umgebung von x_0 so folgt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = y.$$

Beweis. Übung. \square

Beispiel 4.11. (i) Die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{\exp(x) - 1}{x} \end{aligned}$$

konvergiert für $x \rightarrow 0$ gegen 1. Zunächst gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ (Satz 2.70)

$$1 + x \leq \exp(x)$$

$$1 - x \leq \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$$

und damit für alle $x \in (-\infty, 1)$

$$x \leq \exp(x) - 1 \leq \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x}$$

beziehungsweise für $x > 0$

$$1 \leq \frac{\exp(x) - 1}{x} \leq \frac{1}{1-x}.$$

Das analoge Argument für $x < 0$ wird als Übung überlassen.

Damit folgt aus den obigen Korollaren der Grenzwert 1.

Insbesondere muss auch

$$\lim_{x \rightarrow 0} \exp(x) = 1$$

gelten.

Man beachte, dass das Argument

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\exp(x) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k!} = 1$$

nicht stichhaltig ist, da dabei zwei Grenzwerte (die Reihe enthält ebenfalls einen Grenzwert) vertauscht werden. Das Vertauschen von Grenzwerten ist im Allgemeinen nicht zulässig

(ii) Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

konvergiert nicht für $x \rightarrow 0$ denn für jedes $\delta > 0$ können wir $n \in \mathbb{N}$ so wählen, dass $\frac{1}{2\pi n} < \delta$. Dann ist

$$\left[\frac{1}{2\pi(n+1)}, \frac{1}{2\pi n} \right] \subset B_\delta(0).$$

Auf diesem Intervall nimmt $\frac{1}{x}$ also alle Werte in $[2\pi n, 2\pi(n+1)]$ an und $f(x)$ damit alle Werte zwischen -1 und 1 (das wissen wir streng genommen noch nicht, werden es aber bald zeigen). Für $0 < \epsilon < 1$ können diese Werte unmöglich alle in $(y - \epsilon, y + \epsilon)$ liegen.

- (iii) Um Grenzwerte von Funktionen zu untersuchen, reicht es nicht aus einzelne spezielle Folgen (x_n) mit $x_n \rightarrow x_0$ zu untersuchen wie das folgende Beispiel zeigt. Betrachte die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Für $x \rightarrow 0$ konvergiert f nicht, denn für jedes $\delta > 0$ enthält das Intervall $(-\delta, \delta)$ sowohl rationale als auch irrationale Zahlen. Dennoch gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = 1$$

aber eben auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{\sqrt{2}}{n}\right) = 0.$$

Umgekehrt reicht jedoch eine einzige Folge (x_n) mit $x_n \rightarrow x_0$ so, dass $(f(x_n))$ divergiert um zu zeigen, dass f für $x \rightarrow x_0$ nicht konvergent ist. Im obigen Beispiel könnten wir die Nullfolge

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{2}^n}$$

betrachten. Die Folge $(f(x_n))$ ist dann 1 für gerade n und 0 für ungerade n also nicht konvergent.

Wir definieren noch einige uneigentliche Grenzwerte.

Definition 4.12. Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ und x_0 Berührungspunkt von D . Wir sagen f divergiert bestimmt gegen $+\infty$ für $x \rightarrow x_0$ und schreiben

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$$

falls für jedes $K \in \mathbb{R}$ ein $\delta > 0$ existiert so, dass $f(x) \geq K$ gilt falls $|x - x_0| < \delta$.

Definition 4.13. Sei $D \subset \mathbb{R}$ nicht nach oben beschränkt und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Wir sagen f konvergiert für $x \rightarrow \infty$ gegen $y \in \mathbb{R}$ und schreiben

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = y$$

falls für jedes $\epsilon > 0$ ein $K > 0$ existiert so, dass $|f(x) - y| < \epsilon$ wenn $x > K$ ist.

Bemerkung 4.14. Für das Rechnen mit solchen uneigentlichen Grenzwerten gelten Satz 4.8 und Korollar 4.9 sinngemäß wenn wir die Merkgeln aus Bemerkung 2.43 hinzuziehen.

Bemerkung 4.15. Analog zum Umgang mit Grenzwerten von Folgen, können wir auch komplexwertige Funktionen behandeln. Für $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ und einen Berührungspunkt x_0 von D gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y \in \mathbb{C}$$

genau dann wenn

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{Re} f(x) &= \operatorname{Re} y \text{ und} \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{Im} f(x) &= \operatorname{Im} y \end{aligned}$$

genau dann wenn

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x) - y| = 0.$$

Definition 4.16. Sei $D \subset \mathbb{K}$, $f : D \rightarrow \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) eine Funktion und $x_0 \in D$. Die Funktion f heißt stetig im Punkt x_0 genau dann wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert so, dass

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon \text{ falls } |x - x_0| < \delta.$$

Die Funktion f heißt stetig, falls sie in jedem Punkt von D stetig ist.

Die Funktion f heißt Lipschitz-stetig falls ein $L \in (0, \infty)$ existiert so, dass für alle $x, y \in D$ gilt

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|.$$

Die Zahl L heißt Lipschitzkonstante.

Bemerkung 4.17. Ein Vergleich mit Definition 4.5 zeigt, dass $f : D \rightarrow \mathbb{K}$ in $x_0 \in D$ stetig ist, genau dann wenn

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Beispiel 4.18. Wir wollen zeigen, dass die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

stetig ist. Sei dazu $x_0 \in \mathbb{R}$ und $\epsilon > 0$. Wir möchten erreichen, dass gilt

$$|f(x) - f(x_0)| = |x^2 - x_0^2| = |x - x_0| |x + x_0| < \epsilon.$$

Wir wählen

$$\delta = \min \left\{ 1, \frac{\epsilon}{2|x_0| + 1} \right\}$$

Dann gilt für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \delta$

$$|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| |x + x_0| \leq \delta(|x| + |x_0|) \leq \delta(|x_0| + \delta + |x_0|) \leq \delta(2|x_0| + 1) \leq \epsilon.$$

Die Funktion ist also stetig im Punkt x_0 und da x_0 beliebig war ist sie stetig.

Das Beispiel illustriert, dass die gewählte Zahl δ von x_0 abhängen darf (aber natürlich nicht von x).

Satz 4.19. *Jede Lipschitz-stetige Funktion ist stetig.*

Beweis. Sei $f : D \rightarrow \mathbb{K}$ Lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante $L > 0$, das heißt für alle $x, y \in D$ gilt

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|.$$

Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und $\epsilon > 0$ und setze $\delta = \frac{\epsilon}{L}$. Dann folgt aus $|x - x_0| < \delta$ auch

$$|f(x) - f(x_0)| \leq L|x - x_0| \leq L\delta = \epsilon. \quad \square$$

Beispiel 4.20. (i) Die konstante Funktion $x \mapsto c$ erfüllt die Lipschitzbedingung

$$|f(x) - f(y)| = |c - c| = 0 \leq |x - y|$$

und ist damit stetig.

(ii) Die lineare Funktion $x \mapsto cx$ ist Lipschitz-stetig denn es gilt

$$|f(x) - f(y)| = |cx - cy| = |c||x - y|.$$

(iii) Aus den Ungleichungen

$$\begin{aligned} |\operatorname{Re}(x) - \operatorname{Re}(y)| &= |\operatorname{Re}(x - y)| \leq |x - y| \\ |\operatorname{Im}(x) - \operatorname{Im}(y)| &\leq |x - y| \\ ||x| - |y|| &\leq |x - y| \end{aligned}$$

folgt, dass die Funktionen $x \mapsto \operatorname{Re}(x)$, $x \mapsto \operatorname{Im}(x)$ und $x \mapsto |x|$ stetig sind.

(iv) Die Lipschitzstetigkeit einer Funktion kann von ihrem Definitionsbereich abhängen. So ist zum Beispiel

$$\begin{aligned} f : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

Lipschitz-stetig, denn es gilt

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |x - y||x + y| \leq 2|x - y|.$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

nicht Lipschitz-stetig denn es gilt

$$\frac{|f(n+1) - f(n)|}{(n+1) - n} = 2n + 1 \rightarrow \infty.$$

Für Lipschitz-stetige Funktionen mit Lipschitzkonstante L müsste aber für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x \neq y$ gelten

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{x - y} \leq L.$$

Bemerkung 4.21. Da sich Stetigkeit in x_0 mittels des Grenzwertes von Funktionen ausdrücken lässt, erhalten wir unmittelbar die folgenden Aussagen: Die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{K}$ ist stetig in x_0 genau dann, wenn für jede Folge $(x_n) \subset D$ mit $x_n \rightarrow x_0$ auch $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ gilt.

Falls f, g in x_0 stetige Funktionen sind, dann sind auch $f + g$ und $f \cdot g$ stetig. Falls $g(x_0) \neq 0$ dann ist auch $\frac{f}{g}$ stetig.

Damit erhalten wir direkt, dass jedes Polynom stetig ist. Eine rationale Funktion (Quotient zweier Polynome) ist stetig in allen Punkten, die nicht Nullstellen des Nenners sind.

Verkettungen stetiger Funktionen sind stetig, genauer gilt der folgende Satz.

Satz 4.22. Sei $D \subset \mathbb{K}$, $f : D \rightarrow \mathbb{K}$ stetig in $x_0 \in D$ und $g : f(D) \rightarrow \mathbb{K}$ stetig in $f(x_0)$, dann ist die Verkettung $g \circ f$ stetig in x_0 .

Beweis. Sei $\epsilon > 0$. Da g stetig in $f(x_0)$ ist existiert $\delta_1 > 0$ so, dass $|g(y) - g(f(x_0))| < \epsilon$ vorausgesetzt $|y - f(x_0)| < \delta_1$. Da f stetig ist, existiert $\delta_2 > 0$ so, dass $|f(x) - f(x_0)| < \delta_1$ vorausgesetzt $|x - x_0| < \delta_2$.

Dann ist für solche x

$$|(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)| = |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \epsilon$$

und damit ist die Stetigkeit von $g \circ f$ in x_0 gezeigt. \square

Beispiel 4.23. Wir wollen zeigen, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1 - |x|}{1 + |x|} \end{aligned}$$

stetig ist. Dazu betrachten wir die Abbildungen

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto |x| \quad \text{und} \\ g : \mathbb{R} \setminus \{-1\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ y &\mapsto \frac{1-y}{1+y}. \end{aligned}$$

Wir wissen bereits, dass f und g stetig sind und offensichtlich gilt $h = g \circ f$. Dann folgt aus dem obigen Satz die Stetigkeit von h .

Beispiel 4.24. Die Funktionen \exp , \sin und \cos sind stetig.

Wir haben in Beispiel 4.11 bereits gezeigt, dass

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(h) - 1}{h} = 1.$$

Dann muss insbesondere gelten

$$\lim_{h \rightarrow 0} (\exp(h) - \exp(0)) = 0$$

also ist \exp stetig im Punkt 0.

Sei nun $x_0 \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \exp(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \exp(x_0 + h) = \lim_{h \rightarrow 0} \exp(x_0) \exp(h) = \exp(x_0) \lim_{h \rightarrow 0} \exp(h) = \exp(x_0),$$

also ist \exp stetig in x_0 . Da das für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ gilt, ist \exp stetig.

Betrachten wir nun die Funktion $x \mapsto \exp(ix)$. Für $x_0 \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} |\exp(i(x_0 + h)) - \exp(ix_0)| &= |\exp(ix_0)| |\exp ih - 1| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(ih)^k}{k!} \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|h|^k}{k!} \\ &= \exp(|h|) - 1. \end{aligned}$$

Lassen wir $h \rightarrow 0$ gehen, so konvergiert auch $|h| \rightarrow 0$ (Stetigkeit des Betrages) und damit gilt nach dem Einschließungssatz

$$\lim_{h \rightarrow 0} |\exp(i(x_0 + h)) - \exp(ix_0)| = 0.$$

Die Funktion $x \mapsto \exp(ix)$ ist also ebenfalls stetig.

Damit erhalten wir auch, dass $\sin(x) = \operatorname{Im} \exp(ix)$ und $\cos(x) = \operatorname{Re} \exp(ix)$ als Verkettung stetiger Funktionen stetig sind.

Bemerkung 4.25. Betrachte die folgenden Beispielfunktionen

$$\begin{aligned}
 f &: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R} \\
 & \quad x \mapsto x \text{ und} \\
 g &: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\
 & \quad x \mapsto \begin{cases} -1 + x & x \leq 0 \\ 1 - x & x > 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

In beiden Fällen können wir mit Funktionswerten von f beziehungsweise g beliebig nah an 1 herankommen, das heißt

$$1 = \sup f((-1, 1)) = \sup g([-1, 1])$$

aber es gibt kein x im Definitionsbereich für das dieser Wert tatsächlich erreicht wird.

Lemma 4.26. *Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $y \in \mathbb{R}$. Falls die Menge*

$$\{x \in [a, b] \mid f(x) \geq y\}$$

nicht leer ist, dann besitzt sie ein kleinstes Element.

Beweis. Sei

$$M = \{x \in [a, b] \mid f(x) \geq y\} \neq \emptyset$$

und setze $x_0 := \inf M$. Dann ist zu zeigen, dass $x_0 \in M$ ist beziehungsweise dass $f(x_0) \geq y$.

Es existiert eine Folge $(x_n) \subset M$ so, dass $x_n \rightarrow x_0$. Wegen der Stetigkeit von f folgt dann

$$f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \geq y$$

also die gesuchte Ungleichung. □

Satz 4.27. *Sei $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt die Funktion f ihr Maximum an, das heißt es existiert $x_0 \in [a, b]$ so, dass $f(x) \leq f(x_0)$ für alle $x \in [a, b]$.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass f beschränkt ist. Angenommen f wäre nicht beschränkt, das heißt für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die Menge

$$\{x \in [a, b] \mid f(x) \geq n\}$$

nicht leer und besitzt nach dem obigen Lemma ein kleinstes Element x_n . Die Folge (x_n) ist monoton wachsend (Warum?) und nach oben beschränkt durch b , sie konvergiert also gegen ein $x_0 \in [a, b]$. Nach der Definition der Folge gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \rightarrow \infty$, da f aber stetig ist, muss gelten $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$ was ein Widerspruch ist.

Setze nun

$$y = \sup \{f(x) \mid x \in [a, b]\}.$$

Falls f konstant überall den Wert y annimmt ist nichts zu zeigen. Andernfalls sind nach der Definition des Supremums die Mengen

$$\left\{ x \in [a, b] \mid f(x) \geq y - \frac{1}{n} \right\}$$

für $n \in \mathbb{N}$ nicht leer und besitzen damit nach dem obigen Lemma ein kleinstes Element x_n . Die Folge (x_n) ist wiederum monoton wachsend und beschränkt und konvergiert damit gegen $x_0 \in \mathbb{R}$. Damit gilt wegen der Stetigkeit

$$f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} y - \frac{1}{n} = y.$$

Auf Grund der Definition von y folgt daraus $f(x_0) = y$ also ist $f(x_0)$ insbesondere eine obere Schranke für die Menge

$$\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$$

was zu zeigen war. □

Eine analoge Aussage gilt natürlich auch für das Minimum einer Funktion.

Satz 4.28 (Zwischenwertsatz). *Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) < f(b)$ (beziehungsweise $f(b) < f(a)$). Falls $y \in (f(a), f(b))$ (beziehungsweise $(f(b), f(a))$), dann existiert $x_0 \in (a, b)$ so, dass $f(x_0) = y$.*

Beweis. Wir betrachten den Fall $f(a) < f(b)$. Nach Lemma 4.26 besitzt

$$M := \{x \in [a, b] \mid f(x) \geq y\}$$

ein kleinstes Element x_0 , das $x_0 > a$ erfüllt (Warum?).

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ groß genug ist also $x_0 - \frac{1}{n} \in [a, b]$ und es gilt auf Grund der Definition von x_0

$$f\left(x_0 - \frac{1}{n}\right) < y.$$

Im Grenzübergang folgt dann aus der Stetigkeit

$$f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(x_0 - \frac{1}{n}\right) \leq y.$$

Andererseits ist $x_0 \in M$ und daher gilt $f(x_0) \geq y$, es ist also $f(x_0) = y$. Schließlich können wir aus dem soeben Gezeigten schlussfolgern (Wie genau?), dass der Fall $x_0 = b$ nicht vorkommen kann. □

Beispiel 4.29. Die Funktion \cos besitzt im Intervall $[0, 2]$ genau eine Nullstelle. Aus der Reihendefinition der Cosinusfunktion

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$$

erhalten wir unmittelbar $\cos(0) = 1$.

Darüber hinaus folgt aus Satz 2.52 (Wie genau?)

$$-1 = 1 - \frac{2^2}{2!} \leq \cos(2) \leq 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} < 0.$$

Da \cos stetig ist, muss es nach dem Zwischenwertsatz zwischen 0 ($\cos(0) > 0$) und 2 ($\cos(2) < 0$) mindestens eine Nullstelle geben.

Um zu zeigen, dass es tatsächlich nur eine einzige Nullstelle gibt, zeigen wir, dass \cos im betrachteten Intervall streng monoton fallen ist. Zunächst folgt für $z \in [0, 2]$ aus Satz 2.52 (Wie genau?)

$$z \leq \sin(z) \leq z - \frac{z^3}{3!}$$

und damit ist $\sin(z)$ auf $(0, 2)$ positiv. Dann folgt aus einem der Additionstheoreme für $x, y \in [0, 2]$ und $x > y$

$$\cos(x) - \cos(y) = -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) < 0.$$

Wir haben diese Nullstelle in Bemerkung 2.72 benutzt um die Zahl π zu definieren.

Korollar 4.30. *Sei I ein Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist $f(I)$ ebenfalls ein Intervall.*

Beweis. Übung. □

Der folgende Satz erlaubt uns für viele wichtige Umkehrfunktionen die Stetigkeit zu zeigen.

Satz 4.31. *Seien I ein Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Falls f streng monoton wachsend ist, dann existiert die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(I) \rightarrow \mathbb{R}$ und diese ist ebenfalls stetig und streng monoton wachsend.*

Beweisskizze. Nach dem obigen Korollar ist $f(I)$ ein Intervall. Die Funktion f ist injektiv, denn falls $f(x) = f(\tilde{x})$ gilt, dann muss $x = \tilde{x}$ sein, andernfalls wäre die Funktion nicht streng monoton wachsend.

Es existiert also eine eindeutige Funktion $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ so, dass $f(x) = y$ genau dann, wenn $g(y) = x$.

Es sei nun $y_0 \in f(I)$ und $\epsilon > 0$ und wir setzen $x_0 = g(y_0)$. Wir behandeln hier nur den Fall, dass x_0 kein Randpunkt von I ist, die Beweise für die anderen Fälle sind jedoch

sehr ähnlich. Wenn x_0 kein Randpunkt von I ist, dann können wir $0 < \tilde{\epsilon} \leq \epsilon$ so wählen, dass $x_0 - \tilde{\epsilon}, x_0 + \tilde{\epsilon} \in I$. Wir wählen

$$\delta = \min \{f(x_0 + \tilde{\epsilon}) - y_0, y_0 - f(x_0 - \tilde{\epsilon})\}$$

und stellen fest, dass wegen der Strengen Monotonie von f gilt $\delta > 0$. Falls nun $y \in I$ die Ungleichung $|y - y_0| < \delta$ erfüllt, dann gilt insbesondere

$$f(x_0 - \tilde{\epsilon}) \leq y_0 - \delta < y < y_0 + \delta \leq f(x_0 + \tilde{\epsilon}).$$

Aus der strengen Monotonie von g folgt dann

$$x_0 - \tilde{\epsilon} < g(y) < x_0 + \tilde{\epsilon}$$

und damit

$$|g(y) - g(y_0)| = |g(y) - x_0| < \tilde{\epsilon} \leq \epsilon.$$

Damit ist die Stetigkeit von g im Punkt y_0 gezeigt und da y_0 beliebig war, ist g stetig. \square

Eine analoge Aussage gilt natürlich auch für streng monoton fallende Funktionen.

Beispiel 4.32. (i) Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Funktion

$$\begin{aligned} f : [0, \infty) &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^n \end{aligned}$$

ist stetig und streng monoton wachsend. Man überzeugt sich leicht, dass $f([0, \infty) = [0, \infty)$ gilt. Aus dem vorhergehenden Satz folgt dann die Existenz und Stetigkeit der Umkehrfunktion $\sqrt[n]{\cdot} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

- (ii) Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist ebenfalls streng monoton wachsend und stetig. Es gilt $\exp(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} \exp(x) = \infty$ beziehungsweise $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = -\infty$ woraus wir mit dem Zwischenwertsatz $\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$ erhalten. Dann garantiert uns der vorhergehende Satz die Existenz und Stetigkeit der Umkehrfunktion $\ln : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$
- (iii) Einige weitere Beispiele sind \sin und \tan im Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sowie \cos im Intervall $[0, \pi]$.

4.2 Differenzialrechnung

Definition 4.33. Sei I ein offenes Intervall (also $I = (a, b)$ mit $a < b$, wobei $a = -\infty$ und $b = \infty$ zugelassen sind), $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ eine Funktion und $x \in I$. Die Funktion f heißt differenzierbar in x wenn der Grenzwert

$$f'(x) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

existiert. Der Ausdruck

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

heißt Differenzenquotient, der Wert $f'(x)$ heißt Differenzialquotient oder Ableitung von f im Punkt x .

Die Funktion heißt differenzierbar, wenn sie in jedem Punkt von I differenzierbar ist.

Beispiel 4.34. (i) Für die konstante Funktion $x \mapsto c$ ($c \in \mathbb{K}$) ergibt sich

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = 0.$$

(ii) Für $n \in \mathbb{N}$ und die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^n \end{aligned}$$

erhalten wir mit dem binomischen Satz

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} h^{k-1} x^{n-k} = nx^{n-1}.$$

(iii) Für die Exponentialfunktion \exp erhalten wir

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \exp(x) \frac{\exp(h) - 1}{h} = \exp(x).$$

(iv) Analog erhält man für die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{C} \\ x &\mapsto \exp(ix) \end{aligned}$$

die Ableitung (Übung)

$$f'(x) = i \exp(ix).$$

Wegen der Stetigkeit von Re und Im gilt für jede komplexwertige Funktion f

$$\operatorname{Re} f'(x) = \operatorname{Re} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Re}(f(x+h)) - \operatorname{Re}(f(x))}{h} = (\operatorname{Re} f)'(x)$$

und analog $\operatorname{Im} f'(x) = (\operatorname{Im} f)'(x)$. Wenden wir das auf die obige Funktion an, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \sin'(x) &= (\operatorname{Im} f)'(x) = \operatorname{Im} f'(x) = \operatorname{Im}(i \exp(ix)) = \operatorname{Im}(i \cos(x) - \sin(x)) = \cos(x) \\ \cos'(x) &= -\sin(x). \end{aligned}$$

(v) Für die Betragsfunktion $x \mapsto |x|$ ist

$$\frac{|h| - |0|}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1 & h > 0 \\ -1 & h < 0 \end{cases}.$$

Für $x = 0$ existiert also keine Ableitung, die Funktion ist in diesem Punkt nicht differenzierbar.

Satz 4.35. Sei $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ eine in x differenzierbare Funktion. Dann ist f in x stetig.

Beweis. Die Funktion f ist stetig in x , falls $\lim_{h \rightarrow 0} (f(x+h) - f(x)) = 0$ gilt. Wenn f also nicht stetig ist, dann existiert $\epsilon > 0$ so, dass für jedes $\delta > 0$ ein $h \in (-\delta, \delta)$ existiert mit $|f(x+h) - f(x)| > \epsilon$. Insbesondere existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $h_n \in (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ so, dass $|f(x+h_n) - f(x)| > \epsilon$. Die Folge (h_n) ist eine Nullfolge und es gilt

$$\left| \frac{f(x+h_n) - f(x)}{h_n} \right| > \frac{\epsilon}{\frac{1}{n}} = n\epsilon \rightarrow \infty.$$

Die Funktion f kann also in x nicht differenzierbar sein, denn sonst müsste gelten

$$\left| \frac{f(x+h_n) - f(x)}{h_n} \right| \rightarrow |f'(x)|. \quad \square$$

Bemerkung 4.36. Die Umkehrung dieses Satzes gilt nicht, wie das Beispiel der Betragsfunktion zeigt. Es gibt sogar stetige Funktionen von $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die in keinem Punkt differenzierbar sind.

Aus den Rechenregeln für Grenzwerte von Funktionen ergeben sich die folgenden Rechenregeln für Ableitungen.

Satz 4.37. Sei I ein offenes Intervall und $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ in x differenzierbare Funktionen. Dann sind auch die Funktionen $f + g$ und $f \cdot g$ differenzierbar in x . Falls $g(x) \neq 0$ ist, dann ist auch $\frac{1}{g}$ differenzierbar. Es gilt

$$\begin{aligned} (f + g)'(x) &= f'(x) + g'(x) \\ (f \cdot g)'(x) &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\ \left(\frac{1}{g}\right)'(x) &= -\frac{g'(x)}{g(x)^2}. \end{aligned}$$

Beweis. Da f und g differenzierbar sind, sind sie insbesondere stetig und es gilt $f(x+h) \rightarrow f(x)$ und $g(x+h) \rightarrow g(x)$. Dann folgen die Aussagen aus den Formeln

$$\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}g(x) + f(x+h)\frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

beziehungsweise

$$\frac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h} = -\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \frac{1}{g(x)g(x+h)}. \quad \square$$

Satz 4.38 (Kettenregel). Seien I, J offene Intervalle, $g : J \rightarrow I$ differenzierbar in x und $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ differenzierbar in $g(x)$. Dann ist $f \circ g$ differenzierbar in x und es gilt

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

Beweis. Wir betrachten zunächst die folgende Hilfsfunktion auf J

$$\varphi(\xi) := \begin{cases} \frac{f(g(x)+\xi) - f(g(x))}{\xi} & \xi \neq 0 \\ f'(g(x)) & \xi = 0 \end{cases}.$$

Da f in $g(x)$ differenzierbar ist, gilt $\lim_{\xi \rightarrow 0} \varphi(\xi) = f'(g(x)) = \varphi(0)$, also ist φ stetig im Punkt 0. Durch Umstellen erhalten wir $f(g(x) + \xi) - f(g(x)) = \xi\varphi(\xi)$ und stellen fest, dass diese Gleichung auch für $\xi = 0$ erfüllt ist.

In dieser Gleichung setzen wir nun $\xi = g(x+h) - g(x)$ und schreiben damit den Differenzenquotienten für $f \circ g$ wie folgt

$$\begin{aligned} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} &= \frac{f(g(x) + (g(x+h) - g(x))) - f(g(x))}{h} \\ &= \varphi(g(x+h) - g(x)) \frac{g(x+h) - g(x)}{h}. \end{aligned}$$

Im Grenzwert $h \rightarrow 0$ konvergiert $g(x+h) - g(x) \rightarrow 0$ wegen der Stetigkeit von g und damit konvergiert der erste Faktor, wegen der Stetigkeit von φ gegen $\varphi(0) = f'(g(x))$. Auf Grund der Differenzierbarkeit von g konvergiert der zweite Faktor gegen $g'(x)$ und wir erhalten aus den Rechenregeln für Grenzwerte die zu zeigende Gleichung

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f \circ g)(x+h) - (f \circ g)(x)}{h} = f'(g(x))g'(x). \quad \square$$

Definition 4.39. Sei I ein Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Der Punkt $x_0 \in I$ heißt globales Maximum von f , falls für alle $x \in I$ gilt

$$f(x) \leq f(x_0).$$

Er heißt lokales Maximum von f , falls es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass für alle $x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ gilt

$$f(x) \leq f(x_0).$$

Entsprechend definiert man ein globales beziehungsweise lokales Minimum.

Ist ein Punkt entweder ein (globales oder lokales) Maximum oder ein Minimum bezeichnen wir ihn als Extremum.

Beispiel 4.40. (i) Für $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ liegt bei $x = 0$ ein lokales und globales Minimum und bei $x = -1$ beziehungsweise $x = 1$ ein lokales und globales Maximum vor.

(ii) Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \cos(x) + \frac{x}{2}$$

besitzt unendlich viele lokale Maxima und Minima, jedoch kein globales Extremum.

(iii) Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 1 & x \text{ rational} \\ 0 & x \text{ irrational} \end{cases}$$

besitzt hat bei jeder rationalen Zahl ein lokales und globales Maximum und bei jeder irrationalen Zahl ein lokales und globales Minimum.

Satz 4.41. Sei I ein offenes Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ und sei x_0 ein lokales Extremum von f . Falls f in x_0 differenzierbar ist, dann gilt $f'(x_0) = 0$.

Beweis. Fall $f'(x_0) > 0$ gilt (andernfalls betrachte $-f$), dann existiert $\delta > 0$ so, dass

$$\left| \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) \right| < f'(x_0)$$

für alle $h \in (-\delta, \delta)$ gilt, das heißt insbesondere

$$0 < \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Für jedes $h \in (0, \delta)$ gilt also $f(x_0) < f(x_0 + h)$ und für jedes $h \in (-\delta, 0)$ gilt $f(x_0 + h) < f(x_0)$. Damit kann x_0 weder ein lokales Minimum noch ein lokales Maximum sein. \square

Bemerkung 4.42. Dank des obigen Satzes können wir zum Auffinden von Extrema einer Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ – Differenzierbarkeit vorausgesetzt – wie folgt vorgehen: Wir bestimmen die Ableitung $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$ sowie deren Nullstellen. Wir untersuchen diese Nullstellen sowie die Randpunkte des Intervalls I darauf, ob es sich tatsächlich um Extrema handelt. Nur das Vorhandensein einer Nullstelle von f' ist nicht ausreichend, wie das Beispiel $x \mapsto x^3$ zeigt.

Differenzierbare Funktionen auf einem offenen Intervall $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{K}$ sind stetig. Wir vereinbaren, dass die Aussage „ $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ ist differenzierbar“ bedeutet f ist auf (a, b) differenzierbar und auf $[a, b]$ stetig.

Satz 4.43 (verallgemeinerter Mittelwertsatz der Differenzialrechnung). *Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen. Dann existiert $\xi \in (a, b)$ so, dass*

$$(f(b) - f(a))g'(\xi) = f'(\xi)(g(b) - g(a)).$$

Bemerkung 4.44. Häufig wird die obige Gleichung in der eingängigeren Form

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

geschrieben, was jedoch nur für $g(b) \neq g(a)$ Sinn ergibt.

Für $g(x) = x$ erhalten wir den Mittelwertsatz der Differenzialrechnung:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

Geometrisch bedeutet das, im Intervall (a, b) existiert ein ξ so, dass der Anstieg der Tangente im Punkt ξ gerade dem Anstieg der Verbindungsgerade zwischen $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ entspricht.

Beweis von Satz 4.43. Wir betrachten die Hilfsfunktion $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$h(x) := (f(b) - f(a))g(x) - f(x)(g(b) - g(a)).$$

Sie ist offensichtlich stetig und differenzierbar und es gilt $h(a) = f(b)g(a) - f(a)g(b) = h(b)$. Da

$$h'(x) = (f(b) - f(a))g'(x) - f'(x)(g(b) - g(a))$$

gilt, ist zu zeigen, dass h' im Intervall (a, b) eine Nullstelle hat.

Fall 1: Die Funktion h ist konstant, dann ist $h'(x) = 0$ überall und es ist nichts zu zeigen.

Fall 2: Es existiert ein $x \in (a, b)$ mit $h(x) > h(a)$. Nach Satz 4.27 besitzt f ein globales Maximum auf $[a, b]$, welches offensichtlich weder in a noch in b angenommen wird. Sei also $\xi \in (a, b)$ irgendein lokales Maximum von h . Dann gilt dort nach Satz 4.41 $h'(\xi) = 0$.

Fall 3: Es existiert ein $x \in (a, b)$ mit $h(x) < h(a)$. Wende das obige Argument auf $-h$ an um $-h'(\xi) = h'(\xi) = 0$ zu erhalten. \square

Korollar 4.45. Sei I ein offenes Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Dann gelten

(i) $f'(I) \subset [0, \infty) \iff f$ ist monoton wachsend,

(ii) $f'(I) \subset (0, \infty) \implies f$ ist streng monoton wachsend,

(iii) $f'(I) \subset (-\infty, 0] \iff f$ ist monoton fallend,

(iv) $f'(I) \subset (-\infty, 0) \implies f$ ist streng monoton fallend.

Insbesondere ist $f'(x) = 0$ für alle $x \in I$ genau dann, wenn f konstant ist.

Beweis. Wir zeigen lediglich die erste Aussage. Falls f nicht monoton wachsend ist, dann existieren $a, b \in I$, $a < b$ so, dass $f(a) > f(b)$ ist. Dann existiert nach dem Mittelwertsatz $\xi \in (a, b) \subset I$ so, dass

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} < 0.$$

Die Umkehrung der gezeigten Aussage soll als Übung gezeigt werden. □

Beispiel 4.46. Daraus dass f streng monoton wachsend ist, folgt nicht $f'(x) > 0$ wie das Beispiel $x \mapsto x^3$ zeigt.

Korollar 4.47 (Regel von de l'Hospital). Seien $a, b, x_0 \in \mathbb{R}$, $a < x_0 < b$ und $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Falls $g'(x) \neq 0$ für $x \in (a, b) \setminus \{x_0\}$ und

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

existiert, dann gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Beweis. Zwischen zwei Nullstellen von g liegt stets eine Nullstelle von g' (Warum?), daher ist x_0 die einzige Nullstelle von g im Intervall (a, b) . Für jedes $x \in (a, x_0)$ existiert dann nach dem verallgemeinerten Mittelwertsatz ein $\xi_x \in (x, x_0)$ so, dass

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}$$

Für $x \rightarrow x_0$ geht auch $\xi_x \rightarrow x_0$ und damit konvergiert die Rechte Seite gegen den Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Was wir oben gezeigt haben, ist die Existenz des linksseitigen Grenzwertes

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)},$$

die Existenz des rechtsseitigen Grenzwertes kann jedoch analog gezeigt werden. \square

Bemerkung 4.48. (i) Da für die Bestimmung des Grenzwertes lediglich das Verhalten der Funktionen in einer Umgebung $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ nötig ist, reicht es aus, wenn g' in so einer Umgebung keine Nullstellen hat.

(ii) Aus dem Beweis ist unmittelbar offensichtlich, dass die Aussage auch für einseitige Grenzwerte gilt und auch für den Fall, dass $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ bestimmt divergiert.

(iii) Die schwächere Voraussetzung $f, g : (a, b) \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$$

ist auch ausreichend (Warum?).

(iv) Die Aussage gilt nicht ohne weiteres für komplexwertige Funktionen, es gibt jedoch komplexwertige Entsprechungen mit zusätzlichen Voraussetzungen.

(v) Durch die Substitutionen $\tilde{f}(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ und $\tilde{g}(x) = g\left(\frac{1}{x}\right)$, erhält man auch, dass

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

falls der rechte Grenzwert existiert und falls g keine beliebig großen Nullstellen besitzt.

(vi) Mit ähnlichen Argumenten und etwas größerem Aufwand, kann man auch zeigen, dass die Aussage auch unter der alternativen Voraussetzung

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty \text{ (oder } -\infty)$$

gilt.

(vii) Die Regel kann nicht „in die andere Richtung“ angewandt werden, es gibt also differenzierbare Funktionen f, g so, dass

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

existiert, aber

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

divergiert.

Beispiel 4.49. Zu bestimmen ist

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos(x)}.$$

Wir haben also $f(x) = x^2$ und $g(x) = 1 - \cos(x)$ und erhalten $f'(x) = 2x$, $g'(x) = \sin(x)$. Der resultierende Ausdruck ist bei $x = 0$ immernoch unbestimmt, wir berechnen also die höheren Ableitungen $f''(x) = 2$ und $g''(x) = \cos(x)$. Dann gilt

$$2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\cos(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos(x)}.$$

Satz 4.50 (Ableitung der Umkehrfunktion). Sei I ein offenes Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $f'(I) \in (0, \infty)$ (beziehungsweise $f'(I) \in (-\infty, 0)$), dann besitzt f eine differenzierbare Umkehrfunktion $f^{-1} : f(I) \rightarrow \mathbb{R}$ und es gilt für $y \in f(I)$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Beweis. Nach Korollar 4.45 wissen wir, dass f streng monoton wachsend ist und damit folgt die Existenz und Stetigkeit der Umkehrfunktion f^{-1} aus Satz 4.31. Sei nun $y \in f(I)$. Wir setzen $x = f^{-1}(y)$ und

$$\xi(h) = f^{-1}(y + h) - f^{-1}(y)$$

und lösen nach h auf

$$h = f(x + \xi(h)) - f(x).$$

Für $h \rightarrow 0$ konvergiert – wegen der Stetigkeit von f^{-1} – auch $\xi(h) \rightarrow 0$ und damit erhalten wir

$$\frac{f^{-1}(y + h) - f^{-1}(y)}{h} = \left(\frac{f(x + \xi(h)) - f(x)}{\xi(h)} \right)^{-1} \rightarrow (f'(x))^{-1} \neq 0.$$

Damit folgt die Differenzierbarkeit von f^{-1} in y sowie die geforderte Formel für die Ableitung. \square

Die obige Formel für die Ableitung lässt sich auch durch Anwendung der Kettenregel auf

$$f(f^{-1}(y)) = y$$

herleiten, für dieses Argument müssen wir aber bereits wissen, dass f^{-1} differenzierbar ist.

Beispiel 4.51. (i) Wenden wir den Satz auf die Potenzfunktion ($n \in \mathbb{N}$)

$$f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^n$$

mit Ableitung $f'(x) = nx^{n-1}$ an, so erhalten wir die Differenzierbarkeit und Ableitung der Wurzelfunktion $g(y) = \sqrt[n]{y}$

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} = \frac{1}{n(\sqrt[n]{y})^{n-1}} = \frac{1}{n}y^{\frac{1}{n}-1}.$$

(ii) Für den natürlichen Logarithmus erhalten wir mit $f(x) = \exp(x)$ für $y > 0$

$$\ln'(y) = \frac{1}{f'(\ln(y))} = \frac{1}{y}.$$

(iii) Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3$$

ist differenzierbar und streng monoton wachsend und sie besitzt die stetige Umkehrfunktion

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \sqrt[3]{y} & y \geq 0 \\ -\sqrt[3]{-y} & y < 0. \end{cases}$$

Die Umkehrfunktion ist jedoch im Punkt 0 nicht differenzierbar.

Definition 4.52. Sei I ein offenes Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Die Funktion heißt $n+1$ mal differenzierbar wenn die n -te Ableitung $f^{(n)}$ differenzierbar ist und ihre $n+1$ -te Ableitung $f^{(n+1)}$ ist die Funktion $f^{(n)'$. Die Funktion heißt beliebig differenzierbar oder glatt falls sie n mal differenzierbar ist für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Die Funktion heißt n mal stetig differenzierbar, falls $f^{(n)}$ stetig ist.

Definition 4.53. Sei I ein offenes Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine in x differenzierbare Funktion. Dann heißt

$$T_n f(y) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (y-x)^k$$

das n -te Taylor-Polynom um den Entwicklungspunkt x .

Der folgende Satz beschreibt die Approximation einer $n+1$ mal differenzierbaren Funktion durch ihr Taylorpolynom n -ten Grades.

Theorem 4.54 (Satz von Taylor). Sei I ein offenes Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine $n + 1$ mal differenzierbare Funktion. Sei $x \in I$ und $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Für jedes $y \in I$ existiert ein ξ zwischen x und y so, dass

$$(f(y) - T_n f(y)) h'(\xi) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} (y - \xi)^n (h(y) - h(x)). \quad (4.1)$$

Beweis. Wir wenden den verallgemeinerten Mittelwertsatz auf

$$g : I \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(t)}{k!} (y - t)^k$$

und h an, es existiert also ξ , so dass

$$g'(\xi)(h(y) - h(x)) = (g(y) - g(x)) h'(\xi) = (f(y) - T_n f(y)) h'(\xi).$$

Wir müssen nun noch g' ausrechnen:

$$g'(t) = \sum_{k=0}^n \left(\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!} (y - t)^k - \frac{f^{(k)}(t)}{k!} k (y - t)^{k-1} \right) \\ = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (y - t)^n$$

wobei die letzte Umformung aus der Tatsache folgt, dass es sich um eine Teleskopsumme handelt. Einsetzen von ξ liefert dann die gesuchte Gleichung. \square

Bemerkung 4.55. (i) Nützlich ist der Satz nur dann, wenn h' in einer Umgebung von x keine Nullstellen hat. In diesem Fall liefert er uns eine Aussage darüber, wie gut oder Schlecht die Approximation von f durch das Taylor-Polynom $T_n f$ ist.

(ii) Je nach Wahl der Funktion h erhält man nun verschiedene Formen des Restterms

$$R_{n+1}(y, x) := f(y) - T_n f(y).$$

(iii) Wir betrachten hier nur die Lagrange-Form die sich für $h(t) = (y - t)^{n+1}$ also $h'(t) = -(n + 1)(y - t)^n$ ergibt:

$$R_{n+1}(y, x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} (y - \xi)^n \frac{(y - x)^{n+1}}{(n + 1)(y - \xi)^n} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!} (y - x)^{n+1}.$$

Geben wir uns eine gewünschte Genauigkeit vor und kennen die Ableitung $f^{(n+1)}$ dann erlaubt uns die Formel festzustellen, für welche Werte von y das Polynom $T_n f$ eine hinreichend genaue Approximation von f ist.

(iv) Selbst für den Fall einer glatten Funktion erhalten wir im Allgemeinen keine Aussage über das Verhalten der Taylorreihe.

Korollar 4.56. Sei $(a, b) \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ mindestens n mal stetig differenzierbar. Sei $x \in (a, b)$ und es gelte $0 = f'(x) = f''(x) = \dots = f^{(n-1)}(x)$ und $f^{(n)}(x) \neq 0$. Ist n ungerade so liegt bei x kein lokales Extremum vor, ist n gerade, so hat f bei x ein lokales Minimum falls $f^{(n)}(x) > 0$ und ein lokales Maximum falls $f^{(n)}(x) < 0$.

Beweis. Wir setzen oBdA. voraus, dass $f^{(n)}(x) > 0$ ist (sonst betrachte $-f$). Wir verwenden die Taylor-Formel mit Lagrange-Restglied. Nach Voraussetzung verschwinden in der Entwicklung (4.1) die Terme 1 bis $n - 1$. Da nach Voraussetzung $f^{(n)}$ stetig ist, existiert $\epsilon > 0$, so dass $f^{(n)} > 0$ auf ganz $(x - \epsilon, x + \epsilon)$ (Warum?). Dann existiert nach der Taylor-Formel für jedes $y \in (x - \epsilon, x + \epsilon)$ ein $\xi_y \in (x - \epsilon, x + \epsilon)$, so dass

$$f(y) - T_n f(y) = f(y) - f(x) = -\frac{f^{(n)}(\xi_y)}{n!}(y - x)^n.$$

Falls n ungerade ist, nimmt der letzte Ausdruck in jeder noch so kleinen Umgebung von x sowohl positive als auch negative Werte an, es liegt also kein Extremum vor. Ist n gerade, dann ist die rechte Seite nie negativ, es liegt also ein lokales Minimum vor. \square

5 Topologie in Metrischen Räumen

5.1 Metrische und normierte Räume

Das Ziel dieses Abschnitts ist es, die Erkenntnisse über Folgen (und Reihen) reeller Zahlen aus dem vergangenen Semester zu verallgemeinern. Insbesondere wollen wir Aussagen über die Konvergenz von Folgen im \mathbb{R}^n formulieren und beweisen können. Wir wählen jedoch den allgemeineren Ansatz des metrischen Raumes, einer abstrakten mathematischen Struktur auf der ein Abstandsbegriff definiert ist. Die Theorie wird dadurch nicht komplizierter (nur abstrakter) aber wir können später mit den Werkzeugen die wir uns erarbeiten werden auch zum Beispiel die Konvergenz von Funktionenfolgen untersuchen.

Definition 5.1 (Metrischer Raum). Ein metrischer Raum (X, d) ist ein Paar bestehend aus einer Menge X zusammen mit einer Abbildung $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$, die als Metrik bezeichnet wird und die folgenden Bedingungen für alle $x, y, z \in X$ erfüllt:

$$\begin{aligned}d(x, y) &\geq 0 \text{ (Positivität)} \\d(x, y) = 0 &\iff x = y \text{ (Definitheit)} \\d(x, y) &= d(y, x) \text{ (Symmetrie)} \\d(x, y) &\leq d(x, z) + d(z, y) \text{ (Dreiecksungleichung)}.\end{aligned}$$

Die Elemente eines metrischen Raumes werden oft als Punkte bezeichnet. Die Bezeichnungen „Raum“ und „Punkt“ rühren daher, dass es sich hier um Objekte der Geometrie (in einem sehr weit gefassten Sinn des Wortes) handelt. Ihnen kommt keine tiefere Bedeutung zu. Ein einzelner Punkt eines abstrakten metrischen Raumes besitzt keine besonderen Eigenschaften außer der Element eben dieses Raumes zu sein. Interessante Eigenschaften treten erst durch die Struktur (die Metrik mit ihren Eigenschaften) auf, die verschiedene Punkte des Raumes zueinander in Beziehung setzt.

Beispiel 5.2. (i) Sei M eine beliebige Menge. Dann wird durch

$$d(x, y) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

eine Metrik definiert, die als diskrete Metrik bezeichnet wird.

- (ii) Seien X Menge der Knoten eines zusammenhängenden Graphen und $d(x, y)$ die minimale Anzahl an Kanten die durchlaufen werden müssen um von x nach y zu kommen. Dann ist d eine Metrik auf X .
- (iii) Sei X die Oberfläche einer Kugel (Erdoberfläche) und $d(x, y)$ der Abstand „Luftlinie“ (minimale Distanz entlang eines Großkreises). Dann ist d eine Metrik.
- (iv) Sei X die Menge der Punkte des europäischen Straßennetzes und $d(x, y)$ die minimale Strecke die zurückzulegen ist um entlang irgendwelcher Straßen von x nach y zu fahren. Dann ist d eine Metrik.

(v) Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, dann wird durch

$$d_{X \times Y}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2)$$

eine Metrix auf dem direkten Produkt $X \times Y$ definiert.

In vielen für uns wichtigen Beispielen besitzt die Menge X außer der metrischen noch eine damit kompatible Vektorraumstruktur:

Definition 5.3 (Normierter Raum). Ein normierter Raum $(V, \|\cdot\|)$ ist ein Paar bestehend aus einem Vektorraum V über dem Körper \mathbb{K} der reellen oder komplexen Zahlen und einer Abbildung $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$, die als Norm bezeichnet wird und die folgenden Bedingungen für alle $x, y \in V$ erfüllt:

$$\begin{aligned} \|x\| &\geq 0 \text{ (Positivität)} \\ \|x\| = 0 &\iff x = 0 \text{ (Definitheit)} \\ \|\lambda x\| &= |\lambda| \|x\| \text{ (absolute Homogenität)} \\ \|x + y\| &\leq \|x\| + \|y\| \text{ (Dreiecksungleichung)}. \end{aligned}$$

Jeder normierte Raum erhält die Struktur eines metrischen Raumes indem wir definieren $d(x, y) := \|x - y\|$. Man überprüft leicht, dass die so definierte Abbildung eine Metrik ist, sie wird als die von der Norm induzierte Metrik bezeichnet. Das für uns bei Weitem wichtigste Beispiel:

Beispiel 5.4 (\mathbb{R}^n mit euklidischer Norm). Definiere die euklidische Norm

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ \|(x_1, \dots, x_n)\| &:= \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}. \end{aligned}$$

Dann ist $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Die Dreiecksungleichung haben wir in Satz 3.60 bewiesen.

Insbesondere im \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3 interpretieren wir diese Norm und die zugehörige Metrik gern als den „richtigen“ Abstand. Das ist jedoch trügerisch. Zunächst können die Koordinaten x_1, \dots, x_n beliebig skaliert sein. Darüber hinaus sind jedoch für praktische Belange häufig die Metriken aus Beispiel 5.2 (iii) und (iv) wichtiger.

Im Fall des komplexen Vektorraums \mathbb{C}^n müssen wir die Definition der Norm leicht verändern:

$$\|(x_1, \dots, x_n)\| := \sqrt{\overline{x_1}x_1 + \dots + \overline{x_n}x_n}.$$

Beispiel 5.5. (i) Die Abbildung

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$$

definiert ebenfalls eine Norm auf dem \mathbb{R}^n . Bereits auf dem \mathbb{R}^n sind also verschiedene Normen möglich. Tatsächlich ist die Wahl der Norm hier aber für viele Belange nicht entscheidend.

(ii) Betrachte die Menge der stetigen Funktionen

$$V = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}.$$

Dann ist durch

$$\|f\|_\infty = \sup \{|f(x)| \mid x \in [0, 1]\}$$

eine Norm auf V definiert.

Wir zeigen die Dreiecksungleichung: Für beliebige stetige $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ und für jedes $x \in [0, 1]$ gilt

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

und damit auch $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

Im Gegensatz zum vorhergehenden Beispiel gibt es auf diesem Funktionenraum viele weitere Normen mit unterschiedlichen Eigenschaften und praktischer Relevanz.

(iii) Analog zu Beispiel 5.2 (v) ist $\|(v, w)\|_{V \times W} := \|v\|_V + \|w\|_W$ eine Norm auf dem direkten Produkt $V \times W$.

Bemerkung 5.6. (i) Sei (X, d) ein metrischer Raum und $Y \subset X$ dann ist $(Y, d|_{Y \times Y})$ ebenfalls ein metrischer Raum.

(ii) Analog sind Untervektorräume (nicht beliebige Teilmengen) normierter Vektorräume ebenfalls normierte Vektorräume.

(iii) Zu einer vorgegebenen Menge gibt es keine „natürliche“ Metrik. Man kann vielmehr auf ein und der selben Menge unterschiedliche Metriken (im Fall von Vektorräumen auch unterschiedliche Normen) mit ganz unterschiedlichen Eigenschaften betrachten. Im konkreten Fall wählt man sich dann die Metrik, die dem Problem am besten angemessen ist.

(iv) Die „Minkowski-Metrik“ die in der Relativitätstheorie eine zentrale Rolle spielt ist keine Metrik im hier eingeführten Sinne.

Definition 5.7 (Kugeln und Beschränktheit). Sei (X, d) ein metrischer Raum, $x \in X$ und $r > 0$. Die Menge

$$B_r(x) := \{y \in X \mid d(y, x) < r\}$$

heißt offene Kugel mit Radius r um x (manchmal auch r -Kugel um x) und die Menge

$$K_r(x) := \{y \in X \mid d(y, x) \leq r\}$$

heißt abgeschlossene Kugel mit Radius r um x .

Eine Teilmenge M von X heißt beschränkt, wenn sie in irgendeiner Kugel enthalten ist.

Die Bezeichnungen „offen“ und „abgeschlossen“ werden sich später erschließen.

5.2 Folgen, Reihen und Grenzwerte

Mittels der soeben eingeführten Begriffe können wir nun Konvergenz von Folgen definieren.

Definition 5.8 (Folgen und Konvergenz). Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Folge in X ist eine Abbildung von \mathbb{N} nach X . Wir schreiben dafür $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oder noch kürzer (x_n) .

Die Folge (x_n) heißt konvergent gegen $x \in X$, wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$d(x_n, x) < \epsilon \text{ für alle } n > N.$$

Der Punkt x heißt in diesem Fall der Grenzwert der Folge (x_n) .

Eine Folge die nicht konvergent ist heißt divergent.

Bemerkung 5.9. Auf den reellen Zahlen stimmt die euklidische Norm mit der Betragsfunktion überein. Man überzeuge sich davon, dass in diesem Fall die neue Definition (Konvergenz von Folgen im metrischen Raum) mit der alten Definition Definition 2.8 übereinstimmt. Die obige Definition ist also eine echte Verallgemeinerung der Konvergenz von reellen Zahlenfolgen.

Satz 5.10. Sei (x_n) eine Folge in einem metrischen Raum (X, d) und $x \in X$. Dann sind äquivalent:

- (i) Die Folge (x_n) konvergiert gegen x .
- (ii) Für jedes $\epsilon > 0$ enthält $B_\epsilon(x)$ alle bis auf endlich viele Folgenglieder.
- (iii) Die Folge (reeller Zahlen) $(d(x_n, x))$ ist eine Nullfolge.

Beweis. Die Aussage (ii) ist lediglich eine Umformulierung der Definition der Konvergenz. Wir zeigen (i) \iff (iii). Es gilt $d(x_n, x) = |d(x_n, x) - 0|$. Damit ist $d(x_n, x) < \epsilon$, genau dann wenn $|d(x_n, x) - 0| < \epsilon$. Die Folge (x_n) konvergiert gegen x , genau dann wenn $d(x_n, x)$ gegen 0 konvergiert. \square

Satz 5.11. Sei $(x^{(n)}) = (x_1^{(n)}, \dots, x_d^{(n)})$ eine Folge in \mathbb{R}^d und $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$. Dann konvergiert $(x^{(n)})$ gegen x , genau dann wenn für jedes $i \in \{1, \dots, d\}$ die Folge $(x_i^{(n)})$ gegen x_i konvergiert.

Beweis. Man überzeugt sich leicht, dass $|y_i| \leq \|y\|$ für alle $y \in \mathbb{R}^n$ und alle $i \in \{1, \dots, d\}$ gilt. Wenn also $(x^{(n)})$ gegen x konvergiert, dann konvergiert nach Satz 5.10 $\|x^{(n)} - x\|$ gegen 0 und damit auch $|x_i^{(n)} - x_i| \leq \|x^{(n)} - x\|$.

Es gelte andererseits $x_i^{(n)} \rightarrow x_i$ für alle $i \in \{1, \dots, d\}$ und es sei $\epsilon > 0$. Dann existiert $N \in \mathbb{N}$, so dass $|x_i^{(n)} - x_i| \leq \frac{\epsilon}{\sqrt{d}}$ für alle $n > N$ und alle $i \in \{1, \dots, d\}$. Es gilt folglich für $n > N$

$$\|x^{(n)} - x\| = \sqrt{(x_1^{(n)} - x_1)^2 + \dots + (x_d^{(n)} - x_d)^2} \leq \sqrt{\frac{\epsilon^2}{d} + \dots + \frac{\epsilon^2}{d}} = \epsilon. \quad \square$$

Satz 5.12. (i) Jede Folge besitzt höchstens einen Grenzwert.

(ii) Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Beweis. Angenommen x und y seien zwei verschiedene Grenzwerte der Folge (x_n) . Aus der Definitheit der Norm folgt dann $d(x, y) > 0$. Da (x_n) sowohl gegen x als auch gegen y konvergiert, existiert N so, dass $d(x_n, x) < d(x, y)/2$ und $d(x_n, y) < d(x, y)/2$ für alle $n > N$. Damit gilt für jedes $n > N$, dass $d(x_n, x) + d(x_n, y) < d(x, y)$ was jedoch im Widerspruch zur Dreiecksungleichung steht.

Zur Beschränktheit: Wenn (x_n) eine Folge ist, die gegen x konvergiert, so existiert per definitionem ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass $d(x_n, x) < 1$ für alle $n > N$. Dann gilt $d(x_n, x) \leq \max \{d(x_1, x), \dots, d(x_N, x), 1\}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. \square

Satz 5.13. Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum über dem Vektorraum \mathbb{K} ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), $(x_n), (y_n)$ Folgen in V mit Grenzwerten x und y und (λ_n) eine Folge in \mathbb{K} mit Grenzwert λ . Dann konvergiert die Folge $(x_n + y_n)$ gegen $x + y$ und die Folge $\lambda_n x_n$ gegen λx .

Beweis. Übung \square

Definition 5.14 (Cauchy-Folge und Vollständigkeit). Eine Folge (x_n) im metrischen Raum (X, d) heißt Cauchy-Folge (alternativ besitzt die Cauchy-Eigenschaft oder erfüllt die Cauchy-Bedingung), wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$d(x_n, x_m) < \epsilon \text{ für alle } n, m > N.$$

Ein metrischer Raum (X, d) heißt vollständig, wenn jede Cauchy-Folge konvergent ist. Ein vollständiger normierter Raum heißt Banachraum.

Satz 5.15. Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge.

Beweis. Sei (x_n) eine konvergente Folge im metrischen Raum (X, d) . Sei $\epsilon > 0$. Da (x_n) konvergent ist, existiert ein Grenzwert $x \in X$ und ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $d(x_n, x) < \epsilon/2$ für alle $n > N$. Dann gilt für alle $n, m > N$, dass

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Die Folge (x_n) ist eine Cauchy-Folge. \square

Beispiel 5.16. (i) Wir wissen bereits, dass der normierte Raum $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ vollständig ist (Satz 2.38).

(ii) Der Raum $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ ist nicht vollständig, denn es gibt Folgen rationaler Zahlen, die gegen einen Grenzwert in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ konvergieren. Sie sind also insbesondere Cauchy-Folgen aber in $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ nicht konvergent.

Bemerkung 5.17. Um an Hand der Definition der Konvergenz zu überprüfen ob eine Folge konvergent ist, muss man ihren Grenzpunkt bereits kennen. Um zu überprüfen ob eine Folge eine Cauchy-Folge ist muss kein Grenzpunkt bekannt sein. Darin liegt die Bedeutung der Vollständigkeit, denn sie erlaubt es auf die Existenz eines Grenzpunktes zu schließen ohne diesen zu kennen.

Satz 5.18. *Der \mathbb{R}^d versehen mit der euklidischen Norm ist vollständig (also ein Banachraum).*

Beweis. Sei $(x^{(n)}) \subset \mathbb{R}^d$ eine Cauchy-Folge. Es gilt für jedes $i \in \{1, \dots, d\}$ auch die Folge $(x_i^{(n)})_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine Cauchy-Folge (Warum?) und damit, da \mathbb{R} vollständig ist, konvergent. Dann ist aber nach 5.11 auch die ursprüngliche Folge konvergent. \square

Definition 5.19 (Reihen und (absolute) Konvergenz). Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum und (x_n) eine Folge in V . Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k$$

ist die Folge der Partialsummen

$$s_n = \sum_{k=1}^n x_k.$$

Falls die Reihe konvergent ist bezeichnen wir den Grenzwert ebenfalls mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k.$$

Die Reihe heißt absolut konvergent falls

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \infty.$$

Satz 5.20. *In Banachräumen sind absolut konvergente Reihen konvergent.*

Beweis. Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ in V absolut konvergent. Es reicht zu zeigen, dass die Partialsummenfolge (s_n) eine Cauchy-Folge ist. Sei dazu $\epsilon > 0$. Bezeichne mit

$$t_n := \sum_{k=1}^n \|x_k\|$$

die Partialsummenfolge der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$. Diese ist monoton wachsend und konvergiert nach Voraussetzung. Insbesondere ist sie also Cauchy-Folge, das heißt es existiert $N \in \mathbb{N}$, so dass $|t_n - t_m| < \epsilon$ für alle $n, m > N$.

Dann gilt für $n > m > N$

$$\|s_n - s_m\| = \left\| \sum_{k=m+1}^n x_k \right\| \leq \sum_{k=m+1}^n \|x_k\| = t_n - t_m = |t_n - t_m| < \epsilon.$$

Die Partialsummenfolge (s_n) ist also eine Cauchy-Folge und damit konvergent. \square

Theorem 5.21 (Umordnungssatz). Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein Banachraum. Sei $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ eine absolut konvergente Reihe und $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung. Dann ist die umgeordnete Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ ebenfalls konvergent mit Grenzwert $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

Beweis. Analog zum Umordnungssatz für Zahlenfolgen Satz 2.59. \square

Bemerkung 5.22. Da wir obigen Satz insbesondere auf die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_{\sigma(n)}\|$ anwenden können, ist die umgeordnete Reihe auch absolut konvergent.

5.3 Offene und abgeschlossene Mengen

Definition 5.23 (Innere Punkte und Randpunkte). Sei (X, d) ein metrischer Raum, $A \subset X$ und $x \in X$.

- (i) Der Punkt x heißt innerer Punkt von A , wenn es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass $B_\epsilon(x) \subset A$,
- (ii) Der Punkt x heißt Randpunkt von A , wenn für jedes $\epsilon > 0$ die Kugel $B_\epsilon(x)$ mindestens je einen Punkt aus A sowie aus $X \setminus A$ enthält.
- (iii) Die Menge aller inneren Punkte von A heißt das Innere von A und wird mit $\overset{\circ}{A}$ bezeichnet.
- (iv) Die Menge aller Randpunkte von A heißt Rand von A und wird mit ∂A bezeichnet.
- (v) Die Menge $A \cup \partial A$ heißt Abschluss von A und wird mit \overline{A} bezeichnet

Beispiel 5.24. (i) Betrachte die Menge

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y < 1\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Dann sind (Warum?)

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{A} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y < 1\} \\ \partial A &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in \{0, 1\}\} \\ \overline{A} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1\}.\end{aligned}$$

(ii) Betrachte $A = \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Dann gelten (Warum?)

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{A} &= \emptyset \\ \partial A &= \mathbb{R} \\ \overline{A} &= \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Bemerkung 5.25. (i) Aus der Definition ist ersichtlich, dass ein innerer Punkt von A stets selbst in A liegt es gilt also $\overset{\circ}{A} \subset A$.

- (ii) Randpunkte von A können in A liegen, müssen es jedoch nicht.
- (iii) Jeder Punkt in A ist entweder ein innerer Punkt oder ein Randpunkt von A (niemals beides). Es gilt also $A \subset \overset{\circ}{A} \cup \partial A$ und $\overset{\circ}{A} \cap \partial A = \emptyset$.
- (iv) Man überzeugt sich leicht, dass der Rand von A und der Rand von $X \setminus A$ übereinstimmen.

Satz 5.26. *Sei (X, d) ein metrischer Raum, $A \subset X$ und $x \in X$ innerer Punkt oder Randpunkt von A . Dann gibt es eine Folge (x_n) in A die gegen x konvergiert.*

Beweis. Falls $x \in A$ (also insbesondere falls x innerer Punkt von A ist), so liegt die konstante Folge $(x)_{n \in \mathbb{N}}$ in A (und ist natürlich konvergent gegen x). Sei also $x \notin A$ (und damit Randpunkt von A). Für jedes $n \in \mathbb{N}$ wähle einen Punkt $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x) \cap A$. Diese Menge ist nicht leer, da x Randpunkt von A ist. Wir zeigen nun $x_n \rightarrow x$. Sei dazu $\epsilon > 0$. Dann existiert $N \in \mathbb{N}$, so dass $\frac{1}{N} < \epsilon$. Sei $n > N$ dann gilt nach der Definition der Folge (x_n) , dass $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x) \subset B_{\frac{1}{N}}(x)$ also

$$d(x_n, x) < \frac{1}{N} < \epsilon.$$

Damit konvergiert die Folge gegen x . □

Definition 5.27 (Offene und abgeschlossene Mengen). Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt

- (i) offen wenn jeder ihrer Punkte innerer Punkt von A ist,
- (ii) abgeschlossen wenn die Menge A jeden ihrer Randpunkte enthält.
- (iii) Umgebung von x falls $x \in \overset{\circ}{A}$, falls es also $\epsilon > 0$ gibt, so dass $B_\epsilon(x) \subset A$.

Bemerkung 5.28. Aus der Definition ist ersichtlich, dass U genau dann Umgebung von x ist, wenn x innerer Punkt von U ist. Insbesondere sind offene Teilmengen Umgebungen für jedes ihrer Elemente.

Satz 5.29. Eine Teilmenge A eines metrischen Raumes (X, d) ist offen genau dann, wenn ihr Komplement $X \setminus A$ abgeschlossen ist.

Beweis. Per definitionem ist die Menge A offen, genau dann wenn sie nur aus inneren Punkten von A besteht. Da jeder Punkt in A entweder innerer Punkt oder Randpunkt von A ist, ist das der Fall genau dann wenn A keinen Randpunkt von A enthält. Da der Rand von A und der Rand von $X \setminus A$ übereinstimmen, gilt das genau dann wenn A keinen Randpunkt von $X \setminus A$ enthält also genau dann wenn $X \setminus A$ alle Randpunkte von $X \setminus A$ enthält. Das ist per definitionem der Fall genau dann wenn $X \setminus A$ abgeschlossen ist. □

Bemerkung 5.30. Der vorhergehende Satz bedeutet **nicht**, dass jede Teilmenge entweder offen oder abgeschlossen ist. Siehe dazu die Beispiele Beispiel 5.24.

Beispiel 5.31. Sei (X, d) ein metrischer Raum, $x \in X$ und $r > 0$. Die offene Kugel $B_r(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$ ist eine offene, die abgeschlossene Kugel $\{y \in X \mid d(x, y) \leq r\}$ eine abgeschlossene Menge.

Beweis. Übung □

Bemerkung 5.32. Ein Spezialfall des vorhergehenden Beispiels sind Intervalle der Form (a, b) – offene Intervalle – und $[a, b]$ – abgeschlossene Intervalle – für $a < b$ Elemente der reellen Zahlen.

Satz 5.33. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$. Die Menge A ist abgeschlossen genau dann, wenn für jede konvergente Folge (x_n) in A auch ihr Grenzwert in A liegt.

Beweis. Sei zunächst A abgeschlossen, $(x_n) \subset A$ eine Folge und x ihr Grenzwert. Für beliebiges $\epsilon > 0$ existiert $n \in \mathbb{N}$, so dass $x_n \in B_\epsilon(x)$. Das heißt, in jeder ϵ -Kugel liegt mindestens ein Punkt von A , x ist also innerer Punkt von A oder Randpunkt von A . Innere Punkte von A liegen stets in A , Randpunkte von A liegen ebenfalls in A da A abgeschlossen ist.

Erfülle nun A die Eigenschaft, dass der Grenzwert jeder konvergenten Folge in A wieder in A liegt. Sei $x \in \partial A$. Dann existiert nach Satz 5.26 eine Folge (x_n) in A die gegen x konvergiert. Nach Voraussetzung ist dann $x \in A$. Damit haben wir $\partial A \subset A$ gezeigt, A ist also abgeschlossen. \square

Satz 5.34. Sei (X, d) ein metrischer Raum und τ die Menge aller offenen Teilmengen von X . Es gelten:

- (i) die leere Menge \emptyset und der ganze Raum X sind in τ ,
- (ii) die Vereinigung beliebig vieler Mengen aus τ ist wiederum in τ ,
- (iii) der Schnitt endlich vieler Mengen aus τ ist wiederum in τ .

Beweis. Übung \square

Bemerkung 5.35. • Das System von Teilmengen τ in obigem Satz bezeichnet man als die von der Metrik d induzierte Topologie. (Topologien sind Strukturen – noch allgemeiner als metrische Räume – die es erlauben über Begriffe wie Konvergenz und Stetigkeit zu reden)

- Der obige Satz impliziert für abgeschlossene Mengen mittels Satz 5.29 und der De Morganschen Regeln:
 - (i) die leere Menge \emptyset und der ganze Raum X sind abgeschlossen,
 - (ii) der Schnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen,
 - (iii) die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.
- Unendliche Schnitte offener Mengen müssen nicht mehr offen, unendliche Vereinigungen abgeschlossener Mengen nicht mehr abgeschlossen sein wie die folgenden Beispiele zeigen

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) = \{0\}$$

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [1/n, 2] = (0, 2].$$

Satz 5.36. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$. Die Menge $\overset{\circ}{A}$ ist offen, die Mengen ∂A und \overline{A} sind abgeschlossen.

Beweis. Sei zunächst $x \in \overset{\circ}{A}$. Wir wissen, dass x innerer Punkt von A ist und wir wollen zeigen, dass es innerer Punkt von $\overset{\circ}{A}$ ist. Nach Voraussetzung existiert $\epsilon > 0$, so dass $B_\epsilon(x) \subset A$. Sei nun $y \in B_\epsilon(x)$. Nach Beispiel 5.31 ist $B_\epsilon(x)$ offen, das heißt es existiert $\delta > 0$, so dass $B_\delta(y) \subset B_\epsilon(x) \subset A$ ist. Damit ist y innerer Punkt von A und da $y \in B_\epsilon(x)$ beliebig war haben wir $B_\epsilon(x) \subset \overset{\circ}{A}$ gezeigt. Dann ist aber x innerer Punkt von $\overset{\circ}{A}$ und da $x \in \overset{\circ}{A}$ beliebig war ist $\overset{\circ}{A}$ offen.

Setze nun $B := X \setminus A$. Dann gilt (Bemerkung 5.25) $\partial A = \partial B$. Damit erhält man

$$X = A \cup B = \overset{\circ}{A} \cup \partial A \cup \overset{\circ}{B} \cup \partial B = \overset{\circ}{A} \cup \partial A \cup \overset{\circ}{B} \quad (5.1)$$

Da A und B disjunkt sind, gilt das auch für $\overset{\circ}{A} \subset A$ und $\overset{\circ}{B} \subset B$. Außerdem ist $\partial A = \partial B$ disjunkt zu $\overset{\circ}{A}$ und $\overset{\circ}{B}$ (nochmals Bemerkung 5.25). Wir haben also die disjunkte Zerlegung $X = \overset{\circ}{A} \cup \partial A \cup \overset{\circ}{B}$. Damit sind die Mengen $\overset{\circ}{A} \cup \partial A = X \setminus \overset{\circ}{B}$ und $\partial A = X \setminus (\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B})$ abgeschlossen. \square

Satz 5.37. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$. Es gelten

$$\begin{aligned} \bigcup_{O \text{ offen, } O \subset A} O &= \overset{\circ}{A} \text{ und} \\ \bigcap_{C \text{ abgeschlossen, } A \subset C} C &= \overline{A} \end{aligned}$$

das heißt $\overset{\circ}{A}$ ist die größte offene Teilmenge von A , \overline{A} ist die kleinste abgeschlossene Teilmenge von X die A enthält.

Beweis. Da $\overset{\circ}{A}$ offen und in A enthalten ist gilt in jedem Fall

$$\bigcup_{O \subset A \text{ offen}} O \supset \overset{\circ}{A}.$$

Sei nun $O \subset A$ offen und $x \in O$. Dann existiert $\epsilon > 0$, so dass $B_\epsilon(x) \subset O \subset A$ also ist x innerer Punkt von A . Da das für jedes $x \in O$ gilt haben wir gezeigt, dass $O \subset \overset{\circ}{A}$ ist. Da das für jedes offene $O \subset A$ gilt ist auch

$$\bigcup_{O \subset A \text{ offen}} O \subset \overset{\circ}{A}.$$

Die zweite Aussage erhält man nun durch Komplementbildung. \square

Satz 5.38. Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $A \subset X$ abgeschlossen. Dann ist (A, d) ebenfalls vollständig.

Beweis. Übung \square

Bemerkung 5.39. Es ist wichtig sich bewusst zu machen, dass topologische Eigenschaften – Konvergenz einer Folge (x_n) , Offenheit/Abgeschlossenheit einer Menge A (später

Stetigkeit von Funktionen, Kompaktheit von Mengen ...) – nicht nur von der Folge (x_n) oder Menge A abhängen, sondern auch vom umgebenden metrischen Raum (X, d) .

So ist die Folge $(\frac{1}{n})$ im Raum $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ konvergent, in $((0, 1), |\cdot|)$ jedoch nicht (der Grenzwert liegt nicht im Raum).

In ähnlicher Weise ist $(0, 1)$ im Raum $((0, 1), |\cdot|)$ abgeschlossen (der ganze Raum ist stets abgeschlossen), nicht jedoch im Raum $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

5.4 Grenzwerte von Abbildungen

Bisher haben wir uns mit Funktionen von $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ beschäftigt. Wichtig sind jedoch auch Abbildungen mit komplizierteren Definitionen und Wertebereichen. Der Definitionsbereich kann beispielsweise von mehr als nur einer Raumkoordinaten und gegebenenfalls noch von der Zeit abhängen. Darüber hinaus kann die Abbildung auch Vektorwertig, Tensorwertig etc. sein. Mathematisch können wir alle diese Situationen – und noch viele Weitere – gemeinsam behandeln.

Definition 5.40 (Häufungspunkt, isolierter Punkt). Sei (X, d) ein metrischer Raum und $x \in X$. Der Punkt x heißt

- (i) isolierter Punkt, wenn es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass $B_\epsilon(x) = \{x\}$,
- (ii) Häufungspunkt, wenn er kein isolierter Punkt ist.

Definition 5.41 (Punktierte Umgebung, punktierte Kugel). Sei (X, d_X) ein metrischer Raum und $x \in X$ ein Häufungspunkt. Eine Menge \dot{U} heißt punktierte Umgebung von x , wenn $\dot{U} \cup \{x\}$ eine Umgebung von x ist. Sei $r > 0$ dann ist die punktierte Kugel definiert als $\dot{B}_r(x) = B_r(x) \setminus \{x\}$.

Bemerkung 5.42. Durch die Voraussetzung, dass x ein Häufungspunkt von X ist, enthält jede ϵ -Kugel um x noch mindestens einen weiteren Punkt. Die punktierten Kugeln um x , und damit die punktierten Umgebungen um x , die jeweils eine punktierte Kugel enthalten müssen, sind also nicht leer.

Definition 5.43 (Grenzwert von Abbildungen). Seien (X, d_X) , (Y, d_Y) metrische Räume, $x \in X$ ein Häufungspunkt und \dot{U} eine punktierte Umgebung von x . Sei $f : \dot{U} \rightarrow Y$ eine Abbildung. Dann konvergiert f in x gegen $y \in Y$ (und y heißt Grenzwert von f im Punkt x), wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass $f(x') \in B_\epsilon(y)$ für alle $x' \in \dot{B}_\delta(x)$. Wir schreiben $y = \lim_{x' \rightarrow x} f(x')$.

Beispiel 5.44. Definiere $f, g : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) := \|x\|^2$$
$$g(x) := \frac{1}{\|x\|}.$$

Dann ist f in 0 konvergent gegen 0, denn für jedes $\epsilon > 0$ und $\delta = \sqrt{\epsilon}$ gilt

$$|f(x) - 0| = \|x\|^2 < \epsilon \text{ falls } \|x - 0\| = \|x\| < \delta.$$

Die Funktion g ist in 0 divergent (Warum?).

Satz 5.45. Seien (X, d_X) , (Y, d_Y) metrische Räume, $x \in X$ ein Häufungspunkt, \dot{U} eine punktierte Umgebung von x und $f : \dot{U} \rightarrow Y$ eine Abbildung. Die Abbildung f konvergiert in x gegen $y \in Y$, genau dann wenn für jede Folge (x_n) in \dot{U} mit $x_n \rightarrow x$ gilt, dass $(f(x_n))$ gegen y konvergiert.

Beweis. Es gelte zunächst $\lim_{x' \rightarrow x} f(x') = y$ und (x_n) sei eine gegen x konvergente Folge. Sei $\epsilon > 0$ dann existiert nach Voraussetzung $\delta > 0$, so dass $f(x') \in B_\epsilon(y)$ für alle $x' \in \dot{B}_\delta(x)$. Da $x_n \rightarrow x$ existiert $N \in \mathbb{N}$, so dass $x_m \in \dot{B}_\delta(x)$ für alle $m > N$. Dann gilt aber $f(x_m) \in B_\epsilon(y)$ für alle $m > N$ und wir haben gezeigt, dass $(f(x_n))$ gegen y konvergiert.

Es gelte nun dass $f(x_n) \rightarrow y$, wann immer die Folge (x_n) aus \dot{U} gegen x konvergiert. Angenommen f konvergiert in x nicht gegen y , das heißt es existiert ein $\epsilon > 0$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x)$ mit $f(x_n) \notin B_\epsilon(y)$. Die Folge x_n konvergiert gegen x da $d_X(x_n, x) < \frac{1}{n} \rightarrow 0$. Die Folge $f(x_n)$ konvergiert nicht gegen y , da $d_Y(f(x_n), y) \geq \epsilon$. Da das im Widerspruch zur Voraussetzung steht, muss f in x gegen y konvergieren. \square

Korollar 5.46. *Seien (X, d) ein metrischer Raum, $x \in X$ ein Häufungspunkt, \dot{U} eine punktierte Umgebung von x und $f, g : \dot{U} \rightarrow \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) Funktionen. Es gelte $\lim_{x' \rightarrow x} f(x') = y_1$ und $\lim_{x' \rightarrow x} g(x') = y_2$. Dann konvergiert $f + g$ in x gegen $y_1 + y_2$ und $f \cdot g$ gegen $y_1 y_2$. Ist $y_1 \neq 0$, dann ist $1/f$ auf einer punktierten Umgebung von x definiert und $1/f$ konvergiert gegen $1/y_1$.*

Beweis. Sei (x_n) eine beliebige Folge in X mit $x_n \rightarrow x$. Dann gilt nach Voraussetzung $f(x_n) \rightarrow y_1$ und $g(x_n) \rightarrow y_2$. Daraus folgt mittels der Konvergenzregeln für Zahlenfolgen $f(x_n) + g(x_n) \rightarrow y_1 + y_2$ und $f(x_n)g(x_n) \rightarrow y_1 y_2$. Damit gilt nach Satz 5.45, dass die Funktionen $\lim_{x' \rightarrow x} f + g = y_1 + y_2$, sowie $\lim_{x' \rightarrow x} f \cdot g = y_1 y_2$.

Sei nun zusätzlich $y_1 \neq 0$, das heißt $|y_1| > 0$. Da f in x gegen y_1 konvergiert, existiert $\delta > 0$, so dass $f(x') \in B_{\frac{|y_1|}{2}}(y_1)$ für alle $x' \in \dot{B}_\delta(x)$. Für solche x' gilt also insbesondere (umgekehrte Dreiecksungleichung) $|f(x')| > |y_1| - |f(x') - y_1| > \frac{|y_1|}{2}$. Damit ist die Funktion $1/f$ auf der punktierten Umgebung $\dot{B}_\delta(x)$ von x definiert. Es gilt jetzt wieder für jede gegen x konvergente Folge (x_n) , dass $f(x_n) \rightarrow y_1$ und damit $\frac{1}{f(x_n)} \rightarrow \frac{1}{y_1}$. Wir verwenden nochmals Satz 5.45 und erhalten $\lim_{x' \rightarrow x} \frac{1}{f(x')} = \frac{1}{y_1}$. \square

5.5 Stetigkeit

Der Begriff der Stetigkeit formalisiert die Eigenschaft einer Funktion f , dass sich die Funktionswerte $f(x)$ nicht zu stark ändern, wenn sich das Argument x nicht zu stark ändert. Je nach dem was genau man unter „zu stark ändern“ versteht ergeben sich unterschiedliche Stetigkeitsbegriffe die in unterschiedlichen Situationen nützlich sein können und von denen wir einige im Folgenden untersuchen wollen.

Viele funktionale Zusammenhänge die in der Natur vorkommen (Position eines Objektes in Abhängigkeit von der Zeit, Lufttemperatur in Abhängigkeit vom Ort, ...) sind stetig.

Definition 5.47 (Stetigkeit). Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt stetig im Punkt $x_0 \in X$, wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass $f(x) \in B_\epsilon(f(x_0))$ für alle $x \in B_\delta(x_0)$. Wir sagen f ist stetig, wenn f in jedem Punkt von X stetig ist.

Beispiel 5.48. (i) Sei (X, d) ein metrischer Raum. Die Identitätsabbildung $\text{id} : X \rightarrow X, x \mapsto x$ ist stetig in jedem Punkt.

(ii) Betrachte $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$f(x, y) = (x, -y).$$

Wir wollen zeigen, dass f stetig ist. Es gilt für $(x, y), (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \|f(x, y) - f(x_0, y_0)\|^2 &= \|(x - x_0, y_0 - y)\|^2 = (x - x_0)^2 + (y_0 - y)^2 \\ &= \|(x, y) - (x_0, y_0)\|. \end{aligned}$$

Für beliebiges $\epsilon > 0$ können wir also $\delta = \epsilon$ wählen und erhalten dass aus $(x, y) \in B_\delta(x_0, y_0)$ folgt $f(x, y) \in B_\epsilon(f(x_0, y_0))$. Da der Punkte (x_0, y_0) beliebig war, ist f damit stetig.

(iii) Betrachte die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} 0 & xy = 0 \\ 1 & xy \neq 0 \end{cases}.$$

Die Funktion ist offensichtlich nicht Stetig im Koordinatenursprung, da jede noch so kleine Umgebung sowohl Punkte mit Funktionswert 1 als auch Punkte mit Funktionswert 0 enthält. Halten wir jeweils eine Koordinate fest, so ergibt sich

$$f(0, y) = 0 \text{ sowie } f(x, 0) = 0$$

für beliebiges $x, y \in \mathbb{R}$. Diese beiden Funktionen sind offensichtlich stetig. Das Beispiel zeigt, dass es für Stetigkeit nicht ausreichend ist, nur das Verhalten entlang der Koordinatenlinien zu betrachten.

Bemerkung 5.49. (i) Leicht umformuliert bedeutet die Stetigkeit von f in x , dass für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass $f(B_\delta(x)) \subset B_\epsilon(f(x))$.

(ii) Stetigkeit (im Punkt x_0) ist eine sogenannte lokale Eigenschaft, das heißt ob f in x_0 stetig ist oder nicht kann man entscheiden, wenn man f nur in einer beliebig kleinen Umgebung von x_0 kennt. Formal lautet die Aussage: Seien f, g Funktionen von (X, d_X) nach (Y, d_Y) , U eine Umgebung von x_0 und $f|_U = g|_U$. Dann ist f in x_0 stetig, genau dann wenn g in x_0 stetig ist.

Satz 5.50. Seien (X, d_X) , (Y, d_Y) und (Z, d_Z) metrische Räume, $x_0 \in X$, $g : X \rightarrow Y$ und $f : Y \rightarrow Z$ Abbildungen. Wenn g stetig in x_0 ist und f stetig in $g(x_0)$, dann ist $f \circ g$ stetig in x_0 .

Beweis. Sei $\epsilon > 0$. Nach Voraussetzung existiert $\delta > 0$, so dass $f(y) \in B_\epsilon(f(g(x_0)))$ für alle $y \in B_\delta(g(x_0))$. Außerdem existiert $\rho > 0$, so dass $g(x) \in B_\delta(g(x_0))$ für alle $x \in B_\rho(x_0)$. Dann gilt für jedes $x \in B_\rho(x_0)$, dass $g(x) \in B_\delta(g(x_0))$ und damit auch $f \circ g(x) = f(g(x)) \in B_\epsilon(f \circ g(x_0))$. \square

Definition 5.51 (Lipschitz-Stetigkeit, Kontraktion). Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt Lipschitz-stetig, wenn es ein $L > 0$ gibt, so dass

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq L \cdot d_X(x, y)$$

für alle $x, y \in X$ gilt. Die Konstante L heißt dann Lipschitz-Konstante für die Funktion f . Die Abbildung f heißt Kontraktion falls $d_Y(f(x), f(y)) \leq d_X(x, y)$.

Beispiel 5.52. Betrachte die Funktionen $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(x) &:= x^2 \\ g(x) &:= \sqrt{x}. \end{aligned}$$

Die Funktion f ist Lipschitz-stetig da

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |x - y| |x + y| \leq 2|x - y|.$$

Die Funktion g ist nicht Lipschitz-stetig, da

$$\frac{|g(x) - g(0)|}{|x - 0|} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow \infty$$

für x gegen 0. Wir wissen bereits, dass g dennoch stetig ist.

Satz 5.53. Jede Lipschitz-stetige Funktion ist stetig.

Beweis. Seien (X, d_X) , (Y, d_Y) metrische Räume, $x_0 \in X$ und $f : X \rightarrow Y$ eine Lipschitz-stetige Funktion mit Lipschitz-Konstante L . Sei $\epsilon > 0$. Dann gilt für jedes $x \in B_{\frac{\epsilon}{L}}(x_0)$

$$d_Y(f(x), f(x_0)) \leq L \cdot d_X(x, x_0) < \epsilon$$

und die Funktion ist stetig in x_0 . Da x_0 beliebig gewählt war ist f überall stetig. \square

Beispiel 5.54. (i) Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Für die Abbildung $\pi_i : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$

$$x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$$

gilt

$$|\pi(x) - \pi(y)| = |x_i - y_i| \leq \|x - y\|.$$

Sie ist also eine Kontraktion und somit stetig.

(ii) Sei (X, d) ein metrischer Raum und $(X \times X, d_{X \times X})$ das Produkt von X mit sich selbst und der Produktmetrik (Beispiel 5.2 (v)). Wir zeigen, dass die Metrik, also die Abbildung

$$\begin{aligned} d : X \times X &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto d(x, y) \end{aligned}$$

eine Kontraktion von $(X \times X, d_{X \times X})$ nach \mathbb{R} ist (insbesondere also stetig).

Für $x_1, x_2, y_1, y_2 \in X$ gilt nach der Dreiecksungleichung

$$d(x_1, y_1) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, y_1) \leq d(x_1, x_2) + d(y_2, y_1) + d(x_2, y_2).$$

Damit erhalten wir

$$|d(x_1, y_1) - d(x_2, y_2)| \leq d(x_1, x_2) + d(y_1, y_2) = d_{X \times X}((x_1, x_2), (y_1, y_2)).$$

(iii) Analog gilt mit der umgekehrten Dreiecksungleichung

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$$

und $\|\cdot\|$ ist eine Kontraktion von $(V, \|\cdot\|)$ nach \mathbb{R} also insbesondere stetig.

Satz 5.55. Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und $f : X \rightarrow Y$. Die Abbildung f ist stetig in $x \in X$ genau dann, wenn entweder x isolierter Punkt von X ist, oder $\lim_{x' \rightarrow x} f(x') = f(x)$ gilt.

Beweis. Sei zunächst f stetig. Wenn x isolierter Punkt ist, ist nichts zu zeigen. Sei also x Häufungspunkt von X . Sei $\epsilon > 0$, dann existiert wegen der Stetigkeit $\delta > 0$, so dass $f(x') \in B_\epsilon(f(x))$ für alle $x' \in B_\delta(x)$ also insbesondere für alle $x' \in \dot{B}_\delta(x)$. Damit gilt $\lim_{x' \rightarrow x} f(x') = f(x)$.

Es sei nun x isolierter Punkt von X , das heißt es existiert $\delta > 0$, so dass $B_\delta(x) = \{x\}$. Dann ist $f(B_\delta(x)) = \{f(x)\} \subset B_\epsilon(f(x))$ für jedes $\epsilon > 0$ und damit f stetig in x .

Sei schließlich x Häufungspunkt von X und es gelte $\lim_{x' \rightarrow x} f(x') = f(x)$. Die Grenzwertbedingung bedeutet gerade, dass für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass $f(\dot{B}_\delta(x)) \subset B_\epsilon(f(x))$. Dann gilt aber auch $f(B_\delta(x)) \subset B_\epsilon(f(x))$ also ist f stetig in x . \square

Mit dem obigen Satz können wir nun Aussagen über Grenzwerte von Funktionen in entsprechende Aussagen über stetige Funktionen übersetzen. So zum Beispiel die folgenden Korollare deren Beweise dem Leser zur eigenständigen Übung überlassen werden. Dazu macht man sich zunächst bewusst, dass eine Folge (x_n) genau dann gegen einen isolierten Punkt x konvergiert, wenn sie ab einem bestimmten Index konstant gleich x ist.

Korollar 5.56. *Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Dann ist f stetig in $x \in X$, genau dann wenn für jede Folge (x_n) in X , die gegen x konvergiert auch $(f(x_n))$ gegen $f(x)$ konvergiert.*

Korollar 5.57. *Seien $f_1, \dots, f_n : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen. Dann ist die Abbildung $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x \mapsto (f_1(x), \dots, f_n(x))$ stetig im Punkt x_0 , genau dann wenn f_i für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ stetig im Punkt x_0 ist.*

Korollar 5.58. *Seien (X, d) ein metrischer Raum und $f, g : X \rightarrow \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) Funktionen die stetig in $x \in X$ sind, dann sind die Funktionen $f + g$ und $f \cdot g$ stetig in x . Ist $f(x) \neq 0$, dann ist $1/f$ auf einer Umgebung von x definiert und in x stetig.*

Beispiel 5.59. Für $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n) \in \mathbb{N}_0^n$ und $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) definieren wir

$$x^\eta := x_1^{\eta_1} x_2^{\eta_2} \cdots x_n^{\eta_n}.$$

Dabei bezeichnen wir η als Multiindex. Wir setzen außerdem $|\eta| := \eta_1 + \cdots + \eta_n$. Seien $c_\eta \in \mathbb{K}$ Konstanten für jedes η mit $|\eta| \leq N$, dann heißt die Funktion

$$f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K} \\ x \mapsto \sum_{\eta, |\eta| \leq N} c_\eta x^\eta$$

Polynom in n Variablen (über dem Körper \mathbb{K}). Solche Polynome sind stetig.

Bemerkung 5.60. Im Kontext von Polynomen (und später Potenzreihen) interpretieren wir den Ausdruck 0^0 , der auftreten kann wenn $\eta_i = x_i = 0$ ist, als 1.

Der folgende Satz ist eine Charakterisierung stetiger Funktionen, die insbesondere in Beweisen oft hilfreich ist. Wir erinnern uns, dass das Urbild einer Menge U unter einer Abbildung $f : X \rightarrow Y$, die Menge aller Punkte ist, die nach U abgebildet werden, das heißt

$$f^{-1}(U) = \{x \in X \mid f(x) \in U\}.$$

Satz 5.61. *Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung.*

- (i) *Die Abbildung f ist stetig in $x \in X$ genau dann wenn $f^{-1}(U)$ eine Umgebung von x ist für jede Umgebung U von $f(x)$.*

- (ii) Die Abbildung f ist stetig (in jedem Punkt), genau dann wenn $f^{-1}(O)$ offen ist für jede offene Menge $O \subset Y$.
- (iii) Die Abbildung f ist stetig (in jedem Punkt), genau dann wenn $f^{-1}(C)$ abgeschlossen ist für jede abgeschlossene Menge $C \subset Y$.

Beweis. Sei f stetig in x und U eine Umgebung von $f(x)$. Dann existiert $\epsilon > 0$ so, dass $B_\epsilon(f(x)) \subset U$. Wegen der Stetigkeit existiert $\delta > 0$ so, dass $f(B_\delta(x)) \subset B_\epsilon(f(x))$ oder – mit anderen Worten – $B_\delta(x) \subset f^{-1}(B_\epsilon(f(x))) \subset f^{-1}(U)$. Damit ist $f^{-1}(U)$ eine Umgebung von x .

Sei andererseits $f^{-1}(U)$ Umgebung von x für jede Umgebung U von $f(x)$ und sei $\epsilon > 0$. Dann ist $f^{-1}(B_\epsilon(f(x)))$ Umgebung von x und daher existiert $\delta > 0$ so, dass $B_\delta(x) \subset f^{-1}(B_\epsilon(f(x)))$ oder – mit anderen Worten – $f(B_\delta(x)) \subset B_\epsilon(f(x))$. Damit ist die Stetigkeit von f im Punkt x gezeigt.

Der Beweis der beiden anderen Aussagen wird zur Übung überlassen. □

Der obige Satz kann sowohl dazu benutzt werden, die Stetigkeit von Funktionen nachzuweisen, als auch um Offenheit oder Abgeschlossenheit bestimmter Mengen zu zeigen.

Beispiel 5.62. Betrachte die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \|x\|. \end{aligned}$$

Wir wissen bereits, dass diese Funktion stetig ist. Sei $r > 0$. Dann folgt mit dem vorhergehenden Satz, dass die Sphäre mit Radius r

$$f^{-1}(\{r\}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = r\}$$

und die abgeschlossene Kugel mit Radius r

$$f^{-1}([0, r]) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq r\} = K_r(0)$$

abgeschlossen sind, und die offene Kugel

$$f^{-1}((-1, r)) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < r\} = B_r(0)$$

offen ist.

Definition 5.63 (Teilfolge, Folgenkompaktheit). Sei X ein metrischer Raum, $(x_n) \subset X$ und $(n_k) \subset \mathbb{N}$ eine streng monoton wachsende Folge. Dann heißt $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge von (x_n) .

Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt (folgen-)kompakt falls jede Folge $(x_n) \subset A$ eine in A konvergente Teilfolge besitzt.

Bemerkung 5.64. Man überzeugt sich leicht, dass falls (x_n) gegen x konvergiert auch jede ihrer Teilfolgen gegen den selben Grenzwert konvergiert. Andererseits gibt es divergente Folgen mit konvergenten Teilfolgen und mit gegebenenfalls unterschiedlichen Grenzwerten. Zum Beispiel besitzt die Folge $x_n = (-1)^n$ die Teilfolgen $x_{2k} = 1$ mit Grenzwert 1 sowie $x_{2k+1} = -1$ mit Grenzwert -1 .

Beispiel 5.65. Betrachte $X = \mathbb{R}$. Dann sind die Teilmengen $(0, 1)$ sowie \mathbb{N} nicht kompakt. Im ersten Fall besitzt die Folge $x_n = \frac{1}{n}$ keine in $(0, 1)$ konvergente Teilfolge. Im zweiten Fall die Folge $x_n = n$.

Satz 5.66. *Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist kompakt, genau dann wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.*

Beweis. Sei zunächst A kompakt. Angenommen A wäre nicht abgeschlossen, dann existiert ein Randpunkt $x \in \partial A \setminus A$. Sei $(x_n) \subset A$ eine gegen x konvergente Folge. Dann konvergiert auch jede ihrer Teilfolgen gegen x , ist aber nicht in A konvergent da $x \notin A$. Angenommen A wäre nicht beschränkt, dann enthält $B_n(0)$ für kein n ganz A . Wir können also eine Folge $(x_n) \subset A$ wählen mit $\|x_n\| \geq n$. Diese Folge kann keine konvergente Teilfolge enthalten denn falls (x_{n_k}) gegen x konvergiert muss wegen der Stetigkeit der Norm auch $\|x_{n_k}\| \rightarrow \|x\|$ gelten aber es gilt andererseits $\|x_{n_k}\| \geq n_k \rightarrow \infty$.

Wir zeigen die andere Richtung für den Fall $n = 1$, der Beweis kann jedoch ohne weiteres auf beliebige n verallgemeinert werden. Sei also $A \subset \mathbb{R}$ beschränkt und abgeschlossen, dann gilt $A \subset I_1 := [-K, K)$ für $K > 0$ hinreichend groß. Sei $(x_n) \subset A$ eine Folge. Wir definieren nun rekursiv Intervalle I_k wie folgt. Sei $I_k = [a, b)$ ein Intervall so, dass $x_n \in I_k$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$. Wir halbieren nun das Intervall und wählen

$$\text{entweder } I_{k+1} = \left[a, \frac{b-a}{2} \right) \text{ oder } I_{k+1} = \left[\frac{b-a}{2}, b \right)$$

so, dass $x_n \in I_{k+1}$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$. Auf diese Weise erhalten wir eine Folge von ineinandergeschachtelten Intervallen deren Länge $2^{-k+1}K$ beträgt.

Wir setzen nun $n_1 = 1$ und definieren rekursiv, also für bereits bekannte n_1, \dots, n_k , n_{k+1} als den kleinsten Index so, dass $n_{k+1} > \max\{n_1, \dots, n_k\}$ und $x_{n_{k+1}} \in I_{k+1}$. Nach Konstruktion der Intervalle I_k existiert stets so ein Index. Wir betrachten nun die Teilfolge (x_{n_k}) . Für $l > k$ sind sowohl x_{n_k} als auch x_{n_l} in I_k enthalten, es gilt also

$$|x_{n_k} - x_{n_l}| \leq 2^{-k+1}K.$$

Da die rechte Seite für $k \rightarrow \infty$ gegen 0 konvergiert, ist die Folge (x_{n_k}) eine Cauchy-Folge und somit konvergent. Schließlich benutzen wir die Abgeschlossenheit von A um zu schlussfolgern, dass auch der Grenzwert in A liegt. \square

Satz 5.67. *Stetige Abbildungen bilden kompakte Mengen auf kompakte Mengen ab.*

Beweis. Sei $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung zwischen metrischen Räumen und $A \subset X$ kompakt. Wir wollen zeigen, dass $f(A)$ ebenfalls kompakt ist. Sei also $(y_n) \subset f(A)$ eine

Folge. Nach Definition von $f(A)$ existiert dann eine Folge $(x_n) \subset A$ so, dass $f(x_n) = y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da A kompakt ist, existiert eine Teilfolge (x_{n_k}) mit $x_{n_k} \rightarrow x \in A$. Dann gilt auf Grund der Stetigkeit von f auch $f(x_{n_k}) \rightarrow f(x) \in f(A)$, die Folge (y_n) hat also die in $f(A)$ konvergente Teilfolge (y_{n_k}) . \square

Bemerkung 5.68. Stetige Abbildungen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ bilden also beschränkte, abgeschlossene Mengen auf beschränkte, abgeschlossene Mengen ab. Im allgemeinen werden jedoch weder abgeschlossene Mengen auf abgeschlossene Mengen abgebildet, noch beschränkte Mengen auf beschränkte Mengen. So gilt beispielsweise für die stetige Funktion

$$f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{x}$$

$f((0, 1)) = (1, \infty)$ sowie $f([1, \infty)) = (0, 1]$.

Korollar 5.69. Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge und $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, dann nimmt f auf A sein Maximum an, das heißt es existiert $x \in A$, so dass $f(y) \leq f(x)$ für alle $y \in A$.

Beweis. Wir wissen bereits, dass $f(A)$ kompakt ist. Wir zeigen daher, dass kompakte Teilmenge von $K \subset \mathbb{R}$ ein Maximum hat. Da K beschränkt ist, existiert $M = \sup K$. Wähle eine Folge $(x_n) \subset K$, so dass $x_n \rightarrow M$. Da K abgeschlossen ist liegt der Grenzwert M dieser Folge in K .

Wenden wir dass auf die Menge $f(A)$ an, folgt die Aussage des Korollars. \square

Satz 5.70. Seien $A \subset \mathbb{R}^n$ und $B \subset \mathbb{R}^m$ beschränkte, abgeschlossene Teilmengen und $f : A \rightarrow B$ eine stetige, bijektive Funktion. Dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : B \rightarrow A$ ebenfalls stetig.

Beweis. Da f bijektiv ist, besitzt es eine Umkehrabbildung. Setze nun $g = f^{-1}$. Die Abbildung g ist bijektiv da f bijektiv ist. Sei $C \subset A$ abgeschlossen (da A selbst abgeschlossen ist, ist C abgeschlossen in \mathbb{R}^n , genau dann wenn es in A abgeschlossen ist). Aus der Beschränktheit von A folgt, dass C ebenfalls beschränkt ist. Wegen der Bijektivität von g gilt

$$f(C) = \{f(x) \in B \mid x \in C\} \\ = \{f(g(y)) \in B \mid g(y) \in C\} \\ = \{y \in B \mid g(y) \in C\} = g^{-1}(C).$$

Nach Satz 5.67 ist $f(C) = g^{-1}(C)$ abgeschlossen (und beschränkt). Da C eine beliebige abgeschlossene Teilmenge von A war, folgt damit aus Satz 5.61 die Stetigkeit von $g = f^{-1}$. \square

5.6 Konvergenz von Funktionenfolgen

Definition 5.71 (Punktweise Konvergenz). Sei M eine Menge, $f_n : M \rightarrow \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) Funktionen für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $f : M \rightarrow \mathbb{K}$ eine weitere Funktion. Die Folge (f_n) heißt punktweise konvergent gegen f , wenn gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \text{ für alle } x \in M.$$

Punktweise Konvergenz von Funktionenfolgen ist oft vergleichsweise einfach zu zeigen, aber oft auch nicht sehr nützlich, da viele wichtige Eigenschaften von Funktionen bei punktwiser Konvergenz nicht erhalten bleiben. Die punktweise Konvergenz läßt sich im Allgemeinen – konkreter falls M überabzählbar ist – auch nicht durch eine Metrik charakterisieren.

Beispiel 5.72. Seien $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ die folgenden Funktionen

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 - nx & x \in [0, 1/n] \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist f_n stetig für jedes $n \in \mathbb{N}$ und die Folge (f_n) konvergiert punktweise gegen $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) := \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$$

welches nicht mehr stetig ist.

Wir können nun den Formalismus des normierten Raumes nutzen, um einen anderen Konvergenzbegriff für Funktionenfolgen zu definieren, der viele gute Eigenschaften von Funktionen erhält.

Bemerkung 5.73. Sei M eine Menge und $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Betrachte den Raum der beschränkten Funktionen über M , das heißt

$$\mathbf{B}(M) = \{f : M \rightarrow \mathbb{K} \mid \exists K \in \mathbb{R} \text{ so dass } |f(x)| \leq K \text{ für alle } x \in M\}. \quad (5.2)$$

Man überzeugt sich leicht, dass diese Mengen ein Untervektorraum des Raumes aller Funktionen ist.

Auf diesem Raum definiert

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_\infty : \mathbf{B}(M) &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto \sup_{x \in M} |f(x)| \end{aligned}$$

eine Norm auf $\mathbf{B}(M)$.

Beweis. Wir zeigen, dass $\|\cdot\|_\infty$ eine Norm ist. Die Positivität und absolute Homogenität sind einfach nachzuprüfen. Um die Definitheit zu zeigen sei $f \in \mathbf{B}(M)$ so, dass $\|f\|_\infty = 0$ gilt. Dann ist $|f(x)| = 0$, also $f(x) = 0$ für alle $x \in M$ und damit ist f die Nullfunktion.

Es bleibt noch die Dreiecksungleichung zu zeigen. Zunächst stellen wir fest, dass nach der Definition der Norm $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ für jedes $x \in M$ gilt. Dann folgt für $f, g \in \mathbf{B}(M)$ mit der Dreiecksungleichung für den Betrag

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

Da das für alle $x \in M$ gilt, ist dann auch

$$\|f + g\|_\infty = \sup_{x \in M} |f(x) + g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty. \quad \square$$

Definition 5.74 (Gleichmäßige Konvergenz). Eine Folge von beschränkten Funktionen (f_n) , $f_n : M \rightarrow \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), die bezüglich der Norm $\|\cdot\|_\infty$ gegen $f : M \rightarrow \mathbb{K}$ konvergiert heißt gleichmäßig konvergent. Wenn von dem Funktionenraum $\mathbf{B}(M)$ (und später $\mathbf{C}(M)$) die Rede ist werden wir die Norm $\|\cdot\|_\infty$ oft nicht explizit erwähnen.

Bemerkung 5.75. In formaler Notation bedeutet die punktweise Konvergenz einer Funktionenfolge f_n gegen f , dass

$$\forall \epsilon > 0 \quad \forall x \in M \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

erfüllt ist, bei gleichmäßiger Konvergenz hingegen gilt stärker

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall x \in M \quad \forall n > N \quad |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Die Definitionen unterscheiden sich also nur darin, ob N von x abhängen darf oder nicht. Insbesondere ist jede gleichmäßig konvergente Folge auch punktweise konvergent.

Der Unterschied der beiden Aussagen wird gut vom Beispiel 5.72 verdeutlicht. Man überzeugt sich leicht, dass dort für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $\|f - f_n\|_\infty = 1$, die Funktionenfolge konvergiert also nicht gleichmäßig. Im Gegensatz zum \mathbb{R}^n – auf dem wir im Wesentlichen einen Konvergenzbegriff haben – müssen wir für Funktionen verschieden Arten von Konvergenz unterscheiden.

Die obige Formulierung für gleichmäßige Konvergenz ist sogar etwas allgemeiner als in unserer Definition, da sie auch für Folgen nicht beschränkter Funktionen Sinn ergibt.

Satz 5.76. *Der Funktionenraum $\mathbf{B}(M)$ ist vollständig, also ein Banachraum.*

Beweis. Sei $(f_n) \subset \mathbf{B}(M)$ eine Cauchy-Folge. Wähle $x \in M$ fest. Dann ist die Folge $(f_n(x))$ ebenfalls eine Cauchy-Folge, da

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty$$

gilt. Da \mathbb{K} (also \mathbb{R} oder \mathbb{C}) vollständig sind, konvergiert also die Folge $(f_n(x))$. Wir setzen jetzt

$$f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

Damit haben wir einen Grenzwert f für die Folge (f_n) gefunden, allerdings nur bezüglich der punktweisen Konvergenz.

Sei nun $\epsilon > 0$. Wir wählen mit der Cauchy-Eigenschaft $N \in \mathbb{N}$ so, dass $\|f_n - f_m\|_\infty < \epsilon$ für alle $n, m \geq N$. Die Wahl von N ist nicht von x abhängig. Dann gilt für jedes $x \in M$ und jedes $n, m > N$

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \|f_m - f_n\|_\infty \leq \epsilon.$$

Da die rechte Seite nicht mehr von m abhängt, können wir den Grenzwert $m \rightarrow \infty$ bilden und erhalten, da die Betragsfunktion stetig ist, für jedes $x \in M$

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \epsilon.$$

Da die rechte Seite von x unabhängig ist, folgt aus dieser Abschätzung zunächst

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in M} |f(x)| \leq \sup_{x \in M} |f(x) - f_n(x)| + \sup_{x \in M} |f_n(x)| \leq \epsilon + \|f_n\|,$$

die Grenzfunktion f ist also beschränkt.

Weiterhin gilt

$$\sup_{x \in M} |f(x) - f_n(x)| = \|f - f_n\|_\infty \leq \epsilon.$$

Damit haben wir die Konvergenz von (f_n) gegen f bezüglich der Norm gezeigt. \square

Definition 5.77. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $\mathbf{B}(X)$ der Raum der beschränkten Funktionen auf X . Der Teilraum der stetigen, beschränkten Funktionen wird mit $\mathbf{C}_b(X)$ bezeichnet.

Bemerkung 5.78. Falls X eine beschränkte, abgeschlossene Teilmenge von \mathbb{R}^n ist, dann ist nach Satz 5.67 jede stetige Funktion beschränkt. In diesem Fall enthält der Raum $\mathbf{C}_b(X)$ alle stetigen Funktionen auf X und wir schreiben $\mathbf{C}(X)$.

Im Gegensatz zur punktweisen Konvergenz erhält die gleichmäßige Konvergenz viele gute Eigenschaften von Funktionen.

Satz 5.79. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Der Unterraum $\mathbf{C}_b(X)$ ist abgeschlossen in $\mathbf{B}(X)$. Insbesondere ist $\mathbf{C}_b(X)$ vollständig.

Beweis. Wir wollen das Folgenkriterium für Abgeschlossenheit aus Satz 5.33 verwenden. Sei also $(f_n) \subset \mathbf{C}_b(X)$ eine Folge stetiger Funktionen, die (gleichmäßig) gegen $f \in \mathbf{B}(X)$ konvergiert. Sei $x \in X$ und $\epsilon > 0$. Da (f_n) gleichmäßig gegen f konvergiert, existiert $N \in \mathbb{N}$ so, dass $\|f - f_n\|_\infty < \frac{\epsilon}{3}$ für jedes $n > N$. Wähle jetzt $n > N$ fest.

Da f_n stetig ist, existiert $\delta > 0$ so, dass $|f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\epsilon}{3}$ für alle $y \in B_\delta(x)$. Dann gilt für jedes solche y

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| \\ &\leq 2\|f - f_n\|_\infty + |f_n(x) - f_n(y)| < \epsilon. \end{aligned}$$

Damit ist f stetig in x und da $x \in X$ beliebig war, ist f stetig.

Da die Folge (f_n) beliebig war, ist damit auch die Abgeschlossenheit von $\mathbf{C}_b(X)$ gezeigt. Die Vollständigkeit dieses Raumes folgt dann aus Satz 5.38. \square

Definition 5.80. Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $x_0 \in \mathbb{K}$ und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{K}$. Dann heißt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ eine (formale) Potenzreihe um den Punkt x_0 über dem Körper \mathbb{K} .

Die Zahl

$$\sup \left\{ |x - x_0| \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \text{ konvergiert} \right. \right\}$$

in $[0, \infty) \cup \{\infty\}$ heißt Konvergenzradius der Potenzreihe.

Bemerkung 5.81. Die Ergebnisse dieses Abschnitts bis hierher können – inklusive der Beweise – ohne Weiteres auf \mathbb{R}^n -wertige Funktionen oder sogar auf Funktionen mit Werten in einem beliebigen Banachraum verallgemeinert werden. Dazu ersetzt man lediglich überall den Betrag $|\cdot|$ durch die entsprechende Norm $\|\cdot\|$.

Satz 5.82. Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ eine Potenzreihe über dem Körper \mathbb{K} und $r \in [0, \infty) \cup \{\infty\}$ ihr Konvergenzradius. Für $|x - x_0| < r$ konvergiert die Reihe absolut, für $|x - x_0| > r$ divergiert sie.

Es gilt die Formel

$$\frac{1}{r} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}. \quad (5.3)$$

Wobei wir (nur hier) $\frac{1}{\infty} = 0$ und $\frac{1}{0} = \infty$ setzen.

Beweis. Um die Notation einfach zu halten, führen wir den Beweis nur für $x_0 = 0$. Dass die Reihe für $|x| > r$ divergiert folgt aus der Definition des Konvergenzradius. Wir zeigen zunächst die absolute Konvergenz der Reihe falls $|x| < r$. Falls $r = 0$ ist, so ist nichts zu zeigen. Sei also $r > 0$ und $|x| < r$. Nach der Definition des Konvergenzradius existiert y so, dass $|x| < |y| \leq r$ und $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ konvergiert. Insbesondere muss also $(a_n y^n)$ eine Nullfolge sein und so gilt $|a_n| |y|^n \leq C$ für ein $C \in [0, \infty)$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$. Damit gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |y|^n \left| \frac{x}{y} \right|^n \leq C \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{x}{y} \right|^n < \infty.$$

Damit ist die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

absolut konvergent und insbesondere konvergent.

Die Formel für den Konvergenzradius ergibt sich aus dem Wurzelkriterium. Setze

$$b := \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Sei zunächst $b \in (0, \infty)$. Dann gilt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = |x| b.$$

Damit ist die Reihe konvergent falls $|x| < \frac{1}{b}$ – also gilt $r \geq \frac{1}{b}$ – und divergent falls $|x| > \frac{1}{b}$ also ist $r \leq \frac{1}{b}$. Schließlich sieht man leicht, dass die Potenzreihe lediglich in $x = 0$ konvergiert falls $b = \infty$ und für jedes $x \in \mathbb{K}$ konvergiert falls $b = 0$ ist. \square

Bemerkung 5.83. (i) Aus dem obigen Beweis ist ersichtlich, dass

$$r = \sup \left\{ a \in [0, \infty) \mid \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| a^n \text{ konvergiert} \right\}.$$

(ii) Falls der folgende Grenzwert existiert (also insbesondere $a_n \neq 0$ ist ab einem bestimmten Index n), so gilt auch

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}.$$

Beispiel 5.84. Die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

ist konvergent auf $(-1, 1)$ (beziehungsweise auf $B_1(0) \subset \mathbb{C}$) und konvergiert dort gegen die Funktion $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

Man beachte dabei, dass der Grenzwert der Reihe nur auf dem Konvergenzkreis mit f übereinstimmt (außerhalb dieses Kreises existiert der Grenzwert nicht) obwohl der maximale Definitionsbereich von f darüber hinaus geht.

Satz 5.85. Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ eine Potenzreihe über dem Körper \mathbb{K} ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) mit Konvergenzradius $r > 0$. Sei $0 < a < r$. Dann konvergiert die Potenzreihe auf $K_a(x_0)$ gleichmäßig.

Insbesondere ist die Funktion

$$f : B_r(x_0) \rightarrow \mathbb{K}$$

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

stetig.

Beweis. Wir betrachten wiederum nur den Fall $x_0 = 0$. Sei $0 < a < r$. Wir wissen bereits, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ auf $K_a(0)$ (sogar auf $B_r(0)$) punktweise konvergiert, wir wollen jedoch die Konvergenz bezüglich der Supremumnorm $\|\cdot\|_{\infty}$ zeigen. Setze

$$\begin{aligned} f_n : K_a(0) &\rightarrow \mathbb{K} \\ x &\mapsto x^n \end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

$$\|f_n\|_{\infty} = \sup_{x \in K_a(0)} |x^n| = a^n$$

und wir erhalten

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|a_n f_n\|_{\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| a^n < \infty \quad (5.4)$$

da $a < r$. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n$ ist also absolut konvergent in $\mathbf{B}(K_a(0))$. Da dieser Raum vollständig ist, folgt daraus die Konvergenz der Reihe in $\mathbf{B}(K_a(0))$ (Satz 5.20) also die gleichmäßige Konvergenz.

Da die gleichmäßige Konvergenz die punktweise Konvergenz impliziert (Bemerkung 5.75), muss der gleichmäßige Grenzwert mit dem punktweisen übereinstimmen also mit der Funktion $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Da die Partialsummen $\sum_{n=0}^N a_n x^n$ für jedes N Polynome und somit stetig sind, ist nach Satz 5.79 auch der Grenzwert stetig (auf $K_a(0)$).

Wir wollen nun noch die Stetigkeit auf $B_r(0)$ zeigen. Wir setzen

$$\begin{aligned} s : B_r(0) &\rightarrow \mathbb{K} \\ x &\mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \end{aligned}$$

Sei nun $y \in B_r(0)$ und wähle a so, dass $|y| < a < r$. Dann ist nach dem soeben gezeigten $s|_{K_a(0)}$ stetig, also insbesondere stetig in $y \in K_a(0)$. Da $K_a(0)$ eine Umgebung von y enthält, stimmen s und $s|_{K_a(0)}$ auf dieser Umgebung überein und da Stetigkeit eine lokale Eigenschaft ist, folgt daraus die Stetigkeit von s in y . Da das für jedes $y \in B_r(0)$ gilt, ist s stetig. \square

Bemerkung 5.86. Der obige Satz beweist insbesondere, dass die Funktionen \exp , \sin und \cos stetig sind.

Wir werden später sehen, dass solche analytischen Funktionen – also Funktionen die eine konvergente Reihenentwicklung besitzen – sogar beliebig oft differenzierbar sind.

Beispiel 5.87. Auch die Aussagen über Potenzreihen können auf Banachraumwertige Funktionen über den reellen beziehungsweise komplexen Zahlen verallgemeinert werden. Ein solches Beispiel wollen wir hier betrachten.

Unser Bildraum sollen hier die $n \times n$ -Matrizen sein. Es gibt auf diesem Raum unterschiedliche Normen, da er jedoch endlichdimensional ist, sind diese Normen alle äquivalent und die topologischen Eigenschaften (Konvergenz, Stetigkeit, Offenheit, Abgeschlossenheit, Kompaktheit ...) hängen nicht von der Wahl der Norm ab. Aus praktischen

Gründen, ist die Operatornorm

$$\|A\| = \sup \{ \|Ax\| \mid x \in B_1(0) \}$$

besonders nützlich (Siehe Aufgabenblatt 2).

Wir definieren für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n.$$

Es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{1}{n!} A^n \right\| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \|A^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|A\|^n = e^{\|A\|} < \infty,$$

die Reihe ist also absolut konvergent und damit auch konvergent.

Die Abbildung

$$t \mapsto \exp(At) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} t^n$$

ist dann eine Matrixwertige Potenzreihe mit Konvergenzradius ∞ (sie konvergiert für jedes $t \in \mathbb{K}$) und also solche eine stetige Abbildung.

6 Differenzialrechnung von Funktionen mehrerer Variabler

6.1 Partielle und totale Differenzierbarkeit

Definition 6.1. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x = (x_1, \dots, x_n) \in U$ und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$. Die Abbildung f heißt partiell differenzierbar in x bezüglich x_i , wenn die Funktionen $t \mapsto f(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n)$ differenzierbar ist, das heißt wenn der Grenzwert

$$\partial_i f(x) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{h}$$

existiert. Der Grenzwert $\partial_i f(x) \in \mathbb{R}^m$ heißt die partielle Ableitung von f an der Stelle x bezüglich x_i und wird auch als $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ geschrieben.

Die Abbildung f heißt partiell differenzierbar in x , wenn sie partiell differenzierbar bezüglich x_i für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ ist.

Die Existenz nur der partiellen Ableitungen ist in vielen Fällen eine zu schwache Bedingung wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 6.2. Die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \begin{cases} 1 & x = 0 \text{ oder } y = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist im Punkt $(0, 0)$ partiell differenzierbar, aber nicht stetig.

Über lediglich partiell differenzierbare Funktionen können wir kaum Aussagen treffen, es bedarf also eines stärkeren Differenzierbarkeitsbegriffes. Dazu formulieren wir zunächst den bereits bekannten Differenzierbarkeitsbegriff für Funktionen einer Variablen um.

Satz 6.3. Sei $U \subset \mathbb{R}$ offen und $x \in U$. Eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{K}$ ist differenzierbar in x , genau dann wenn $a \in \mathbb{K}$ und $\varphi : U \rightarrow \mathbb{K}$ existieren, so dass

$$f(y) = f(x) + a(y - x) + \varphi(y)$$

für alle $y \in U$ gilt und

$$\lim_{y \rightarrow x} \frac{\varphi(y)}{|x - y|} = 0.$$

Beweis. Seien zunächst a und φ wie oben gefordert. Dann gilt

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = a + \frac{\varphi(y)}{|y - x|} \frac{|y - x|}{y - x}$$

und die rechte Seite dieser Gleichung konvergiert für $y \rightarrow x$ nach Voraussetzung gegen a . Damit ist f in x differenzierbar und $f'(x) = a$.

Sei andererseits f in x differenzierbar und definiere

$$\varphi(y) = f(y) - f(x) - f'(x)(y - x)$$

Dann gilt die geforderte Gleichung (für $a = f'(x)$) und

$$\lim_{y \rightarrow x} \frac{\varphi(y)}{|y - x|} = \lim_{y \rightarrow x} \left(\frac{f(y) - f(x)}{y - x} - f'(x) \right) \frac{y - x}{|y - x|} = 0. \quad \square$$

Der entscheidende Punkt in obiger Definition ist, dass f in der Nähe des Punktes x durch die lineare Funktion $y \mapsto f(x) + a(y - x)$ approximiert wird und das der Restterm $\varphi(y)$ schneller als linear gegen 0 geht. In dieser Formulierung können wir den Differenzierbarkeitsbegriff auf Funktionen mehrerer Variabler verallgemeinern.

Definition 6.4. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x \in U$ und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$. Die Abbildung f heißt in x differenzierbar oder total differenzierbar, falls eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ existieren, so dass

$$f(y) = f(x) + A(y - x) + \varphi(y)$$

für alle $y \in U$ und

$$\lim_{y \rightarrow x} \frac{\varphi(y)}{\|y - x\|} = 0.$$

Wir nennen f total differenzierbar, falls es in jedem Punkt $x \in U$ total differenzierbar ist.

Satz 6.5. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x \in U$ und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$. Seien $f_1, \dots, f_m : U \rightarrow \mathbb{R}$ die Komponentenfunktionen von f , das heißt $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$ für alle $x \in X$. Wenn die Abbildung f total differenzierbar ist, so ist sie partiell differenzierbar und die Matrix A aus Definition 6.4 ist gegeben durch $A_{ji} = \partial_i f_j(x)$.

Beweis. Seien A und φ wie in Definition 6.4. Sei e_1, \dots, e_n die Standardbasis von \mathbb{R}^n . Wir setzen $y = x + he_i$ in die definierende Gleichung für Differenzierbarkeit ein und erhalten

$$\begin{aligned} f(x + he_i) &= f(x) + hAe_i + \varphi(x + he_i) \\ \frac{f(x + he_i) - f(x)}{h} &= Ae_i + \frac{\varphi(x + he_i)}{|h|} \frac{|h|}{h}. \end{aligned}$$

Für $h \rightarrow 0$ konvergiert die rechte Seite Gleichung. Damit muss auch ihre linke Seite konvergieren, f ist also partiell in Richtung x_i differenzierbar und es folgt

$$\partial_i f(x) = Ae_i.$$

Als j -te Komponente dieser Gleichung erhalten wir $\partial_i f_j(x) = A_{ji}$. □

Definition 6.6. Die Matrix $(\partial_i f_j(x))_{ji}$ heißt Jacobi-Matrix (auch Funktionalmatrix) von f an der Stelle x . Wir bezeichnen sie mit $Df(x)$. Falls die Funktion total differenzierbar ist, nennen wir $Df(x)$ auch die totale Ableitung von f an der Stelle x .

Für reellwertige f , also $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, hat die Jacobi-Matrix lediglich eine Zeile und wir bezeichnen sie auch als Gradienten von f und schreiben $\text{grad } f := Df$.

Beispiel 6.7. (i) Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine Matrix und betrachte die Abbildung

$$f_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \\ x \mapsto Ax.$$

Dann gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$f_A(y) = f_A(x) + A(y - x).$$

Damit ist f_A differenzierbar und die Ableitung ist die konstante Funktion $Df_A(x) = A$. Eine solche lineare Abbildung entspricht also ihrer eigenen Ableitung.

(ii) Betrachte die Abbildung

$$f : (0, \infty) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (r, \varphi) \mapsto (r \cos \varphi, r \sin \varphi).$$

Dann ist f partiell differenzierbar und es gilt

$$Df(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Man kann zeigen, dass diese Funktion auch total differenzierbar ist.

Bemerkung 6.8. (i) Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ differenzierbar, dann ist die Ableitung eine Funktion von $U \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$, bildet also nicht mehr in den selben Raum ab. Lediglich für Funktionen einer Variablen können wir $\mathbb{R}^{1 \times m}$ und \mathbb{R}^m identifizieren.

(ii) Eine total differenzierbare Funktion nennt man auch lokal linear approximierbar. Die Linearität ist dabei die Eigenschaft (für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{K}$)

$$A(x + \lambda y) = Ax + \lambda Ay.$$

(iii) Für beliebige Vektorräume V und W heißt eine Abbildung $A : V \rightarrow W$ linear, wenn sie

$$A(v + \lambda w) = A(v) + \lambda A(w)$$

für alle $v, w \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ erfüllt. Wir können dann auf die selbe Art wie oben Differenzierbarkeit für Abbildungen $f : V \rightarrow W$ zwischen beliebigen normierten Vektorräumen definieren.

- (iv) Eine Abbildung f ist also total differenzierbar in x genau dann, wenn die Jacobi-Matrix $Df(x)$ existiert (f also in x partiell differenzierbar ist) und

$$\lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x) - Df(x)(y - x)}{\|y - x\|} = 0.$$

- (v) Aus dieser Formulierung ist ersichtlich, dass eine Abbildung $f = (f_1, \dots, f_m)$, mit $f_1, \dots, f_m : U \rightarrow \mathbb{R}$ total differenzierbar ist, genau dann wenn f_i total differenzierbar ist für jedes $i \in \{1, \dots, m\}$. Die Jacobi-Matrix $Df_i(x)$ ist gerade die i -te Zeile der Jacobi-Matrix $Df(x)$.
- (vi) Wie im eindimensionalen Fall folgt aus der totalen Differenzierbarkeit insbesondere die Stetigkeit von f .
- (vii) Sowohl partielle, als auch totale Differenzierbarkeit sind lokale Eigenschaften.
- (viii) Um Verwirrung zu vermeiden: Wenn f auf einer offenen Menge U differenzierbar ist, dann ist die Abbildung $h \mapsto Df(x)h$ linear für jedes $x \in U$. Die Abbildung $x \mapsto Df(x)$ ist in den meisten Fällen nicht linear.

Satz 6.9 (Kettenregel). Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^m$ offen, $x \in U$, $g : U \rightarrow V$ total differenzierbar in x und $f : V \rightarrow \mathbb{R}^k$ total differenzierbar in $g(x)$. Dann ist $f \circ g$ total differenzierbar in x und es gilt

$$D(f \circ g)(x) = Df(g(x))Dg(x).$$

Beweis. Differenzierbarkeit von g im Punkt x bedeutet, dass $\varphi_g : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ existiert so, dass $\lim_{y \rightarrow x} \varphi_g(y) \|y - x\|^{-1} = 0$ und

$$g(y) - g(x) = Dg(x)(y - x) + \varphi_g(y).$$

Differenzierbarkeit von f im Punkt $g(x)$ bedeutet, dass es ein $\varphi_f : V \rightarrow \mathbb{R}^k$ gibt so, dass $\lim_{z \rightarrow g(x)} \varphi_f(z) \|z - g(x)\|^{-1} = 0$ und

$$f(z) = f(g(x)) + Df(g(x))(z - g(x)) + \varphi_f(z).$$

Setzen wir in dieser Gleichung $z = g(y)$, und setzen dann die erste Gleichung in die zweite ein, erhalten wir

$$f(g(y)) = f(g(x)) + Df(g(x))Dg(x)(y - x) + Df(g(x))\varphi_g(y) + \varphi_f(g(y)).$$

Die Aussage des Satzes folgt also, wenn wir zeigen dass

$$\frac{Df(g(x))\varphi_g(y) + \varphi_f(g(y))}{\|y - x\|} = Df(g(x)) \frac{\varphi_g(y)}{\|y - x\|} + \frac{\varphi_f(g(y))}{\|y - x\|}$$

für $y \rightarrow x$ gegen 0 konvergiert.

Für den ersten Summanden folgt das aus der Linearität und damit Stetigkeit der Funktion $z \mapsto Df(g(x))z$. Wir definieren nun die Hilfsfunktion

$$\psi : U \rightarrow \mathbb{R}^k$$

$$z \mapsto \begin{cases} \frac{\varphi_f(z)}{\|z-g(x)\|} & z \neq g(x) \\ 0 & z = g(x) \end{cases},$$

welche nach Voraussetzung stetig in $z = g(x)$ ist. Es gilt dann für alle $y \in U$

$$\frac{\varphi_f(g(y))}{\|y-x\|} = \psi(g(y)) \frac{\|g(y) - g(x)\|}{\|y-x\|}.$$

Der erste Faktor konvergiert für $y \rightarrow x$ wegen der Stetigkeit von g in x und ψ in $g(x)$ gegen 0. Außerdem ist der zweite Faktor

$$\frac{\|g(y) - g(x)\|}{\|y-x\|} \leq \left\| Dg(x) \frac{y-x}{\|y-x\|} \right\| + \|\varphi_g(y)\| \|y-x\|$$

beschränkt in einer Umgebung von x , da der zweite Term gegen 0 konvergiert und der erste Term unabhängig von y durch $\|Dg(x)\|$ (Operatornorm) beschränkt ist. Damit ist die gesuchte Konvergenz gezeigt. \square

Satz 6.10. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$. Wenn für jedes $x \in U$ und jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ die partielle Ableitung $\partial_i f(x)$ existiert und stetig ist, dann ist f für jedes x total differenzierbar.

Ohne Beweis.

Definition 6.11. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Die Abbildung $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt stetig differenzierbar, wenn alle ihre partiellen Ableitungen stetig sind. Den Vektorraum aller stetig differenzierbaren Funktionen bezeichnen wir mit $\mathbf{C}^1(U, \mathbb{R}^m)$ beziehungsweise – im Fall $m = 1$ – mit $\mathbf{C}^1(U)$.

Der obige Satz sagt dann aus, dass jede stetig differenzierbare Funktion insbesondere total differenzierbar ist.

Beispiel 6.12. (i) Betrachten wir noch einmal Beispiel 6.7 (ii) mit der Jacobi-Matrix

$$Df(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix},$$

so stellen wir fest, dass alle Komponentenfunktionen stetig sind (Warum?). Damit können wir den Satz anwenden und sehen, dass die Abbildung f total differenzierbar ist.

- (ii) Seien $N \in \mathbb{N}$ und $c_\eta \in \mathbb{K}$ Koeffizienten für jeden Multiindex $\eta \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\eta| \leq N$. Dann ist das Polynom

$$p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}$$

$$x \mapsto \sum_{\eta, |\eta| \leq N} c_\eta x^\eta$$

total differenzierbar.

Dazu sehen wir uns die partielle Ableitung eines Monoms an:

$$\partial_i x^\eta = \partial_i x_1^{\eta_1} \cdots x_{i-1}^{\eta_{i-1}} x_i^{\eta_i} x_{i+1}^{\eta_{i+1}} \cdots x_n^{\eta_n} = \eta_i x_1^{\eta_1} \cdots x_{i-1}^{\eta_{i-1}} x_i^{\eta_i-1} x_{i+1}^{\eta_{i+1}} \cdots x_n^{\eta_n}$$

und stellen fest, dass diese ein Polynom ist. Damit ist jede partielle Ableitung eines Polynoms wiederum ein Polynom also insbesondere stetig. Dann folgt mit Satz 6.10, dass p total differenzierbar ist.

Für die Mittelwertsätze verwenden wir die folgende Notation für die Verbindungsstrecke von x und y :

$$S_{xy} := \{x + t(y - x) \mid t \in (0, 1)\}$$

$$\overline{S}_{xy} := \{x + t(y - x) \mid t \in [0, 1]\}$$

Satz 6.13 (Mittelwertsatz für reellwertige Funktionen). Sei $U \subset \mathbb{R}^n$, $x, y \in U$ und $\overline{S}_{xy} \subset U$. Sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar auf S_{xy} und stetig in x und y , dann existiert $\xi \in S_{xy}$ so, dass

$$f(y) - f(x) = Df(\xi)(y - x).$$

Beweis. Wir definieren die Hilfsfunktion

$$g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$t \mapsto f(x + t(y - x)).$$

Nach der Kettenregel und der Voraussetzung ist g differenzierbar auf $(0, 1)$ und stetig auf $[0, 1]$, also können wir den (eindimensionalen) Mittelwertsatz anwenden. Wir erhalten also $\theta \in (0, 1)$, so dass $g(1) - g(0) = g'(\theta)$. Daraus folgt mit der Kettenregel

$$f(y) - f(x) = g(1) - g(0) = g'(\theta) = Df(x + \theta(y - x))(y - x)$$

also für $\xi = x + \theta(y - x)$ die gesuchte Aussage. □

Satz 6.14 (Allgemeiner Mittelwertsatz). Sei $U \subset \mathbb{R}^n$, $x, y \in U$ und $\overline{S}_{xy} \subset U$.

$$S_{xy} := \{x + t(y - x) \mid t \in (0, 1)\} \subset U.$$

Sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ differenzierbar auf S_{xy} und stetig in x und y , dann existiert $\xi \in S_{xy}$ so, dass

$$\|f(y) - f(x)\| \leq \|Df(\xi)(y - x)\|.$$

Beweis. Wir betrachten zunächst für festes $a \in \mathbb{R}^m$ die (skalarwertige) Hilfsfunktion $a^T f(x) = \langle a \mid f(x) \rangle$. Nach dem vorhergehenden Satz existiert $\xi \in S_{xy}$ so, dass

$$a^T f(y) - a^T f(x) = a^T Df(\xi)(y - x).$$

Dabei haben wir zum Ausrechnen der Ableitung die Kettenregel (Satz 6.9) sowie Beispiel 6.7 (i) verwendet. Wir setzen nun $a = f(y) - f(x)$ ein, nutzen Skalarproduktschreibweise und erhalten

$$\|f(y) - f(x)\|^2 = \langle f(y) - f(x) \mid Df(\xi)(y - x) \rangle \leq \|f(y) - f(x)\| \|Df(\xi)(y - x)\|.$$

Dabei haben wir die Cauchy-Schwarz Ungleichung genutzt und wir erhalten durch Division durch $\|f(y) - f(x)\|$ das gewünschte Ergebnis. \square

Korollar 6.15. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ differenzierbar. Falls $Df \equiv 0$ auf U gilt, so ist f lokal konstant, das heißt für jedes $x \in U$ existiert eine Umgebung V , so dass f auf V konstant ist.

Beweis. Sei $x \in U$ und wähle $\epsilon > 0$ so, dass $B_\epsilon(x) \subset U$. Dann existiert für alle $y \in B_\epsilon(x)$ nach dem allgemeinen Mittelwertsatz ein $\xi \in S_{xy} \subset B_\epsilon(x)$ so, dass

$$\|f(y) - f(x)\| \leq \|Df(\xi)(y - x)\| = 0$$

gilt, es ist also $f(y) = f(x)$. Damit ist f auf $B_\epsilon(x)$ konstant. \square

Bemerkung 6.16. Eine Funktion mit verschwindender Ableitung muss nicht konstant sein wie bereits im Eindimensionalen durch das Beispiel

$$f : (-2, -1) \cup (1, 2) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

illustriert wird.

Aus der lokalen Konstanz aus dem obigen Korollar folgt die Konstanz auf zusammenhängenden Mengen (zum Beispiel Intervallen). Wir werden hier jedoch nicht definieren was zusammenhängend bedeutet.

6.2 Höhere Ableitungen

Den Begriff der partiellen Differenzierbarkeit lässt sich ohne weiteres für höhere Ableitungen formulieren.

Definition 6.17. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Wir sagen f ist eine (die einzige) partielle Ableitung von f der Ordnung 0. Für $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ definieren wir rekursiv:

- (i) f ist $k+1$ mal partiell differenzierbar, wenn alle partiellen Ableitungen der Ordnung k partiell differenzierbar sind
- (ii) die partiellen Ableitungen der Ordnung $k+1$ von f sind die Funktionen $\partial_i g$ wobei $i \in \{1, \dots, n\}$ und g eine partielle Ableitung von f der Ordnung k ist.

Die Funktion f heißt k mal stetig differenzierbar, falls alle partiellen Ableitungen der Ordnung höchsten k stetig sind. Der Vektorraum aller k mal stetig differenzierbaren Funktionen wird mit $\mathbf{C}^k(U, \mathbb{R}^m)$ bezeichnet beziehungsweise – im Fall $m = 1$ mit $\mathbf{C}^k(U)$. Die Funktion f heißt beliebig differenzierbar oder glatt, falls sie k mal stetig differenzierbar ist für jedes $k \in \mathbb{N}$.

Für die totalen Ableitungen ist die Sache komplizierter. Wie wir bereits gesehen haben, bildet die Ableitung einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ nicht mehr in den selben Raum ab wie diese, sondern nach $\mathbb{R}^{n \times m}$. Dadurch entstehen offensichtliche Probleme für das Bilden höherer Ableitungen. Da wir hier keine ausführliche Theorie multilinearer Abbildungen entwickeln wollen, behelfen wir uns mit einem Trick.

Bemerkung 6.18. Setzen wir voraus, dass die entsprechenden Ableitungen von $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ existieren, ist für jedes feste $u \in \mathbb{R}^n$

$$x \mapsto Df(x)u$$

ebenfalls eine Abbildung von $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ welche wir erneut ableiten können. Für ein $x \in \mathbb{R}^n$ betrachten wir nun die Abbildung

$$\begin{aligned} D^2 f(x) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ (u, v) &\mapsto D(Df(\cdot)u)(x)v. \end{aligned}$$

Diese Abbildung ist offensichtlich linear in v (Multiplikation mit der Matrix $D(Df(\cdot)u)(x)$). Sie ist aber auch linear in u denn

$$\begin{aligned} D^2 f(x)(u_1 + \lambda u_2, v) &= D(Df(\cdot)(u_1 + \lambda u_2))(x)v = D(Df(\cdot)u_1 + \lambda Df(\cdot)u_2)(x)v \\ &= D(Df(\cdot)u_1)(x)v + \lambda D(Df(\cdot)u_2)v \\ &= D^2 f(x)(u_1, v) + \lambda D^2 f(x)(u_2, v). \end{aligned}$$

So wie Multiplikation mit $Df(x)$ eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ definiert, ist $D^2 f(x)$ eine Abbildung von $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, die bezüglich beider Argumente linear ist, eine sogenannte bilineare Abbildung. Sie hängt natürlich auch noch von der betrachteten Stelle x ab.

Auf diese Weise können wir nun auch Ableitungen beliebiger Ordnung definieren.

Definition 6.19. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$. Wir definieren rekursiv für $k \geq 1$:

- (i) f heißt $k + 1$ mal (total) differenzierbar auf U , wenn $D^k f(\cdot)(u_1, \dots, u_k)$ differenzierbar auf U ist für jedes $u_1, \dots, u_k \in \mathbb{R}^n$,
- (ii) die $k + 1$ -te Ableitung von f im Punkt $x \in U$ ist dann die multilineare Abbildung

$$D^{k+1} f(x) : (\mathbb{R}^n)^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$(u_1, \dots, u_k, v) \mapsto D(D^k f(\cdot)(u_1, \dots, u_k))(x)v.$$

Bemerkung 6.20. Aus der Definition ist ersichtlich, dass für $f_1, \dots, f_m : U \rightarrow \mathbb{R}$ die Funktion $f = (f_1, \dots, f_m) : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ genau dann k mal differenzierbar ist, wenn das für die Funktionen f_1, \dots, f_m gilt. Wir können also auch die Differenzierbarkeit höherer Ordnung komponentenweise prüfen. Ausserdem gilt für alle $u_1, \dots, u_k \in \mathbb{R}^n$

$$\left(D^k f(x)(u_1, \dots, u_k) \right)_j = D^k f_j(x)(u_1, \dots, u_k)$$

Bemerkung 6.21. Analog wie oben für den Fall $k = 2$, zeigt man, dass $D^k f(x)$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ tatsächlich eine multilineare Abbildung ist, das heißt sie ist linear in jedem einzelnen ihrer Argumente. Wir haben Abbildungen von dieser Art bereits kennen gelernt:

- (i) Das Skalarprodukt auf \mathbb{R}^n ist eine bilineare Abbildung von $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.
- (ii) Die Determinante ist eine multilineare Abbildung von $(\mathbb{R}^n)^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Bemerkung 6.22. Für eine Matrix (lineare Abbildung) $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ kennen wir ihre Wirkung, wenn wir wissen wie sie auf eine Basis, zum Beispiel die Standardbasis e_1, \dots, e_n wirkt, dann für jedes $v \in \mathbb{R}^m$ existieren eindeutig bestimmte Koeffizienten $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ so, dass $v = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$ und es gilt

$$Av = \alpha_1 A e_1 + \dots + \alpha_n A e_n.$$

Wir erinnern uns, dass $A e_i$ gerade die i -te Spalte der Matrix A bezeichnet.

Eine analoge Aussage gilt auch für multilineare Abbildungen $A : (\mathbb{R}^n)^k \rightarrow \mathbb{R}^m$: die Abbildung A ist eindeutig bestimmt, wenn $A(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$ für alle $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$ bekannt ist.

Satz 6.23. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ mindestens k mal differenzierbar. Sei e_1, \dots, e_n die Standardbasis von \mathbb{R}^n . Dann gilt für die Komponenten von $D^k f(x)$

$$\left(D^k f(x) \right) (e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) = \partial_{i_k} \cdots \partial_{i_1} f(x)$$

für alle $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$.

Beweis. Für $k = 1$ ist die Aussage bereits bekannt (Satz 6.5). Wir führen nun eine Induktion über die Ordnung der Ableitung aus. Angenommen wir wissen bereits, dass die Aussage für eine Ordnung k stimmt, das heißt es gilt für alle $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$

$$\left(D^k f(x)\right)(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) = \partial_{i_k} \cdots \partial_{i_1} f(x).$$

Dann gilt für alle $i_1, \dots, i_k, i_{k+1} \in \{1, \dots, n\}$

$$\begin{aligned} D^{k+1} f(x)(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}, e_{i_{k+1}}) &= D(D^k f(\cdot))(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})(x)e_{i_{k+1}} \\ &= D(\partial_{i_k} \cdots \partial_{i_1} f)(x)e_{i_{k+1}} = \partial_{i_{k+1}} \partial_{i_k} \cdots \partial_{i_1} f(x), \end{aligned}$$

wobei wir für die letzte Umformung Satz 6.5 verwendet haben. \square

Die Reihenfolge der partiellen Ableitungen kann hier im allgemeinen wichtig sein. Die multilineare Abbildung ist also eine effiziente Art, die in n^k partiellen Ableitungen enthaltene Information zu verwalten.

Beispiel 6.24. Wir betrachten die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ x = (x_1, x_2) &\mapsto x_1^2 \cos(x_2) \end{aligned}$$

Für $u = u_1 e_1 + u_2 e_2$ und $v = v_1 e_1 + v_2 e_2$ erhalten wir dann für die zweite Ableitung

$$\begin{aligned} D^2 f(x)(u, v) &= u_1 v_1 D^2 f(x)(e_1, e_1) + u_1 v_2 D^2 f(x)(e_1, e_2) + u_2 v_1 D^2 f(x)(e_2, e_1) + u_2 v_2 D^2 f(x)(e_2, e_2) \\ &= u_1 v_1 2 \cos(x_2) - 2u_1 v_2 x_1 \sin(x_2) - 2u_2 v_1 x_1 \sin(x_2) - u_2 v_2 x_1^2 \cos(x_2). \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis hängt linear von u und v aber natürlich nicht von x ab. Weiter fällt auf, dass die Koeffizienten der gemischten Terme $u_1 v_2$ und $u_2 v_1$ übereinstimmen.

Satz 6.25. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ sei k mal stetig differenzierbar. Dann ist f auch k mal total differenzierbar.

Beweis. Die entsprechende Aussage ist bereits für $k = 1$ bekannt. Wir führen nun wieder eine Induktion über k aus, nehmen also an, die Aussage sei bereits für ein $k \in \mathbb{N}$ bewiesen und f sei $k + 1$ mal stetig partiell differenzierbar. Seien nun $u_1, \dots, u_k \in \mathbb{R}^n$, dann ist die Funktion

$$D^k f(\cdot)(u_1, \dots, u_k)$$

nach Satz 6.23 eine Linearkombination der partiellen Ableitungen von f der Ordnung k (Warum?) und damit nach Voraussetzung noch ein weiteres mal stetig partiell differenzierbar. Damit ist sie nach Satz 6.10 auch total differenzierbar und f damit $k + 1$ mal total differenzierbar. \square

Satz 6.26 (Satz von Schwarz). Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in \mathbf{C}^2(U, \mathbb{R}^m)$, dann gilt für alle $x \in U$ und alle $u, v \in \mathbb{R}^n$

$$D^2 f(x)(u, v) = D^2 f(x)(v, u).$$

Insbesondere gilt für die partiellen Ableitungen

$$\partial_{i_1} \partial_{i_2} f(x) = \partial_{i_2} \partial_{i_1} f(x)$$

für alle $i_1, i_2 \in \{1, \dots, n\}$.

Beweis. Es genügt den Fall $m = 1$ zu betrachten, da alle Ableitungen komponentenweise berechnet werden können.

Sei $x \in U$ fest und $\epsilon > 0$ so, dass $B_\epsilon(x) \subset U$. Falls $u = 0$ oder $v = 0$, verschwinden beide Seiten der zu beweisenden Gleichung (Warum?). Seien also $u, v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und

$$0 < t < c := \frac{\epsilon}{2 \max\{\|u\|, \|v\|\}}.$$

Die Konstante c ist dabei so bemessen, dass die Argumente, auf die f im folgenden angewendet wird, tatsächlich im Definitionsbereich U liegen.

Wir wenden den (eindimensionalen) Mittelwertsatz auf die Hilfsfunktion

$$\begin{aligned} g_1 : [0, t] &\rightarrow \mathbb{R} \\ s &\mapsto f(x + tv + su) - f(x + su) \end{aligned}$$

an und finden $\xi \in (0, t)$ so, dass

$$g_1(t) - g_1(0) = g_1'(\xi)t = (Df(x + tv + \xi u)(u) - Df(x + \xi u)(u))t.$$

Dabei haben wir die Kettenregel verwendet um die Ableitung g' zu bestimmen. Wir wenden nun erneut den Mittelwertsatz an, diesmal auf die Hilfsfunktion

$$\begin{aligned} g_2 : [0, t] &\rightarrow \mathbb{R} \\ s &\mapsto Df(x + sv + \xi u)(u) \end{aligned}$$

und erhalten $\eta \in (0, t)$ so, dass

$$g_2(t) - g_2(0) = g_2'(\eta)t = D(Df(\cdot)(u))(x + \eta v + \xi u)v = D^2 f(x + \eta v + \xi u)(u, v)t.$$

Für die letzte Umformung haben wir wiederum die Kettenregel sowie die Definition der zweiten Ableitung benutzt.

Zusammen haben wir für jedes $t \in (0, c)$ Zahlen $\xi, \eta \in (0, t)$ gefunden so, dass

$$\begin{aligned} f(x + tv + tu) - f(x + tv) - f(x + tu) + f(x) \\ &= g_1(t) - g_1(0) = (Df(x + tv + \xi u)(u) - Df(x + \xi u)(u))t \\ &= (g_2(t) - g_2(0))t = D^2 f(x + \eta v + \xi u)(u, v)t^2. \end{aligned}$$

Da die zweite Ableitung als stetig vorausgesetzt wurde und ξ und η für $t \rightarrow 0$ gegen 0 konvergieren, erhalten wir

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x + tv + tu) - f(x + tv) - f(x + tu) + f(x)}{t^2} = D^2 f(x)(u, v). \quad (6.1)$$

Diese Gleichung gilt für jedes $u, v \in \mathbb{R}^n$. Die linke Seite der Gleichung ist symmetrisch unter Vertauschung von u und v , also muss die rechte Seite es auch sein und es gilt $D^2 f(x)(u, v) = D^2 f(x)(v, u)$.

Setzen wir für u und v Elemente der Standardbasis ein, also $u = e_{i_1}$ und $v = e_{i_2}$, so folgt aus Satz 6.23 die Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen. \square

Bemerkung 6.27. (i) Mittels Induktion folgt, dass $D^k f(x)(u_1, \dots, u_k)$ seinen Wert unter beliebigen Vertauschungen der u_i nicht ändert vorausgesetzt $D^k f$ ist stetig. Man sagt, die Multilinearform $D^k f(x)$ ist symmetrisch. Die Reihenfolge der Anwendung von höchstens k partiellen Ableitungen ist also unerheblich falls $f \in C^k(U, \mathbb{R}^m)$ ist.

(ii) Gleichung (6.1) stellt die zweite Ableitung mittels eines einfachen Grenzwertes dar. Eine solche Darstellung kann zum Beispiel für die Diskretisierung von Differenzialgleichungen hilfreich sein. Es wurde jedoch zweimal stetig differenzierbares f vorausgesetzt. Es gibt Funktionen, für die der Grenzwert auf der linken Seite existiert, die aber nicht zweimal differenzierbar sind.

Satz 6.28 (Taylorformel). Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine $l+1$ mal differenzierbare Funktion und sei $h \in \mathbb{R}^n$ so, dass $x+th \in U$ für jedes $t \in [0, 1]$. Dann gilt für ein $\theta \in (0, 1)$

$$f(x + h) = \sum_{k=0}^l \frac{1}{k!} D^k f(x)(h, \dots, h) + \frac{1}{(l+1)!} D^{l+1} f(x + \theta h)(h, \dots, h).$$

Beweisidee. Wende die eindimensionale Taylorformel mit Lagrange-Restglied auf die Hilfsfunktion

$$g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto f(x + th)$$

an. \square

Bemerkung 6.29. (i) Stellen wir h bezüglich der Standardbasis dar, also $h = \sum_{i=1}^n h_i e_i$, dann können wir Koordinatendarstellungen der einzelnen Terme bestimmen wie wir hier exemplarisch für den Term zweiter Ordnung zeigen:

$$D^2 f(x)(h, h) = \sum_{i,j=1}^n h_i h_j D^2 f(x)(e_i, e_j) = \sum_{i,j=1}^n h_i h_j \partial_i \partial_j f(x).$$

Analog zum eindimensionalen Fall approximiert die Taylorformel eine $l+1$ mal differenzierbare Funktion also durch ein Polynom (in n Variablen) dessen Koeffizienten partielle Ableitungen von f an der Stelle x sind.

- (ii) Analog zu Korollar 4.56 ist es im Prinzip möglich lokale Extrema von hinreichend differenzierbaren Funktionen mittels der Ableitungen zu charakterisieren. Es gilt zum Beispiel: Falls $Df(x) = 0, \dots, D^{l-1}f(x) = 0$ und $D^l f(x) \neq 0$ so liegt in x
- ein Minimum vor, falls l gerade und $D^l f(x)$ positiv definit ist, das heißt $D^l f(x)(h, \dots, h) > 0$ für alle $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$,
 - ein Maximum vor, falls l gerade und $D^l f(x)$ negativ definit ist,
 - kein Extremum vor, falls l ungerade oder $D^l f(x)$ indefinit ist, das heißt es existieren $h_1, h_2 \in \mathbb{R}^n$, so dass $D^l f(x)(h_1, \dots, h_1) > 0$ und $D^l f(x)(h_2, \dots, h_2) < 0$.

Im Allgemeinen ist diese Charakterisierung jedoch weniger hilfreich als im eindimensionalen Fall. Zum Einen ist es insbesondere für $l > 2$ relativ kompliziert zu bestimmen ob eine multilineare Abbildung positiv definit ist. Zum Anderen können die Ableitungen auch (positiv) semidefinit sein, also $D^l f(x)(h, \dots, h) \geq 0$ für alle $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ aber $D^l f(x)(h, \dots, h) = 0$ für bestimmte h .

6.3 Funktionenfolgen und Differenzierbarkeit

Beispiel 6.30. Betrachte die Funktionenfolge (f_n) gegeben durch

$$f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ x \mapsto \frac{1}{n} e^{inx}.$$

Es gilt

$$\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n}$$

also konvergiert die Folge (f_n) gleichmäßig gegen 0.

Die Folge der Ableitungen

$$f'_n(x) = ie^{inx} = i(e^{ix})^n$$

konvergiert jedoch nur für $x \in \{2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Das obige Beispiel suggeriert, dass die Bedingungen an die Konvergenz der Funktionenfolge nicht ausreichen um gutes Verhalten bezüglich der Ableitungen zu erreichen. Das liegt daran, dass selbst Funktionen mit beliebig kleinen Normen sehr stark oszillieren können, so dass die Ableitung entsprechend große Werte annimmt. Wir müssen also zusätzlich Bedingungen an die Konvergenz der Folge der Ableitungen stellen.

Bemerkung 6.31. Wir haben in Abschnitt 5.6 die Supremumnorm für zahlwertige Funktionen eingeführt und damit die gleichmäßige Konvergenz definiert. Falls $f : X \rightarrow V$ eine Abbildung von einem metrischen Raum in einen normierten Raum $(V, \|\cdot\|)$ ist, dann können wir analog definieren

$$\|f\|_\infty = \sup \{ \|f(x)\| \mid x \in X \}.$$

Auch die Räume der beschränkten $\mathbf{B}(X, V)$ beziehungsweise stetigen beschränkten $\mathbf{C}_b(X, V)$ Funktionen können damit analog definiert werden. Gleichmäßige Konvergenz einer Folge solcher Funktionen ist dann die Konvergenz bezüglich dieser Norm.

Satz 5.76 und Satz 5.79 gelten dann entsprechend, vorausgesetzt der Raum V ist vollständig. Dazu muss in den entsprechenden Beweisen nur jeweils der Betrag durch die Norm $\|\cdot\|$ ersetzt werden.

Satz 6.32. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ und $f_n : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar für jedes $n \in \mathbb{N}$. Falls die Folgen (f_n) und (Df_n) gleichmäßig gegen Funktionen $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ beziehungsweise $g : U \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$ konvergieren, dann ist f differenzierbar und es gilt $Df = g$.

Beweis. Es genügt wiederum den Fall $m = 1$ zu betrachten, da wir im allgemeinen Fall den Satz komponentenweise anwenden können. Wie zuvor verwenden wir auf $\mathbb{R}^{m \times n}$ die Operatornorm. Da die f_n stetig differenzierbar sind und Df_n gleichmäßig gegen g konvergieren, folgt aus Satz 5.79 die Stetigkeit von g .

Sei nun $x \in U$ fest und $\epsilon > 0$. Dann gibt es $\delta > 0$ so, dass $\|g(y) - g(x)\| < \frac{\epsilon}{3}$ falls $\|y - x\| < \delta$. Außerdem existiert $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n > N$ gilt $\|Df_n - g\|_\infty \leq \frac{\epsilon}{3}$.

Sei $y \in B_\delta(x)$. Dann existiert nach dem Mittelwertsatz für jedes n ein

$$\xi_n \in S_{xy} = \{x + t(y - x) \mid t \in (0, 1)\}$$

so, dass $f_n(y) - f_n(x) = Df_n(\xi_n)(y - x)$. Wir stellen fest, dass auch $\xi_n \in B_\delta(x)$. Dann gilt für $n > N$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|y - x\|} |f_n(y) - f_n(x) - Df_n(x)(y - x)| &= \frac{1}{\|y - x\|} |(Df_n(\xi_n) - Df_n(x))(y - x)| \\ &\leq \|Df_n(\xi_n) - Df_n(x)\| \\ &\leq \|Df_n(\xi_n) - g(\xi_n)\| + \|g(\xi_n) - g(x)\| + \|g(x) - Df_n(x)\| \\ &\leq 2\|Df_n - g\|_\infty + \|g(\xi_n) - g(x)\| < \epsilon. \end{aligned}$$

Für $n \rightarrow \infty$ erhalten wir

$$\frac{1}{\|y - x\|} |f(y) - f(x) - g(x)(y - x)| \leq \epsilon.$$

Da ϵ beliebig positiv gewählt war, haben wir gezeigt, dass die linke Seite für $y \rightarrow x$ gegen 0 konvergiert. Damit ist nach Bemerkung 6.8 f in x (total) differenzierbar mit Ableitung $Df(x) = g(x)$. \square

Bemerkung 6.33. Wir können nun auf $\mathbf{C}_b^1(U, \mathbb{R}^m)$, dem Raum der differenzierbaren, beschränkten Funktionen mit beschränkten Ableitungen, eine Norm wie folgt definieren:

$$\|f\|_{\mathbf{C}^1} := \|f\|_\infty + \|Df\|_\infty. \quad (6.2)$$

Konvergenz bezüglich dieser Norm bedeutet dann genau gleichmäßige Konvergenz und gleichmäßige Konvergenz der Ableitungen. Dann ist der obige Satz äquivalent zu der Aussage, dass $\mathbf{C}_b^1(U, \mathbb{R}^m)$ mit dieser Norm vollständig ist.

Wir formulieren die folgenden Resultate über Potenzreihen lediglich für Entwicklungen um 0, sie gelten aber sinngemäß für beliebige Entwicklungspunkte.

Satz 6.34. *Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius r . Dann ist f auf $B_r(0)$ differenzierbar und es gilt $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$.*

Beweis. Wir untersuchen zunächst den Konvergenzradius R der formal abgeleiteten Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n.$$

Da $(\sqrt[n]{n})$ gegen 1 konvergiert, gilt für $\epsilon > 0$ für hinreichend große n

$$(1 - \epsilon) \sqrt[n]{|a_n|} \leq \sqrt[n]{n |a_n|} \leq (1 + \epsilon) \sqrt[n]{|a_n|}$$

und damit

$$\frac{1 - \epsilon}{r} = (1 - \epsilon) \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n|a_n|} = \frac{1}{R} \leq \frac{1 + \epsilon}{r}.$$

Da diese Gleichung für jedes positive ϵ gilt, muss $r = R$ sein.

Setze nun für $x \in B_r(0)$

$$g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Sei nun $x \in B_r(0)$ fest und wähle $a > 0$, so dass $|x| < a < r$. Nach Satz 5.85 konvergieren die Partialsummenfolgen

$$f_N := \sum_{n=0}^N a_n x^n$$

$$g_N := \sum_{n=0}^N n a_n x^{n-1}$$

auf $B_a(0)$ (sogar auf $K_a(0)$) gleichmäßig gegen f beziehungsweise g . Offensichtlich gilt $f'_N = g_N$. Damit folgt aus Satz 6.32, dass die Grenzfunktion f differenzierbar auf $B_a(0)$ ist und $f' = g$.

Da Differenzierbarkeit eine lokale Eigenschaft ist und x innerer Punkt von $B_a(0)$ ist gilt $f'(x) = g(x)$. Da $x \in B_r(0)$ beliebig war, gilt $f' = g$ auf $B_r(0)$. \square

Korollar 6.35. Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius. Dann ist f beliebig differenzierbar, und es gilt $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$. Daraus folgt insbesondere, dass die Reihendarstellung einer Funktion f – so es eine solche gibt – eindeutig bestimmt ist.

Beweis. Die beliebige Differenzierbarkeit folgt induktiv aus dem vorhergehenden Satz. Ebenfalls induktiv folgt, dass wir auch die höheren Ableitungen gliedweise berechnen dürfen. Es gilt also

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) a_n x^{n-k}.$$

Setzen wir $x = 0$ ein erhalten wir $f^{(k)}(0) = k! a_k$. \square

Beispiel 6.36. Wir können jetzt nochmals die bereits bekannte Ableitung der Exponentialfunktion bestimmen

$$(e^x)' = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n!} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = e^x.$$

Bemerkung 6.37. Es liegt nun nahe, für beliebige glatte Funktionen f die Taylorreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

zu betrachten und für Rechnungen zu verwenden. Falls es überhaupt möglich ist, eine Funktion durch eine Potenzreihe (mit positivem Konvergenzradius) auszudrücken, dann ist das die einzige Möglichkeit.

Es gibt aber Funktionen, die nicht als Potenzreihe geschrieben werden können. Zum Einen ist es möglich, dass der Konvergenzradius der obigen Reihe 0 ist. Zum anderen gibt es aber auch Funktionen, die nicht mit ihrer (konvergenten) Taylorreihe übereinstimmen. So ist die Funktion

$$x \mapsto \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x}\right) & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

in $x = 0$ beliebig differenzierbar und es gilt $f^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die zugehörige Taylorreihe konvergiert also auf ganz \mathbb{R} , hat aber offensichtlich nichts mit der ursprünglichen Funktion zu tun.

Definition 6.38. Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und seien $a_\eta \in \mathbb{K}$ Koeffizienten für jedes $\eta \in \mathbb{N}_0^d$. Dann ist

$$\sum_{\eta \in \mathbb{N}_0^d} a_\eta x^\eta$$

eine (formale) Potenzreihe in d Variablen (wobei wir Multiindexnotation verwendet haben).

Eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{K}$ für eine offene Nullumgebung $U \subset \mathbb{R}^d$ heißt analytisch in 0, wenn sie in eine Potenzreihe um 0 entwickelt werden kann, das heißt es existieren $\epsilon > 0$ und $a_\eta \in \mathbb{K}$ für jedes $\eta \in \mathbb{N}_0^d$, so dass

$$f(x) = \sum_{\eta \in \mathbb{N}_0^d} a_\eta x^\eta$$

für alle $x \in B_\epsilon(0)$.

Bemerkung 6.39. (i) Die Konvergenz der auftretenden Reihen kann zum Beispiel wie folgt definiert werden: wir nennen $\sum_{\eta \in \mathbb{N}_0^d} a_\eta x^\eta$ konvergent gegen S , falls für jedes $\epsilon > 0$ eine endliche Teilmenge $A \subset \mathbb{N}_0^d$ existiert, so dass für jede endliche Teilmenge $A \subset B \subset \mathbb{N}_0^d$ gilt

$$\left| \sum_{\eta \in B} a_\eta x^\eta - S \right| < \epsilon.$$

- (ii) Der Konvergenzbereich einer Potenzreihe in mehr als einer Variablen ist nicht mehr so einfach zu charakterisieren wie im eindimensionalen Fall (siehe Beispiel 6.40). Es gilt aber analog zum eindimensionalen Fall: falls $y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$ ein Punkt ist mit $y_1 \neq 0, \dots, y_d \neq 0$, so dass

$$\sum_{\eta \in \mathbb{N}_0^d} a_\eta y^\eta$$

konvergiert, dann konvergiert die Reihe für jedes x im offenen Quader

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^d \mid |x_i| < |y_i| \text{ für alle } i \in \{1, \dots, d\} \right\}$$

absolut, das heißt es gilt

$$\sum_{\eta \in \mathbb{N}_0^d} |a_\eta| (|x_1|, \dots, |x_d|)^\eta < \infty.$$

- (iii) Konvergiert eine Potenzreihe auf einer offenen Umgebung U von 0, so ist sie dort beliebig differenzierbar und es gilt

$$a_\eta = \frac{\partial^\eta f(0)}{\eta!}.$$

Dabei setzen wir

$$\partial^\eta f = \partial_1^{\eta_1} \dots \partial_d^{\eta_d} f \text{ und } \eta! := \eta_1! \dots \eta_d!.$$

- (iv) Aus der vorhergehenden Bemerkung folgt insbesondere, dass die Koeffizienten der Potenzreihendarstellung einer Funktion (falls diese existiert) eindeutig bestimmt sind. Die obige Gleichung ist selten nützlich um die Potenzreihendarstellung einer Funktion zu finden (falls diese existiert). Umgekehrt kann sie jedoch hilfreich sein, falls man viele (partielle) Ableitungen einer Funktion gleichzeitig berechnen will um zum Beispiel Extrema zu untersuchen oder die Taylorformel aufzustellen. Wir kennen bereits einige Reihendarstellungen, z.B. für e^x , $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\frac{1}{1-x}$ sowie alle Polynome. In vielen Fällen kann man nun Reihendarstellungen für Funktionen finden, indem man sie mittels geschickter Umformungen als Summen oder Produkte (manchmal auch Verkettungen) dieser Funktionen darstellt:

$$f(x) = xe^{x^2} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!}.$$

- (v) Es gilt

$$\mathbf{C}(U) \supset \mathbf{C}^1(U) \supset \mathbf{C}^2(U) \supset \dots \supset \mathbf{C}^k(U) \supset \dots \supset \mathbf{C}^\infty(U) \supset \mathbf{C}^\omega(U).$$

Dabei bezeichnet $\mathbf{C}^\omega(U)$ den Raum der analytischen Funktionen, das heißt Funktionen die in einer Umgebung jedes Punktes einer Reihendarstellung besitzen. Alle Inklusionen in obiger Kette sind echt.

- (vi) Die analytischen Funktionen sind abgeschlossen unter Summen, Produkten und Verkettungen. Eine Potenzreihe ist auf ihrem Konvergenzkreis analytisch. Die Beweise für diese Aussagen sind nicht trivial.

Beispiel 6.40. Die Potenzreihe in zwei reellen Variablen

$$\sum_{n=0}^{\infty} (xy)^n$$

konvergiert auf $\{(x, y) \mid |xy| < 1\}$ gegen $\frac{1}{1-xy}$. Diese Funktion ist also analytisch in 0.

6.4 Der Banachsche Fixpunktsatz und der Satz über implizite Funktionen

Theorem 6.41 (Banachscher Fixpunktsatz). Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $\varphi : X \rightarrow X$ eine streng kontraktive Abbildung, das heißt es gibt $c \in [0, 1)$, so dass

$$d(\varphi(x), \varphi(y)) \leq cd(x, y)$$

für alle $x, y \in X$ gilt. Dann hat φ genau einen Fixpunkt, das heißt es existiert genau ein $x \in X$, so dass $\varphi(x) = x$.

Beweis. Zunächst stellen wir fest, dass φ insbesondere Lipschitz-stetig, also stetig ist. Sei $x_0 \in X$ und definiere rekursiv die Folge $x_n := \varphi(x_{n-1})$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt auf Grund der strengen Kontraktivität

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(\varphi(x_n), \varphi(x_{n-1})) \leq cd(x_n, x_{n-1})$$

und mit Induktion folgt

$$d(x_{n+k}, x_{n+k-1}) \leq c^k d(x_n, x_{n-1})$$

für alle $k, n \in \mathbb{N}$. Insbesondere folgt

$$d(x_n, x_{n-1}) \leq c^{n-1} d(x_1, x_0)$$

Aus der Dreiecksungleichung folgt dann

$$\begin{aligned} d(x_{n+k}, x_{n-1}) &\leq d(x_{n+k}, x_{n+k-1}) + d(x_{n+k-1}, x_{n+k-2}) + \cdots + d(x_n, x_{n-1}) \\ &\leq (c^k + c^{k-1} + \cdots + c + 1) d(x_n, x_{n-1}) \\ &= \frac{1 - c^{k+1}}{1 - c} d(x_n, x_{n-1}) \leq \frac{1 - c^{k+1}}{1 - c} c^{n-1} d(x_1, x_0) \\ &\leq \frac{c^{n-1}}{1 - c} d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Da der letzte Term unabhängig von k ist und für $n \rightarrow \infty$ gegen 0 konvergiert, haben wir damit die Cauchy-Eigenschaft der Folge (x_n) gezeigt. Nach Voraussetzung ist X vollständig, also konvergiert (x_n) gegen ein $x \in X$. Dann gilt

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_{n-1}) = \varphi \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n-1} \right) = \varphi(x)$$

wobei wir im vorletzten Schritt die Stetigkeit von φ verwendet haben.

Es bleibt noch die Eindeutigkeit des Fixpunktes zu zeigen. Seien $x, y \in X$ Fixpunkte von φ . Dann gilt

$$d(x, y) = d(\varphi(x), \varphi(y)) \leq cd(x, y).$$

Da $c < 1$ folgt daraus $d(x, y) = 0$ und aus der Definitheit der Metrik $x = y$. \square

Bemerkung 6.42. (i) Eine Folgerung aus dem Banachschen Fixpunktsatz: läßt man in diesem Hörsaal einen Stadtplan von Leipzig zufällig auf den Boden fallen, dann gibt es genau einen Punkt auf dem Stadtplan, der genau über dem entsprechenden Punkt der Stadt liegt.

(ii) Aus dem Beweis ist auch ein Verfahren zum Bestimmen des Fixpunktes ersichtlich: man wendet φ wiederholt auf einen beliebigen Startpunkt an. Läßt man in einer der obigen Abschätzungen $k \rightarrow \infty$ gehen, so erhält man

$$d(x, x_{n-1}) \leq \frac{1}{1-c} d(x_n, x_{n-1}),$$

also eine Abschätzung für den Fehler.

(iii) Viele Probleme lassen sich in Fixpunktprobleme überführen. Die Schwierigkeit liegt dann häufig darin, einen passenden metrischen Raum zu finden, so dass man den Satz anwenden kann.

Beispiel 6.43. Betrachte die Gleichung $x - y^2 = 0$. Für $x \in (0, \infty)$ gibt es die beiden Lösungen

$$y = \sqrt{x} \text{ beziehungsweise } y = -\sqrt{x}.$$

Für jeden Lösungspunkt (ξ, η) der Gleichung gibt es also eine Umgebung U und eine Funktion f , so dass alle in U liegenden Lösungen der Gleichung durch $(x, f(x))$ gegeben sind. Darüber hinaus ist f sogar stetig differenzierbar.

Bemerkung 6.44. In vielen Fällen wird es nicht mehr möglich sein, Formeln für die Lösungen von Gleichungssystemen anzugeben. Der Satz über implizite Funktionen erlaubt es unter bestimmten Voraussetzungen zumindest die Existenz und bestimmte Eigenschaften solcher Lösungen nachzuweisen.

Sei $F : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^q$ eine Abbildung. Betrachten wir x_1, \dots, x_p als unabhängige Variablen und y_1, \dots, y_q als abhängige Variablen und setzen $x = (x_1, \dots, x_p)$, $y = (y_1, \dots, y_q)$, dann ist durch

$$F(x, y) = 0$$

ein Gleichungssystem gegeben. Wir betrachten hier nur den Fall, in dem die Anzahl der Gleichungen mit der Anzahl der unabhängigen Variablen übereinstimmt.

Gehen wir nun davon aus, dass (ξ, η) eine Lösung ist, dass also $F(\xi, \eta) = 0$ gilt, dann stellt sich die Frage, ob das Gleichungssystem zumindest für x in der Nähe von ξ Lösungen hat und ob diese eindeutig sind. Ist das der Fall, dann können wir uns für Eigenschaften der durch $F(x, f(x)) = 0$ definierten Funktion interessieren.

Ist so ein F gegeben und differenzierbar, so bezeichnen wir mit $D_y F(x, \eta) \in \mathbb{R}^{q \times q}$ die Ableitung der Funktion $y \mapsto F(x, y)$ an der Stelle η , also für festes x . Analog ist $D_x F(\xi, y) \in \mathbb{R}^{q \times p}$ die Ableitung der Funktion $x \mapsto F(x, y)$ an der Stelle ξ für festes y .

Die grundlegende Idee ist dabei die folgende. Ist F differenzierbar, dann verhält es sich in der Nähe des Punktes (ξ, η) wie eine lineare Funktion. Dann erhalten wir also näherungsweise ein Gleichungssystem welches linear in den abhängigen Variablen y ist

$$0 = F(x, y) \approx F(x, \eta) + D_y F(x, \eta)(y - \eta),$$

und welches lösbar ist, falls $D_y F(x, \eta)$ invertierbar ist.

Theorem 6.45 (Satz über implizite Funktionen). *Seien $U \subset \mathbb{R}^p$ und $V \subset \mathbb{R}^q$ offen. Sei $F : U \times V \rightarrow \mathbb{R}^q$ stetig differenzierbar und es seien $\xi \in U$ und $\eta \in V$ so, dass $F(\xi, \eta) = 0$ und $D_y F(\xi, \eta)$ invertierbar ist.*

Dann existieren Umgebungen $\tilde{U} \subset U$ von ξ und $\tilde{V} \subset V$ von η und eine stetige Funktion $f : \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$, so dass $f(\xi) = \eta$ und $F(x, f(x)) = 0$ für alle $x \in \tilde{U}$.

Beweis. Wir setzen $D = D_y F(\xi, \eta)$. Wir betrachten die folgende Abbildung φ die Funktionen auf Funktionen abbildet (den genauen Definitionsbereich von φ werden wir weiter unten festlegen)

$$\varphi(g)(x) = g(x) - D^{-1}F(x, g(x)).$$

Da D^{-1} invertierbar ist, gilt $\varphi(f) = f$ genau dann, wenn $F(x, f(x)) = 0$ ist, wenn f also unser ursprüngliches Problem löst. Wir haben unser Problem also in ein Fixpunktproblem umgeformt auf das wir den Banachschen Fixpunktsatz anwenden wollen. Wir stellen noch fest, dass φ stetige Funktionen auf stetige Funktionen abbildet.

Bezeichne $I : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^q$ die identische Abbildung. Die Funktion

$$(x, y) \mapsto \|I - D^{-1}D_y F(x, y)\|$$

ist nach Voraussetzung stetig und verschwindet im Punkt (ξ, η) . Es existieren also $\delta, \epsilon > 0$ so, dass $B_\delta(\xi) \subset U$, $B_\epsilon(\eta) \subset V$ und

$$\|I - D^{-1}D_y F(x, y)\| \leq \frac{1}{2}$$

für alle $x \in B_\delta(\xi)$ und $y \in \tilde{V} := B_\epsilon(\eta)$. Auf Grund der Stetigkeit von $x \mapsto \|D^{-1}F(x, \eta)\|$ können wir ein (möglicherweise kleineres) $\delta > 0$ wählen, so dass

$$\|D^{-1}F(x, \eta)\| \leq \frac{\epsilon}{4}$$

für alle $x \in \tilde{U} = B_\delta(\xi)$.

Sei nun X die Menge aller stetigen Funktionen $g : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^q$ die

- (i) $g(\xi) = \eta$ und
- (ii) $\|g(x) - \eta\| \leq \frac{\epsilon}{2}$ für alle $x \in \tilde{U}$

erfüllen. Die zweite Bedingung impliziert insbesondere, dass $g(x) \in \tilde{V}$ für alle $g \in X$ und $x \in \tilde{U}$. Damit ist X Teilmenge des Banachraumes $\mathbf{C}_b(\tilde{U}, \mathbb{R}^q)$ mit der Supremumnorm

$$\|g\|_\infty = \sup \left\{ \|g(x)\| \mid x \in \tilde{U} \right\}.$$

Darüber hinaus ist X in diesem Raum abgeschlossen, da die obigen Bedingungen unter gleichmäßigen Grenzwerten erfüllt bleiben also nach Satz 5.38 vollständig. Außerdem ist X nicht leer, denn es enthält mindestens die konstante Funktion η . Wir wollen nun zeigen, dass φ Funktionen aus X nach X abbildet und dass es die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt.

Betrachte nun für festes $x \in \tilde{U}$ die Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi : \tilde{V} &\rightarrow \mathbb{R}^q \\ y &\mapsto y - D^{-1}F(x, y). \end{aligned}$$

Dann folgt mit dem allgemeinen Mittelwertsatz Satz 6.14 für alle $y, z \in V$

$$\|\Phi(y) - \Phi(z)\| \leq \sup_{v \in \tilde{V}} \|I - D^{-1}D_y F(x, y)\| \|y - z\| \leq \frac{1}{2} \|y - z\|.$$

Insbesondere gilt für $g_1, g_2 \in X$ und $x \in \tilde{U}$

$$\begin{aligned} \|(\varphi(g_1))(x) - (\varphi(g_2))(x)\| &= \|\Phi(g_1(x)) - \Phi(g_2(x))\| \\ &\leq \frac{1}{2} \|g_1(x) - g_2(x)\| \leq \frac{1}{2} \|g_1 - g_2\|_\infty \end{aligned}$$

und damit ist φ eine strenge Kontraktion

$$\|\varphi(g_1) - \varphi(g_2)\|_\infty \leq \frac{1}{2} \|g_1 - g_2\|_\infty.$$

Wir müssen nun noch zeigen, dass φ die Menge X auf sich selbst abbildet. Aus der Definition von φ ist unmittelbar ersichtlich, dass für jedes $g \in X$ gilt $(\varphi(g))(\xi) = \eta$ und dass $\varphi(g)$ wiederum eine stetige Funktion ist. Schließlich gilt

$$\begin{aligned} \|(\varphi(g))(x) - \eta\| &\leq \|(\varphi(g))(x) - (\varphi(\eta))(x)\| + \|(\varphi(\eta))(x) - \eta\| \\ &\leq \frac{1}{2} \|g(x) - \eta\| + \|D^{-1}F(x, \eta)\| \leq \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Jetzt sind alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt. Die Abbildung φ hat also genau einen Fixpunkt $f \in X$ und für dieses f gilt $F(x, f(x)) = 0$ für alle $x \in \tilde{U}$. \square

Für die folgenden Aussagen behalten wir die Voraussetzungen sowie die Notation des Theorems und seines Beweises bei.

Bemerkung 6.46. Die Eindeutigkeitsaussage des Banachschen Fixpunktsatzes besagt, dass es für fest gewähltes \tilde{U} und \tilde{V} genau eine Funktion in X gibt, die $F(x, f(x))$ erfüllt. Es gilt jedoch etwas stärker: für festes $x \in \tilde{U}$ ist $f(x)$ die einzige Lösung des Gleichungssystems $F(x, y) = 0$. Für jede Lösung y gilt

$$\|y - f(x)\| = \|\Phi(y) - \Phi(f(x))\| \leq \frac{1}{2} \|y - f(x)\|,$$

was nur durch $y = f(x)$ zu erfüllen ist.

Satz 6.47. *Es gibt eine (möglicherweise kleinere) Umgebung \tilde{U} von ξ auf der f stetig differenzierbar ist. Die Ableitung ist durch*

$$Df(x) = - (D_y F(x, f(x)))^{-1} D_x F(x, f(x))$$

gegeben.

Ohne Beweis.

Korollar 6.48 (Satz über die Umkehrfunktion). *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Falls $Df(\xi)$ invertierbar ist für ein $\xi \in U$, dann gibt es eine Umgebung \tilde{U} von ξ und eine Umgebung \tilde{V} von $\eta = f(\xi)$, so dass f die Umgebung \tilde{U} bijektiv auf \tilde{V} abbildet und dass die Umkehrfunktion*

$$\begin{aligned} g : \tilde{V} &\rightarrow \tilde{U} \\ y &\mapsto f^{-1}(y) \end{aligned}$$

stetig differenzierbar ist. Es gilt

$$Dg(\eta) = (Df(\xi))^{-1}.$$

Beweisidee. Wende den Satz über implizite Funktionen an, um das Gleichungssystem

$$F(x, y) = f(x) - y = 0$$

(lokal) nach x aufzulösen. □

Beispiel 6.49. Wir wollen mögliche Umkehrungen der komplexen Exponentialfunktion $z \mapsto \exp(z)$ untersuchen. Wir schreiben die Funktion zunächst als Funktion von \mathbb{R}^2 nach \mathbb{R}^2 , also $z = x + iy$ und

$$\exp(z) = \exp(x + iy) = \exp(x)(\cos(y) + i \sin(y)).$$

Wir interessieren uns also für die Funktion

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (\exp(x) \cos(y), \exp(x) \sin(y)). \end{aligned}$$

Diese Abbildung ist offensichtlich (sogar beliebig) differenzierbar und $D\varphi(x, y)$ ist stets invertierbar. Nach dem Satz über die Umkehrfunktion besitzt φ auf dem Bild $\exp(\mathbb{C})$ lokal eine stetig differenzierbare (sogar glatte) Umkehrfunktion, eine komplexe Logarithmusfunktion.

Man kann zeigen, dass $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt. Üblicherweise definiert man den sogenannten Hauptzweig des komplexen Logarithmus so, dass er folgendermaßen abbildet

$$\ln : \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\} \rightarrow \mathbb{R} \times (-\pi, \pi).$$

Man erhält dann weitere „Zweige“ der Logarithmusfunktion durch $\ln + 2\pi k$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Es ist auch möglich, komplexe Logarithmusfunktionen mit anderen Definitionen und Wertebereichen zu definieren, jedoch gibt es keine auf ganz $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ stetige Logarithmusfunktion.

7 Maße und Integrale

7.1 Inhalte und Maße

Definition 7.1. Eine Menge M heißt abzählbar wenn es eine surjektive Abbildung von \mathbb{N} nach M gibt, also eine Folge $(x_n) \subset M$ so, dass für jedes $y \in M$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, das $x_n = y$ erfüllt. Eine Menge M heißt abzählbar unendlich, wenn sie abzählbar und unendlich ist.

Bemerkung 7.2. (i) Abzählbar unendliche Mengen sind in gewisser Weise die kleinsten unendlichen Mengen.

(ii) Teilmengen von abzählbaren Mengen sind abzählbar (wähle eine entsprechende Teilfolge).

(iii) Die Vereinigung zweier abzählbarer Teilmengen M und K ist abzählbar: Wenn $(x_n) \subset M$ und $(y_n) \subset K$ sind, dann ist die Folge

$$(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, \dots)$$

surjektiv auf $M \cup N$.

Wendet man diese Aussage iterativ an, dann erhält man, dass endliche Vereinigungen abzählbarer Mengen abzählbar sind. Insbesondere ist zum Beispiel die Menge \mathbb{Z} abzählbar.

(iv) Die Vereinigung abzählbar vieler abzählbarer Teilmengen ist abzählbar. Sei M eine abzählbare Menge abzählbarer Mengen und $(A_n) \subset M$ eine surjektive Folge und $(x_{nk})_{k \in \mathbb{N}} \subset A_n$ eine surjektive Folge für jedes n , dann ist die Folge

$$(x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{13}, x_{22}, x_{31}, x_{14}, x_{23}, x_{32}, x_{41}, \dots)$$

eine surjektive Folge auf $\bigcup_{A \in M} A$.

Insbesondere ist für zwei abzählbare Mengen M und K ihr kartesisches Produkt

$$M \times K = \bigcup_{x \in M} \{(x, y) \mid y \in K\}$$

abzählbar. Damit sind die Mengen $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ und damit auch \mathbb{Q} abzählbar.

(v) Es gibt Mengen, die nicht abzählbar sind, zum Beispiel $[0, 1]$, \mathbb{R} sowie $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Definition 7.3. Sei Ω eine Menge. Ein System von Teilmengen (I eine beliebige Indexmenge) $(A_i)_{i \in I} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ heißt paarweise disjunkt, wenn $A_i \cap A_j = \emptyset$ wann immer $i \neq j$.

Bemerkung 7.4. (i) Sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ System von Teilmengen. Eine Abbildung $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ heißt Inhalt, falls für alle $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ paarweise disjunkt gilt: falls $A_1 \cup \dots \cup A_n \in \mathcal{A}$, dann gilt

$$\mu(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i) \quad (\text{Additivität}).$$

Der Inhaltsbegriff verallgemeinert die Begriffe Länge (1-dim.), Fläche (2-dim.) und Volumen (3-dim.).

(ii) Im Kontext von Maßen und Inhalten (und später Integralen) definieren wir

$$c + \infty = \infty \quad \forall c \in \mathbb{R} \cup \infty$$

$$0 \cdot \infty = 0.$$

(iii) Ziel wird es sein, das Mengensystem \mathcal{A} möglichst groß zu wählen. Ideal wäre $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, aber das sogenannte Banach-Tarski-Paradoxon besagt: Es existiert eine disjunkte Zerlegung

$$A_1 \cup \dots \cup A_p \cup B_1 \cup \dots \cup B_q = B_1(0) \subset \mathbb{R}^3$$

und Bewegungen (Kombinationen aus Drehungen und Verschiebungen) D_1, \dots, D_p sowie T_1, \dots, T_q , so dass

$$D_1 A_1 \cup \dots \cup D_p A_p = B_1(0) = T_1 B_1 \cup \dots \cup T_q B_q.$$

Es kann also keinen unter Bewegungen invarianten Inhalt auf $\mathcal{P}(\mathbb{R}^3)$ geben.

Definition 7.5. Sei Ω eine Menge. Ein System \mathcal{A} von Teilmengen von Ω heißt σ -Algebra, wenn

- (i) $\emptyset \in \mathcal{A}$,
- (ii) $A \in \mathcal{A} \implies A^c \in \mathcal{A}$,
- (iii) für eine abzählbare Teilmenge $\{A_1, A_2, \dots\} \subset \mathcal{A}$ folgt

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}.$$

Eine Abbildung $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ heißt ein Maß, falls $\mu(\emptyset) = 0$ und für paarweise disjunkte Teilmengen $(A_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ gilt

$$\mu \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i) \quad \sigma\text{-Additivität.}$$

Eine Grundmenge zusammen mit einer σ -Algebra (Ω, \mathcal{A}) heißt messbarer Raum oder Messraum.

Ist zusätzlich ein Maß vorgegeben, so heißt das Tripel $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum.

Beispiel 7.6. (i) Sei Ω eine beliebige Menge mit der disjunkten Zerlegung

$$\Omega = A_1 \cup \dots \cup A_n.$$

Dann ist

$$\left\{ \bigcup_{i \in I} A_i \mid I \subset \{1, \dots, n\} \right\}$$

eine σ -Algebra.

(ii) Sei Ω beliebig und $x \in \Omega$. Dann ist

$$\delta_x : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, \infty]$$

$$A \mapsto \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ein Maß.

(iii) Sei Ω beliebig, dann ist

$$\# : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, \infty]$$

$$A \mapsto \begin{cases} \text{Anzahl der Elemente in } A & A \text{ endlich} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

ein Maß, das sogenannte Zählmaß. Dieses Maß ist besonders für endliche oder abzählbare Mengen nützlich.

(iv) Sei Ω abzählbar und $(a_\omega)_{\omega \in \Omega} \subset [0, \infty]$, dann ist

$$\mu : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, \infty]$$

$$A \mapsto \sum_{\omega \in A} a_\omega$$

ein Maß. Man kann zeigen, dass jedes Maß auf einer abzählbaren Menge Ω von dieser Form ist.

(v) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $A \in \mathcal{A}$. Definiere die auf A eingeschränkte σ -Algebra

$$\mathcal{A}|_A := \{B \cap A \mid B \in \mathcal{A}\}.$$

Dann ist $(A, \mathcal{A}|_A, \mu)$ ein Maßraum.

Bemerkung 7.7. Für abzählbare Teilmengen $\{A_1, A_2, \dots\} \subset \mathcal{A}$ einer σ -Algebra \mathcal{A} gilt

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i^c \right)^c.$$

Falls $A, B \in \mathcal{A}$, dann gilt auch $A \setminus B = A \cap B^c \in \mathcal{A}$.

Ein Maß ist stets monoton, das heißt falls $A, B \in \mathcal{A}$ und $A \subset B$, dann gilt

$$\mu(B) = \mu(B \setminus A) + \mu(A) \geq \mu(A).$$

Definition 7.8. Eine Abbildung $\mu : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, \infty]$ heißt äußeres Maß, falls $\mu(\emptyset) = 0$ und

$$A \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \implies \mu(A) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i)$$

gilt.

Genauso wie Maße, sind auch äußere Maße monoton.

Sei \mathcal{I} die Menge der beschränkten Intervalle

$$\mathcal{I} = \bigcup_{x,y \in \mathbb{R}, x < y} \{[x, y], [x, y), (x, y], (x, y)\}.$$

Wir definieren auf \mathcal{I} die Länge als

$$l([x, y]) := l([x, y)) := l((x, y]) := l((x, y)) = y - x.$$

Satz 7.9. *Die Abbildung*

$$\lambda : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty]$$

$$A \mapsto \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} l(I_i) \mid A \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_i, I_i \in \mathcal{I} \forall i \in \mathbb{N} \right\}$$

definiert ein äußeres Maß auf den reellen Zahlen.

Beweis. Es gilt $\lambda(\emptyset) \leq l([0, \epsilon]) = \epsilon$ für jedes $\epsilon > 0$ also $\lambda(\emptyset) = 0$.

Sei nun $A \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$. Wir wollen zeigen, dass

$$\lambda(A) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda(A_k)$$

erfüllt ist. Falls die Summe auf der rechten Seite (bestimmt) divergiert, ist nichts zu zeigen, wir können also $\lambda(A_k) < \infty$ annehmen. Sei $\epsilon > 0$, dann existieren für jedes $k \in \mathbb{N}$ Intervalle (I_{ki}) , so dass

$$A_k \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_{ki} \text{ und } \sum_{i \in \mathbb{N}} l(I_{ki}) < \lambda(A_k) + \frac{\epsilon}{2^k}.$$

Dann gilt

$$A \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \subset \bigcup_{k, i \in \mathbb{N}} I_{ki}$$

und

$$\lambda(A) \leq \sum_{k, i \in \mathbb{N}} l(I_{ki}) < \sum_{k \in \mathbb{N}} \left(\lambda(A_k) + \frac{\epsilon}{2^k} \right) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda(A_k) + \epsilon.$$

Da das für jedes $\epsilon > 0$ gilt, folgt die gesuchte Ungleichung. \square

Bemerkung 7.10. Wir haben hier das äußere Lebesgue-Maß konstruiert. Dabei wurden kaum spezifische Eigenschaften der Intervalle aus \mathcal{I} benutzt. Eine analoge Konstruktion ist dementsprechend auch auf \mathbb{R}^2 (benutze Rechtecke statt Intervalle), auf \mathbb{R}^3 (Quader statt Intervalle) auf \mathbb{R}^n sowie in vielen weiteren Situationen möglich. Wir erhalten auf diese Weise ein äußeres Lebesgue-Maß auf \mathbb{R}^n für jedes $n \in \mathbb{N}$. Diese äußeren Maße sind noch nicht als unser gesuchter Flächen/Volumenbegriff geeignet, da sie im Allgemeinen nicht endlich additiv sind. Wir können jedoch ein echtes Maß erhalten, indem wir den Definitionsbereich einschränken.

Satz 7.11. Sei μ ein äußeres Maß auf $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$. Dann ist das System der messbaren Mengen

$$\mathcal{A} = \{A \subset \Omega \mid \mu(E) \geq \mu(E \cap A) + \mu(E \cap A^c) \forall E \in \mathcal{P}(\Omega)\}$$

eine σ -Algebra und $\mu|_{\mathcal{A}}$ ist ein Maß.

Beweis. Zunächst folgt aus der Subadditivität stets $\mu(E) \leq \mu(E \cap A) + \mu(E \cap A^c)$, eine Menge ist also messbar genau dann wenn

$$\mu(E) = \mu(E \cap A) + \mu(E \cap A^c)$$

für alle $E \in \mathcal{P}(\Omega)$.

Offenbar ist \emptyset messbar und A messbar genau dann wenn A^c messbar ist.

Es gilt für jedes $E \in \mathcal{P}(\Omega)$

$$E \cap (A \cup B) = (E \cap A) \cup (E \cap B) = (E \cap A) \cup (E \cap B \cap A^c)$$

und so folgt für A, B messbar mit der Subadditivität von μ

$$\begin{aligned} \mu(E) &= \mu(E \cap A) + \mu(E \cap A^c) = \mu(E \cap A) + \mu(E \cap A^c \cap B) + \mu(E \cap A^c \cap B^c) \\ &\geq \mu(E \cap (A \cup B)) + \mu(E \cap (A \cup B)^c) \geq \mu(E), \end{aligned}$$

Damit ist $A \cup B$ messbar und die obigen Ungleichungen sind in Wahrheit Gleichungen, es gilt also

$$\mu(E \cap A) + \mu(E \cap A^c \cap B) = \mu(E \cap (A \cup B)).$$

Aus der letzten Gleichung folgt falls A, B zusätzlich disjunkt sind

$$\mu(E \cap (A \cup B)) = \mu(E \cap A) + \mu(E \cap B)$$

und wir erhalten für $E = \Omega$ insbesondere die endliche Additivität von μ für messbare Mengen.

Seien nun $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ paarweise disjunkte, messbare Mengen und setze

$$S_n = \bigcup_{i=1}^n A_i \text{ und } S = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Dann folgt aus dem oben gezeigten induktiv, dass S_n messbar ist und für jedes $E \in \mathcal{P}(\Omega)$ gilt

$$\mu(E \cap S_n) = \sum_{i=1}^n \mu(E \cap A_i).$$

Die Messbarkeit impliziert dann auch

$$\mu(E) \geq \mu(E \cap S_n) + \mu(E \cap S_n^c) \geq \sum_{i=1}^n \mu(E \cap A_i) + \mu(E \cap S^c)$$

wobei wir die Monotonie des äußeren Maßes benutzt haben. Lassen wir nun $n \rightarrow \infty$ gehen und benutzen nochmals die Subadditivität dann folgt

$$\mu(E) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E \cap A_i) + \mu(E \cap S^c) \geq \mu(E \cap S) + \mu(E \cap S^c) \geq \mu(E).$$

Daraus ist wiederum ersichtlich, dass S messbar ist und

$$\mu(E \cap S) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E \cap A_j)$$

gilt. Insbesondere folgt, für $E = \Omega$ die σ -Additivität von μ für messbare Mengen.

Es bleibt noch zu zeigen, dass beliebige abzählbare Vereinigungen messbarer Mengen wieder messbar sind. Das folgt jedoch leicht, da für messbare $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ nach dem bereits gezeigten die Mengen

$$B_i := A_i \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{i-1} A_j \right)$$

messbar (Warum?) und paarweise disjunkt sind und es gilt

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i. \quad \square$$

Definition 7.12. Wenden wir den vorhergehenden Satz auf das äußere Maß in Satz 7.9 an, so erhalten wir die σ -Algebra der Lebesgue-messbaren Mengen und das Lebesgue-Maß λ auf den reellen Zahlen. Auf ganz analoge Weise kann man die Lebesgue-Maße auf \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3 und \mathbb{R}^n für jedes $n \in \mathbb{N}$ konstruieren.

Bemerkung 7.13. Wir nennen eine Menge $A \subset \mathbb{R}$ eine Nullmenge, wenn ihr äußeres Maß 0 ist, wenn sie sich also durch abzählbar viele Intervalle von beliebig kleiner Gesamtlänge überdecken lässt. Offensichtlich ist $\{x\}$ eine Nullmenge für jedes $x \in \mathbb{R}$. Daraus folgt – nicht mehr ganz so offensichtlich – für jede abzählbare Menge A aus der Subadditivität des äußeren Maßes

$$\lambda(M) = \lambda \left(\bigcup_{x \in A} \{x\} \right) \leq \sum_{x \in A} \lambda\{x\} = 0.$$

Damit sind beispielsweise die rationalen Zahlen \mathbb{Q} eine Nullmenge.

Offensichtlich sind Teilmengen von Nullmengen ebenfalls Nullmengen und daraus folgt insbesondere, dass alle Nullmengen Lebesgue-messbar sind (Warum?).

Wir wollen nun noch zeigen, dass diese σ -Algebra außer \emptyset und Ω noch weitere Mengen enthält und die Begriffe damit sinnvoll sind.

Satz 7.14. *Intervalle sind Lebesgue-messbar und es gilt $\lambda([a, b]) = b - a$*

Beweis. Sei $A \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall. Wir zerlegen \mathbb{R} in drei disjunkte Intervalle

$$\mathbb{R} = I_l \cup A \cup I_r.$$

Für $I \in \mathcal{I}$ überzeugt man sich leicht, dass $I \cap I_l, I \cap A$ und $I \cap I_r$ beschränkte Intervalle (oder leer) sind und

$$l(I) = l(I \cap I_l) + l(I \cap A) + l(I \cap I_r)$$

gilt. Sei nun $E \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ und

$$E \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_i$$

eine Überdeckung von E durch Intervalle. Dann sind

$$E \cap A \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_i \cap A \quad E \cap A^c \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (I_i \cap I_l) \cup (I_i \cap I_r)$$

Überdeckungen von $E \cap A$ und $E \cap A^c$ durch abzählbar viele Intervalle und es gilt

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} l(I_i) = \sum_{i \in \mathbb{N}} l(I_i \cap A) + \sum_{i \in \mathbb{N}} (l(I_i \cap I_l) + l(I_i \cap I_r)) \geq \lambda(E \cap A) + \lambda(E \cap A^c).$$

Da das für jede Überdeckung durch Intervalle von E gilt, folgt

$$\lambda(E) \geq \lambda(E \cap A) + \lambda(E \cap A^c)$$

und da E beliebig war, ist damit die Messbarkeit von A gezeigt. Damit enthält die σ -Algebra der Lebesgue-messbaren Mengen alle Intervalle.

Um nun zu zeigen, dass für $A = [a, b]$ gilt $\lambda(A) = b - a$, nehmen wir an, dass für abzählbar viele Intervalle $(I_n) \subset \mathcal{I}$ gilt

$$l := \sum_{n \in \mathbb{N}} l(I_n) < b - a.$$

Wir nehmen zunächst an, dass die I_n alle offen sind und definieren für $n \in \mathbb{N}$

$$A_n := A \setminus \left(\bigcup_{i=1}^n I_i \right).$$

Die Mengen A_n sind alle nicht leer, da sich A nicht durch endlich viele Intervalle von Gesamtlänge $< b - a$ überdecken lässt (vergleiche Übungsaufgabe 5 vom Blatt 10). Wir wählen nun eine beliebige Folge $(x_n) \subset A$ so, dass $x_n \in A_n$ ist. Da A kompakt ist, existiert eine gegen $x \in A$ konvergente Teilfolge. Wäre $x \in I_k$ für ein $k \in \mathbb{N}$, dann gäbe es – da I_k offen ist – unendlich viele x_i die ebenfalls in I_k enthalten wären, was aber

nach der Definition der Mengen A_n unmöglich ist. Wir haben damit gezeigt, dass die Intervalle I_n die Menge A nicht überdecken.

Seien nun die Intervalle I_n beliebig (also nicht mehr notwendig offen) und wir nehmen an, dass sie A überdecken. Sei (x_k) die Folge der (abzählbar vielen) Randpunkte aller dieser Intervalle. Sei $\epsilon = \frac{b-a-l}{4}$, dann ist

$$\left\{ \overset{\circ}{I}_n \mid n \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ \left(x_k - \frac{\epsilon}{2^k}, x_k + \frac{\epsilon}{2^k} \right) \mid k \in \mathbb{N} \right\}$$

eine Überdeckung von A durch abzählbar viele offene Intervalle mit Gesamtlänge

$$l + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\epsilon}{2^k} = l + \frac{b-a-l}{2} = \frac{b-a+l}{2} < b-a.$$

Eine solche Überdeckung ist aber nach dem oben gezeigten unmöglich. \square

Satz 7.15. *Jede offene und jede abgeschlossene Menge ist Lebesgue-messbar.*

Beweis. Sei O offen und $x \in O$. Dann existiert $\epsilon > 0$ so, dass $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subset O$ ist. Da die rationalen Zahlen dicht in \mathbb{R} sind, existieren l, r in \mathbb{Q} so, dass $x - \epsilon < l < x$ und $x < r < x + \epsilon$, das heißt x ist in einem Intervall (l, r) mit rationalen Randpunkten enthalten, das vollständig in O liegt. Wir haben also gezeigt, dass

$$O = \bigcup_{l, r \in \mathbb{Q} \text{ und } (l, r) \subset O} (l, r)$$

gilt. Wir wissen bereits, dass Intervalle Lebesgue-messbar sind und dass die Lebesgue-messbaren Mengen eine σ -Algebra sind, damit ist auch O Lebesgue-messbar.

Schließlich ist jede abgeschlossene Menge als Komplement einer offenen Menge ebenfalls Lebesgue-messbar. \square

Bemerkung 7.16. Die Lebesgue- σ -Algebra enthält noch viel mehr Mengen, abzählbare Vereinigungen offener und abgeschlossener Mengen, deren Komplemente, abzählbare Vereinigungen von solchen Mengen etc. Grundsätzlich sind alle Mengen die man auf „natürliche Weise“ antrifft messbar und man muss große Anstrengungen unternehmen um zu zeigen, dass es überhaupt Mengen gibt, die nicht messbar sind. Die diversen Lebesgue-Maße (für unterschiedliche Dimensionen) sind also für hinreichend viele Mengen definiert.

Bemerkung 7.17. Für eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$ bezeichne

$$A + x := \{y + x \mid y \in A\}.$$

Ein Maß μ auf einer σ -Algebra \mathcal{A} über \mathbb{R} heißt translationsinvariant, wenn $\mu(A + x) = \mu(A)$ gilt für alle $A \in \mathcal{A}$ und alle $x \in \mathbb{R}$. Dazu muss insbesondere gelten, dass die σ -Algebra translationsinvariant ist, das heißt $A + x \in \mathcal{A}$ für alle $A \in \mathcal{A}$ und alle $x \in \mathbb{R}$.

Da Translationen von Intervallen wieder Intervalle sind, überzeugt man sich leicht, dass das äußere Lebesgue-Maß, und damit auch das Lebesgue-Maß translationsinvariant sind.

Man kann darüber hinaus zeigen, dass λ das einzige translationsinvariante Maß ist, dass $\lambda([0, 1]) = 1$ erfüllt.

Wir wissen jetzt, dass sich sinnvolle Flächen-, Volumen- und andere Maßbegriffe für hinreichend viele Mengen definieren lassen. Schließlich wollen wir noch sehen, dass die anfänglichen Überlegungen zur Berechnung von Maßen (Approximation der zu untersuchenden Menge von innen oder von außen durch bereits bekannte Mengen) tatsächlich zum Erfolg führen.

Satz 7.18 (Stetigkeit des Maßes). *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Für eine monoton wachsende Folge $(A_n) \subset \mathcal{A}$, das heißt $A_n \subset A_{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}$, gilt*

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n).$$

Für eine monoton fallende Folge $(B_n) \subset \mathcal{A}$ gilt

$$\mu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \mu(B_n),$$

falls $\mu(B_n) < \infty$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Falls $\mu(A_n) = \infty$ für ein $n \in \mathbb{N}$, dann folgt die erste Gleichheit sofort. Sei also $\mu(A_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Setze $A_0 = \emptyset$ und $C_n = A_n \setminus A_{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann sind die C_n paarweise disjunkt und daher gilt

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) &= \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(C_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (\mu(A_n) - \mu(A_{n-1})) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) - \mu(A_0). \end{aligned}$$

Es sein nun $\mu(B_N)$ endlich (und damit auch $\mu(B_n)$ für alle $n \geq N$). Setze

$$B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n.$$

Dann ist die Folge $D_n = B_N \setminus B_n$ für $n \geq N$ monoton wachsend und es gilt

$$\bigcup_{n=N}^{\infty} D_n = \bigcup_{n=N}^{\infty} B_N \cap B_n^c = B_N \cap \left(\bigcap_{n=N}^{\infty} B_n\right)^c = B_N \setminus B.$$

Nach dem eben gezeigten ist dann

$$\mu(B_N) - \mu(B) = \mu(B_N \setminus B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_N \setminus B_n) = \mu(B_N) - \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n).$$

Die übrigen Gleichheiten folgen dann aus der Monotonie der Folgen $\mu(A_n)$ beziehungsweise $\mu(B_n)$. \square

Bemerkung 7.19. Die Einschränkung $\mu(B_n) < \infty$ für ein $n \in \mathbb{N}$ ist notwendig, wie das Beispiel

$$0 = \lambda(\emptyset) = \lambda\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [n, \infty)\right) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda([n, \infty)) = \infty$$

zeigt.

7.2 Integrale

Wir wollen nun für beliebige Maßräume Integrale konstruieren. Wir werden uns dabei vom Lebesgue-Integral leiten lassen, bei dem wir das Integral als die Fläche unter dem Graphen der integrierten Funktion (versehen mit entsprechenden Vorzeichen für Flächen oberhalb beziehungsweise unterhalb der x -Achse) interpretieren können. Man sollte sich jedoch nicht zu sehr auf diese geometrische Interpretation fixieren. Integrale können, abhängig vom zugrundeliegenden Maß, ganz unterschiedliche Interpretationen haben – Flächen, Volumina, Gesamtmasse, Gesamtladung, Gesamtenergieinhalt, Gesamtwahrscheinlichkeit, etc.

Die Grundidee der Integration ist, dass wir für bestimmte einfache Funktionen die Integrale direkt angeben können. Für kompliziertere Funktionen werden wir dann versuchen, diese durch einfache zu approximieren. Im Folgenden wollen wir zeigen, dass diese Grundidee sich konsistent umsetzen lässt.

Für dieses gesamte Kapitel sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum (wir denken hier in erster Linie natürlich an \mathbb{R} mit der σ -Algebra der Lebesgue-messbaren Mengen und dem Lebesgue-Maß). Wir nehmen an, dass der Maßraum σ -endlich ist, das heißt es existiert eine Folge $(E_n) \subset \mathcal{A}$ so, dass $\mu(E_n) \leq \infty$ und $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n = \Omega$ und nennen eine Folge mit dieser Eigenschaft eine ausschöpfende Folge. Die reellen Zahlen mit dem Lebesgue-Maß erfüllen diese Voraussetzung (setze $A_n = [-n, n]$). Wird nichts anderes gesagt, dann bilden alle Funktionen von Ω nach \mathbb{C} ab und werden als messbar (siehe unten) vorausgesetzt.

Bemerkung 7.20 (Spezielle Notation). Sei $\Phi(x)$ eine Aussage, deren Gültigkeit von einer Variablen $x \in \Omega$ abhängt also zum Beispiel die Aussage $f(x) > g(x)$. Dann verwenden wir $[\Phi]$ als abkürzende Schreibweise für $\{x \in \Omega \mid \Phi(x)\}$. So bezeichnen wir zum Beispiel die Menge der Punkte an denen eine Funktion den Wert $y \in \mathbb{C}$ annimmt mit

$$[f = y] = f^{-1}(\{y\}) = \{x \in \Omega \mid f(x) = y\}.$$

Analog ist

$$[f > g] = \{x \in \Omega \mid f(x) > g(x)\}.$$

Schreiben wir lediglich „es gilt Φ “ ohne Angabe eines Punktes, dann ist damit stets „es gilt $\Phi(x)$ für alle $x \in \Omega$ “ gemeint. Wir schreiben also statt $f(x) > g(x)$ für jedes $x \in \Omega$ nur kürzer $f > g$.

In der Maß- und Integrationstheorie ist es häufig egal was auf einer Nullmenge passiert. Daher sagen wir Φ gilt „fast überall (f. ü.)“, falls die Menge $\{x \mid \neg \Phi(x)\}$ eine Nullmenge ist. So heißt $f > g$ fast überall beispielsweise

$$\mu([f \leq g]) = 0.$$

Die Aussage (f_n) konvergiert fast überall gegen f bedeutet, dass die Menge

$$\left[\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f \right]$$

eine Nullmenge ist. Wir werden weiter unten viele Beispiele für Sätze sehen, wo die Voraussetzungen lediglich fast überall erfüllt sein müssen.

Definition 7.21. Sei $A \in \mathcal{A}$ eine Teilmenge von Ω , dann heißt

$$\mathbb{1}_A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

die charakteristische Funktion der Menge A . Wir nennen A den Träger der charakteristischen Funktion.

Mit \mathbf{X} bezeichnen wir den folgenden, von charakteristischen Funktionen aufgespannten Vektorraum

$$\mathbf{X} = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{1}_{A_i} \mid n \in \mathbb{N}, A_i \in \mathcal{A}, \mu(A_i) < \infty, a_i \in \mathbb{C}, i \in \{1, \dots, n\} \right\}.$$

Die Elemente von \mathbf{X} bezeichnen wir als einfache Funktionen.

Mit \mathbf{X}^+ bezeichnen wir die Menge der nichtnegativen einfachen Funktionen.

Bemerkung 7.22. (i) Zwischen Mengen $A \in \mathcal{A}$ und den zugehörigen charakteristischen Funktionen besteht ein recht enger Zusammenhang. Die meisten Aussagen über Mengen lassen sich auch über die charakteristischen Funktionen ausdrücken. So gilt für $A, B \in \mathcal{A}$

$$\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B \text{ und}$$

$$\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B.$$

Entsprechend sind A und B disjunkt, genau dann wenn $\mathbb{1}_A \mathbb{1}_B = 0$, genau dann wenn $\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B$.

- (ii) Man überzeugt sich leicht, dass die Menge der einfachen Funktionen tatsächlich ein Vektorraum ist. Da das Produkt charakteristischer Funktionen wieder eine charakteristische Funktion ist, sind auch Produkte einfacher Funktionen wieder in \mathbf{X} , die Menge ist also sogar eine Algebra.
- (iii) Falls A_1, \dots, A_n eine Zerlegung von Ω bilden, das heißt sie sind paarweise disjunkt und es gilt $A_1 \cup \dots \cup A_n = \Omega$, dann gilt

$$\mathbb{1} := \mathbb{1}_\Omega = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{A_i}.$$

- (iv) Falls (E_n) eine ausschöpfende Folge ist, dann konvergiert $\mathbb{1}_{E_n}$ punktweise gegen $\mathbb{1}$ (Warum?).
- (v) Die Darstellung einer einfachen Funktion als Linearkombination charakteristischer Funktionen ist nicht eindeutig wie das folgende Beispiel über \mathbb{R} zeigt:

$$\mathbb{1}_{[0,2]} + \mathbb{1}_{(2,3]} = \mathbb{1}_{[0,1]} + \mathbb{1}_{[1,3]}.$$

- (vi) Man überzeugt sich leicht, dass eine Funktion genau dann einfach ist, wenn sie nur endlich viele verschiedene Werte annimmt und wenn ihr Träger $[f \neq 0]$ endliches Maß hat. Damit erhalten wir die sogenannte kanonische Darstellung von f

$$f = \sum_{y \in f(\Omega)} y \mathbb{1}_{[f=y]}.$$

Die Träger der hier auftretenden charakteristischen Funktionen sind eine Zerlegung von Ω und die auftretenden Koeffizienten sind verschieden.

Wir beginnen nun mit der Definition von Integralen.

Definition 7.23 (Integral für einfache Funktionen). Sei $f \in \mathbf{X}$ und

$$f = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{1}_{A_i}$$

die kanonische Darstellung von f . Definiere

$$\int f d\mu = \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i).$$

Bemerkung 7.24. Man beachte, dass die obige Summe stets endlich ist, da die einzige Menge A_i mit möglicherweise unendlichem Maß den Koeffizienten 0 hat und wir vereinbart hatten, dass wir $0 \cdot \infty$ als 0 interpretieren (wir sehen hier, dass diese Festlegung sinnvoll ist – der Teil wo die Funktion den Wert 0 annimmt, trägt nicht zum Integral bei).

Sei

$$f = \sum_{j=1}^m b_j \mathbb{1}_{B_j}$$

eine andere Darstellung von f wobei die Mengen B_1, \dots, B_m eine Zerlegung von Ω sein sollen. Dann gilt, falls $A_i \cap B_j \neq \emptyset$ für $x \in A_i \cap B_j$

$$f(x) = a_i = b_j,$$

und damit auf Grund der Additivität des Maßes

$$\begin{aligned} \int f d\mu &= \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i) = \sum_{i=1}^n a_i \mu \left(A_i \cap \bigcup_{j=1}^m B_j \right) = \sum_{i=1}^n a_i \mu \left(\bigcup_{j=1}^m A_i \cap B_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n b_j \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{j=1}^m b_j \mu \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \cap B_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^m b_j \mu(B_j). \end{aligned}$$

Satz 7.25. Seien f, g einfache Funktionen und $\alpha \in \mathbb{C}$. Es gilt

$$\int (f + \alpha g) d\mu = \int f d\mu + \alpha \int g d\mu.$$

Falls f und g reellwertig sind und $f \leq g$ fast überall gilt, so ist auch

$$\int f d\mu \leq \int g d\mu.$$

Insbesondere gilt, falls $f = g$ fast überall, auch

$$\int f d\mu = \int g d\mu.$$

Es gilt stets

$$\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu.$$

Beweis. Seien

$$f = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{1}_{A_i} \text{ und } g = \sum_{j=1}^m b_j \mathbb{1}_{B_j}$$

die kanonischen Darstellungen von f und g . Dann können wir $f + \alpha g$ wie folgt darstellen

$$\begin{aligned} f + \alpha g &= \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{1}_{A_i} + \alpha \sum_{j=1}^m b_j \mathbb{1}_{B_j} = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{1}_{A_i} \sum_{j=1}^m \mathbb{1}_{B_j} + \alpha \sum_{j=1}^m b_j \mathbb{1}_{B_j} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{A_i} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (a_i + \alpha b_j) \mathbb{1}_{A_i \cap B_j} \end{aligned}$$

Die Mengen $A_i \cap B_j$, $i \in \{1, \dots, n\}$ und $j \in \{1, \dots, m\}$ bilden eine Zerlegung von Ω und es gilt nach der vorhergehenden Bemerkung

$$\begin{aligned} \int (f + \alpha g) d\mu &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (a_i + \alpha b_j) \mu(A_i \cap B_j) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i \mu(A_i \cap B_j) + \alpha \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m b_j \mu(A_i \cap B_j) \\ &= \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i) + \alpha \sum_{j=1}^m b_j \mu(B_j) = \int f d\mu + \alpha \int g d\mu. \end{aligned}$$

Sei nun $f \geq 0$ fast überall. Dann ist $[f < 0]$ eine Nullmenge. Falls $a_i < 0$, dann ist $A_i \subset [f < 0]$ ebenfalls eine Nullmenge. Dann ist das Integral eine Summe über nichtnegative Terme.

Gilt nun $f \leq g$ fast überall, dann folgt aus dem eben Gezeigten, dass

$$0 \leq \int (g - f) d\mu = \int g d\mu - \int f d\mu.$$

Schließlich erhalten wir

$$\left| \int f d\mu \right| = \left| \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i) \right| \leq \sum_{i=1}^n |a_i| \mu(A_i) = \int |f| d\mu. \quad \square$$

Bemerkung 7.26. Aus der Linearität des Integrals folgt, dass für eine beliebige Darstellung

$$f = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{1}_{A_i}$$

gilt

$$\int f d\mu = \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i).$$

Wir hätten also zur Definition des Integrals für einfache Funktionen nicht zwangsläufig die kanonische Darstellung benutzen müssen, hätten dann aber zeigen müssen, dass die Definition von der Darstellung unabhängig ist.

Bemerkung 7.27. In der hier verwendeten Notation schreiben wir die Integrationsvariable nicht mit falls es keinen Grund dazu gibt. Dadurch soll deutlich gemacht werden, dass das Integral Funktionen (nicht deren Werte) auf Zahlen abbildet. Alternativ schreiben wir, falls die Integrationsvariable von Belang ist

$$\int f(x) d\mu(x)$$

oder, speziell im Falle des Lebesgue-Integrals auch

$$\int f(x) dx.$$

Wollen wir nun Integrale durch Approximation des Integranden durch einfache Funktionen definieren, so ergeben sich unmittelbar die folgenden Fragen. Welche Funktionen lassen sich überhaupt durch einfache Funktionen approximieren? Hängt das Ergebnis der Rechnung von der Art und Weise der Approximation ab?

Definition 7.28. Eine Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ heißt messbar, wenn es eine Folge einfacher Funktionen $(f_n) \subset \mathbf{X}$ gibt die punktweise gegen f konvergiert.

Bemerkung 7.29. (i) An dieser Stelle müsste eigentlich ein Abschnitt über messbare Funktionen und ihre Eigenschaften folgen. Wir fassen stattdessen die wichtigsten Ergebnisse stichpunktartig zusammen.

- (ii) Eine reellwertige Funktion f ist messbar genau dann, wenn $[f \leq y] \in \mathcal{A}$ ist für jedes $y \in \mathbb{R}$. Eine komplexwertige Funktion f ist messbar genau dann, wenn ihr Real- und Imaginärteil es sind.
- (iii) Einfache Funktionen sind messbar. Charakteristische Funktionen messbarer Mengen sind messbar (selbst wenn die Menge unendliches Maß hat).
- (iv) Stetige Funktionen sind messbar bezüglich der Lebesgue- σ -Algebra.
- (v) Summen, Produkte und Quotienten (falls letztere existieren) sowie Verkettungen von messbaren Funktionen sind messbar.
- (vi) Falls (f_n) eine Folge messbarer Funktionen ist, dann sind auch (falls sie existieren)

$$\begin{aligned} & \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n \\ & \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n \\ & \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \end{aligned}$$

messbar (und analog für \inf und \liminf). Für diese entscheidenden Aussagen ist die „ σ -Eigenschaft“ der σ -Algebren notwendig.

- (vii) Zusammenfassend kann man sagen, dass die Funktionen mit denen man üblicherweise konfrontiert ist, Lebesgue-messbar sind. Ähnlich wie bei nicht messbaren Mengen, muss man besondere Anstrengungen unternehmen, um nicht messbare Funktionen zu konstruieren.

Definition 7.30 (Integral für nichtnegative Funktionen). Für eine messbare Funktion $f : \Omega \rightarrow [0, \infty)$ definieren wir

$$\int f d\mu = \sup \left\{ \int g d\mu \mid g \in \mathbf{X}^+ \text{ und } g \leq f \right\} \in [0, \infty].$$

Bemerkung 7.31. (i) Das oben definierte Integral kann den „Wert“ ∞ annehmen.

- (ii) Ist f eine nichtnegative, einfache Funktion, dann gilt für jede einfache Funktion $h \leq f$ auch

$$\int h d\mu \leq \int f d\mu.$$

Daraus folgt, dass der neue Integralbegriff für einfache Funktionen mit dem alten übereinstimmt.

- (iii) Das Integral ist monoton: Seien f, g nichtnegative Funktionen die $f \leq g$ fast überall erfüllen. Setze

$$A = [f \leq g].$$

Dann ist für jede einfache Funktion $h \leq f$ die einfache Funktion $h\mathbb{1}_A \leq g$ und es gilt

$$\int h d\mu = \int h\mathbb{1}_A d\mu \leq \int g d\mu.$$

Damit gilt auch

$$\int f d\mu \leq \int g d\mu.$$

Insbesondere gilt $\int f d\mu = \int g d\mu$, falls $f = g$ fast überall.

- (iv) Falls $[f > 0]$ eine Nullmenge ist, dann stimmt f fast überall mit der Nullfunktion überein und es ist daher $\int f d\mu = 0$. Die Umkehrung gilt auch. Falls $\int f d\mu = 0$ ist für eine nichtnegative Funktion f , dann ist der Träger $[f > 0]$ von f eine Nullmenge. Um das zu sehen setzen wir

$$A_k := \left[f \geq \frac{1}{k} \right] \in \mathcal{A}.$$

und stellen fest, dass für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{1}{k} \mathbb{1}_{A_k} \leq f.$$

Da $\int f d\mu = 0$ ist, muss also $\mu(A_k) = 0$ sein für jedes $k \in \mathbb{N}$. Da die A_k eine monoton wachsende Folge sind folgt aus der Stetigkeit des Maßes (Satz 7.18)

$$0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k) = \mu \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \left[f \geq \frac{1}{k} \right] \right) = \mu([f > 0]).$$

- (v) Für $f, g : \Omega \rightarrow [0, \infty)$ messbar und für $c \in [0, \infty]$ gilt

$$\int (cf) d\mu = c \int f d\mu$$

sowie

$$\int f d\mu + \int g d\mu \leq \int (f + g) d\mu. \quad (7.1)$$

(Übung)

- (vi) Aus der Definition folgt, dass es eine Folge (f_n) einfacher Funktionen gibt die durch f beschränkt ist, das heißt $f_n \leq f$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und erfüllt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

Die Folge (g_n)

$$g_n = \max \{f_1, \dots, f_n\}$$

besteht ebenfalls aus einfachen Funktionen (Warum?), ist durch f beschränkt und erfüllt

$$\int f_n d\mu \leq \int g_n d\mu \leq \int f d\mu$$

und damit ebenfalls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n d\mu = \int f d\mu.$$

Die neue Folge ist jedoch zusätzlich monoton wachsend.

- (vii) Sei nun (g_n) eine Folge wie im letzten Punkt. Da die Folge monoton ist, konvergiert sie punktweise gegen eine Funktion g und es gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$g_n \leq g \leq f.$$

Für die Integrale gilt dann

$$\int f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n d\mu \leq \int g d\mu \leq \int f d\mu$$

also $\int g d\mu = \int f d\mu$. Außerdem ist wegen der Ungleichung (7.1)

$$\int (f - g) d\mu + \int f d\mu = \int (f - g) d\mu + \int g d\mu \leq \int f d\mu$$

woraus $\int (f - g) d\mu = 0$ folgt. Damit ist aber $[f - g > 0] = [f \neq g]$ eine Nullmenge.

Wir haben damit gezeigt, dass jede monotone Folge nichtnegativer einfacher Funktionen (g_n) , für die

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n d\mu = \int f d\mu$$

gilt, auch punktweise fast überall gegen f konvergiert.

Dass auch die Umkehrung der letzten Aussage gilt, zeigt der folgende – auch unabhängig davon sehr nützliche – Satz.

Satz 7.32 (Satz von der monotonen Konvergenz/Beppo Levi). Sei (f_n) eine monoton wachsende Folge nichtnegativer Funktionen die punktweise fast überall gegen eine Funktion f konvergiert. Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu$$

Beweis. Wir nehmen zunächst an, dass (f_n) punktweise (überall) gegen f konvergiert. Auf Grund der Monotonie der Folge gilt $f_n \leq f$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Die Folge $(\int f_n d\mu)$ ist dann auf Grund der Monotonie des Integrals ebenfalls monoton und damit gilt stets

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int f_n d\mu \leq \int f d\mu.$$

Wir betrachten nun zunächst einen Spezialfall. Sei $(B_n) \subset \mathcal{A}$ eine monoton wachsende Folge von Mengen die $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \Omega$ erfüllen, dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f \mathbb{1}_{B_n} d\mu = \int f d\mu. \quad (7.2)$$

Zunächst können wir aus der Stetigkeit des Maßes (Satz 7.18) für $A \in \mathcal{A}$ schließen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{B_n} d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A \cap B_n) = \mu(A) = \int \mathbb{1}_A d\mu.$$

Da beide Seiten der Gleichung (7.2) linear in f sind, gilt sie damit auch für alle einfachen Funktionen. Sei nun f eine beliebige Funktion und $\epsilon > 0$. Dann existiert eine einfache Funktion $g \leq f$ so, dass $\int g d\mu \geq \int f d\mu - \frac{\epsilon}{2}$ und nach dem eben gezeigten existiert ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n \geq N$ gilt

$$\int g \mathbb{1}_{B_n} d\mu \geq \int g d\mu - \frac{\epsilon}{2}.$$

Dann ist aber

$$\int f \mathbb{1}_{B_n} d\mu \geq \int g \mathbb{1}_{B_n} d\mu \geq \int f d\mu - \epsilon$$

und die gesuchte Konvergenz damit gezeigt.

Mit dieser Vorbereitung betrachten wir nun den allgemeinen Fall. Sei dazu $c \in (0, 1)$. Wir setzen

$$B_n := [f_n \geq cf] \in \mathcal{A}.$$

Die (B_n) sind eine monoton wachsende Folge, da (f_n) monoton wächst. Da f_n gegen f konvergiert gilt $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \Omega$ (Warum?). Schließlich ist wegen der Monotonie des Integrals für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\int f_n d\mu \geq \int f_n \mathbb{1}_{B_n} d\mu \geq c \int f \mathbb{1}_{B_n} d\mu.$$

Im Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ ergibt sich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu \geq c \int f d\mu.$$

Da $c \in (0, 1)$ beliebig war folgt daraus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

Falls nun f_n lediglich fast überall gegen f konvergiert setzen wir

$$A = \left[f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right].$$

Dann gilt unter Benutzung des soeben gezeigten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \mathbb{1}_A d\mu = \int f \mathbb{1}_A d\mu = \int f d\mu.$$

Dabei wurde wieder ausgenutzt, dass sich Integrale nicht ändern wenn die Funktionen lediglich auf einer Nullmenge abgeändert werden. \square

Korollar 7.33. Für nichtnegative Funktionen f, g gilt

$$\int (f + g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu.$$

Beweis. Sei $(f_n), (g_n) \subset \mathbf{X}^+$ monoton wachsende Folgen, die punktweise fast überall gegen f beziehungsweise g konvergieren. Dann ist $(f_n + g_n)$ eine monoton wachsende Folge die punktweise fast überall gegen $f + g$ konvergiert und es gilt

$$\int (f + g) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int (f_n + g_n) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu + \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu \square$$

Beispiel 7.34. Da das Integral über einen Grenzwertprozess definiert ist, muss man im Allgemeinen beim Vertauschen mit anderen Grenzwertprozessen vorsichtig sein. Insbesondere ist die Monotonie im obigen Satz notwendig. Zum Beispiel konvergiert die Funktionenfolge

$$n \cdot \mathbb{1}_{(0, \frac{1}{n})}$$

punktweise gegen die Nullfunktion, die Folge ist aber nicht monoton. Für die Integrale gilt nach dem vorhergehenden Satz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int n \cdot \mathbb{1}_{(0, \frac{1}{n})} d\mu = 1.$$

Beispiel 7.35. Der Satz über monotone Konvergenz ist auch nützlich um Integrale tatsächlich auszurechnen. Wir wollen das Lebesgue-Integral der Funktion $f(y) = y \cdot \mathbb{1}_{[0,x]}(y)$ berechnen. Dazu überzeugt man sich, dass die Funktionenfolge

$$f_n = \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{kx}{2^n} \mathbb{1}_{\left[k \frac{x}{2^n}, (k+1) \frac{x}{2^n}\right)}$$

monoton wachsend ist und punktweise fast überall gegen f konvergiert. Damit gilt

$$\int f_n d\lambda = \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{kx}{2^n} \mu \left(\left[k \frac{x}{2^n}, (k+1) \frac{x}{2^n} \right) \right) = \frac{x}{2^n} \frac{x}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} k = \frac{x^2}{2^{2n}} \frac{(2^n-1)2^n}{2}$$

also

$$\int f d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\lambda = \frac{x^2}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n-1}{2^n} = \frac{x^2}{2}.$$

Beispiel 7.36. Wenden wir uns nun der Definition für Integrale allgemeiner Funktionen zu. Dabei stoßen wir auf ein Problem, das wir bereits von unendlichen Reihen kennen. Das Ergebnis der Summation kann von der Art und Weise der Approximation abhängen.

Betrachten wir zum Beispiel für $(a_n) \subset \mathbb{C}$ die Folge einfacher Funktionen $f_n = a_n \mathbb{1}_{[n, n+1]}$. Unabhängig von (a_n) konvergiert diese Funktionenfolge punktweise gegen 0. Die Folge (a_n) der Integrale kann aber natürlich gegen jeden beliebigen Wert konvergieren oder auch divergent sein. Für nichtnegative Funktionen haben wir dieses Problem gelöst indem wir $f_n \leq f$ gefordert haben. Für komplexwertige Funktionen müssen wir eine andere Lösung finden.

Definition 7.37. Wir nennen eine messbare Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ integrierbar, falls $\int |f| d\mu < \infty$. Eine Folge einfacher Funktionen $(f_n) \subset \mathbf{X}$ heißt approximierende Folge für die Funktion f falls gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int |f - f_n| d\mu = 0.$$

Bemerkung 7.38. (i) Die Menge der integrierbaren Funktionen ist ein Vektorraum denn für f, g integrierbar gilt für jedes $\alpha \in \mathbb{C}$

$$\int |f + \alpha g| d\mu \leq \int (|f| + |\alpha| |g|) d\mu = \int |f| d\mu + |\alpha| \int |g| d\mu < \infty$$

und $f + \alpha g$ ist ebenfalls integrierbar.

(ii) Sei f nichtnegativ und integrierbar. Dann existiert eine monoton wachsende Folge (f_n) einfacher Funktionen mit $f_n \leq f$ und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu,$$

und es ist, da f integrierbar vorausgesetzt war, für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\int f_n d\mu \leq \int f d\mu < \infty.$$

Dann folgt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\int |f - f_n| d\mu = \int (f - f_n) d\mu \leq \int f d\mu - \int f_n d\mu.$$

Da die rechte Seite eine Nullfolge ist, ist (f_n) eine approximierende Folge für f .

- (iii) Jede reelle Funktion kann in ihren positiven und ihren negativen Teil zerlegt werden:

$$\begin{aligned} f_+ &:= f \mathbb{1}_{[f \geq 0]} \\ f_- &:= -f \mathbb{1}_{[f \leq 0]}. \end{aligned}$$

Beide Funktionen sind nichtnegativ und es gilt $f = f_+ - f_-$ und $|f| = f_+ + f_-$. Ist f integrierbar, sind auch $f_+ \leq |f|$ und $f_- \leq |f|$ integrierbar.

- (iv) Da $|\operatorname{Re} f| \leq |f|$ und $|\operatorname{Im} f| \leq |f|$ gilt, sind der Real- und Imaginärteil integrierbarer Funktionen integrierbar.

- (v) Seien f und g beliebige Funktionen mit approximierenden Folgen (f_n) und (g_n) , dann gilt für jedes $\alpha \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \int |f + \alpha g - (f_n + \alpha g_n)| d\mu &= \int (|f - f_n| + |\alpha| |g - g_n|) d\mu \\ &= \int |f - f_n| d\mu + |\alpha| \int |g - g_n| d\mu. \end{aligned}$$

Da die rechte Seite eine Nullfolge ist, ist $(f_n + \alpha g_n)$ eine approximierende Folge für $f + \alpha g$ und die Menge aller Funktionen die eine approximierende Folge besitzen ist ein Vektorraum.

- (vi) Wir können eine beliebige integrierbare Funktion jetzt wie folgt zerlegen

$$f = ((\operatorname{Re} f)_+ - (\operatorname{Re} f)_-) + i((\operatorname{Im} f)_+ - (\operatorname{Im} f)_-).$$

Die vier Teile sind ebenfalls integrierbar und nichtnegativ und besitzen daher approximierende Folgen. Damit besitzt auch f eine approximierende Folge.

- (vii) Sei nun (f_n) eine approximierende Folge für f und sei $\epsilon > 0$. Dann existiert $N \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n \geq N$ gilt

$$\int |f - f_n| d\mu \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Dann gilt für $n, m \geq N$ auch

$$\begin{aligned} \left| \int f_n d\mu - \int f_m d\mu \right| &= \left| \int (f_n - f_m) d\mu \right| \leq \int |f_n - f_m| d\mu \\ &\leq \int (|f_n - f| + |f - f_m|) d\mu \\ &= \int |f - f_n| d\mu + \int |f - f_m| d\mu \leq \epsilon. \end{aligned}$$

Dabei haben wir diverse Eigenschaften des Integrals für einfache Funktionen (Satz 7.25) beziehungsweise für nichtnegative Funktionen genutzt. Wir haben damit gezeigt, dass $(\int f_n d\mu)$ eine Cauchy-Folge ist, sie konvergiert also gegen ein $I \in \mathbb{C}$.

(viii) Sei (g_n) eine weitere approximierende Folge für f , dann gilt

$$\left| \int f_n d\mu - \int g_n d\mu \right| \leq \int |f_n - g_n| d\mu \leq \int |f_n - f| d\mu + \int |f - g_n| d\mu.$$

Nach Voraussetzung ist die rechte Seite eine Nullfolge, also muss die Folge $\int g_n d\mu$ ebenfalls gegen I konvergieren.

Definition 7.39. Sei f eine integrierbare Funktion. Dann setzen wir

$$\int f d\mu = \int f_n d\mu,$$

wobei (f_n) eine approximierende Folge für f sein soll.

Bemerkung 7.40. Ist f eine einfache Funktion, so können wir die konstante Folge (f) als approximierende Folge nehmen und sehen damit, dass der neue Integralbegriff denjenigen für einfache Funktionen erweitert.

Aus Bemerkung 7.38 (ii) ist ersichtlich, dass der neue Integralbegriff auch das Integral für nichtnegative integrierbare Funktionen erweitert.

Satz 7.41. Seien f, g integrierbare Funktionen.

(i) Für $\alpha \in \mathbb{C}$ gilt

$$\int (f + \alpha g) d\mu = \int f d\mu + \alpha \int g d\mu \text{ Linearität.}$$

(ii) Falls $f \leq g$ fast überall ist, dann gilt auch

$$\int f d\mu \leq \int g d\mu \text{ Monotonie.}$$

Insbesondere stimmen die Integrale überein falls $f = g$ fast überall.

(iii) Es gilt stets

$$\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu \text{ Dreiecksungleichung.}$$

Beweis. Seien f, g integrierbar und (f_n) und (g_n) approximierende Folgen für f beziehungsweise g , dann ist $(f_n + \alpha g_n)$ eine approximierende Folge für $f + \alpha g$ und wir erhalten unter Benutzung der Linearität des Integrals für einfache Funktionen

$$\int (f + \alpha g) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int f_n d\mu + \alpha \int g_n d\mu \right) = \int f d\mu + \alpha \int g d\mu.$$

Sei $f \leq g$ fast überall. Dann ist $(g - f)_- = 0$ fast überall und, da der neue Integralbegriff mit dem für nichtnegative Funktionen übereinstimmt, gilt

$$\int (g - f)_- d\mu = 0.$$

Dann folgt aus der Linearität

$$\int g d\mu - \int f d\mu = \int (g - f) d\mu = \int (g - f)_+ d\mu - \int (g - f)_- d\mu \geq 0.$$

Schließlich folgt aus der umgekehrten Dreiecksungleichung

$$\int ||f| - |f_n|| d\mu \leq \int |f - f_n| d\mu.$$

Da die rechte Seite gegen 0 konvergiert ist $(|f_n|)$ eine approximierende Folge für $|f|$ und damit, unter Benutzung der Dreiecksungleichung für einfache Funktionen,

$$\int |f| d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int |f_n| d\mu \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int f_n d\mu \right| = \left| \int f d\mu \right| \quad \square$$

Bemerkung 7.42. Häufig wird nicht über den gesamten Raum Ω integriert.

Für $A \subset \mathcal{A}$ definieren wir

$$\int_A g d\mu := \int g \mathbb{1}_A d\mu.$$

Dabei ist zu beachten, dass $g \mathbb{1}_A$ integrierbar sein kann, auch dann wenn g es nicht ist. Für den Wert dieses Integrals ist es offensichtlich unerheblich welche Werte g außerhalb von A annimmt. Entsprechend werden wir solche Integrale auch dann benutzen, wenn g außerhalb von A nicht definiert ist.

Wie wir gesehen haben ändert sich der Wert eines Integrals nicht, wenn wir den Integranden auf einer Nullmenge ändern. Dementsprechend werden wir auch Integrale aufschreiben, deren Integranden in einigen Punkten (höchstens eine Nullmenge) nicht definiert sind. Ausdrücke wie

$$\int_{[0,1]} \frac{1}{x} dx = \infty \text{ oder } \int_{[-1,1]} \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx = 4$$

sind also zulässig.

Wir wollen hier noch das Integral über einem anderen Maßraum als den reellen Zahlen mit Lebesgue-Maß betrachten.

Beispiel 7.43. Sei $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ und μ das Zählmaß (Beispiel 7.6). Für eine nicht-negative Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty)$ ist dann

$$f_N = f \mathbb{1}_{\{1, \dots, N\}} = \sum_{n=1}^N f(n) \mathbb{1}_{\{n\}}$$

eine monoton wachsende Folge einfacher Funktionen und es gilt

$$\int f d\mu = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N f(n) \mu(\{n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n).$$

Eine beliebige Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ ist dann integrierbar genau dann wenn

$$\int |f| d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} |f(n)| < \infty$$

und für solche Funktionen gilt

$$\int f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n).$$

Für diesen speziellen Maßraum sind die Integrale also lediglich Reihen und Integrierbarkeit entspricht der absoluten Konvergenz der Reihe.

7.3 Integrale über den reellen Zahlen

Wir betrachten nun Integration von Funktionen von \mathbb{R} nach \mathbb{R} .

Definition 7.44. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar. Mit dem Lebesgue-Maß λ setzen wir

$$\int_a^b f(x)dx := \int_{(a,b)} f d\lambda.$$

Außerdem definieren wir

$$\int_b^a f(x)dx := - \int_a^b f(x)dx.$$

Bemerkung 7.45. Man rechnet leicht nach, dass mit diesen Definitionen für beliebiges $c \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Theorem 7.46 (Mittelwertsatz der Integralrechnung). Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $g(x) \geq 0$ auf $[a, b]$. Dann existiert $\xi \in (a, b)$, so dass

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx.$$

Insbesondere existiert $\eta \in (a, b)$ so, dass

$$\int_a^b f(x)dx = f(\eta)(b - a).$$

Beweis. Da f stetig ist und $[a, b]$ beschränkt und abgeschlossen, existieren nach Korollar 5.69

$$c = \min_{a \leq x \leq b} f(x) \text{ und } C = \max_{a \leq x \leq b} f(x)$$

und Punkte $x_m, x_M \in [a, b]$, so dass $f(x_m) = c$ und $f(x_M) = C$. Setze $\tilde{a} = \min \{x_m, x_M\}$ und $\tilde{b} = \max \{x_m, x_M\}$. Es gilt dann für alle $x \in [a, b]$

$$cg(x) \leq f(x)g(x) \leq Cg(x).$$

Aus der Monotonie des Integrals folgt mit der Abkürzung $I = \int_a^b g(x)dx$

$$cI \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq CI.$$

Falls $I = 0$ ist, oder $c = C$, so folgt bereits die erste Behauptung. Andernfalls ist $\tilde{a} < \tilde{b}$ und auf Grund des Zwischenwertsatzes (Satz 4.28) existiert $\xi \in (\tilde{a}, \tilde{b}) \subset (a, b)$, so dass

$$f(\xi) = \frac{1}{I} \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

Damit ist die erste Behauptung des Satzes gezeigt.

Die zweite Behauptung folgt als Spezialfall für $g \equiv 1$. □

Definition 7.47. Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $f : (a, b)$ eine Funktion. Dann heißt $F : [a, b]$ Stammfunktion von f , wenn es stetig und auf (a, b) differenzierbar ist und $F' = f$ auf (a, b) gilt.

Bemerkung 7.48. Seien F und G Stammfunktionen von f , dann gilt auf (a, b)

$$(F - G)' = F' - G' = f - f = 0.$$

und deshalb existiert eine Konstante $c \in \mathbb{R}$, so dass $F = G + c$ auf (a, b) (siehe Korollar 4.45). Wegen der Stetigkeit von F und G gilt die Gleichheit dann auch auf $[a, b]$.

Theorem 7.49 (Hauptsatz der Integral und Differentialrechnung). Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Dann ist für beliebiges $x_0 \in [a, b]$ die Funktion

$$x \mapsto \int_{x_0}^x f(y)dy$$

eine Stammfunktion von f .

Sei G eine beliebige Stammfunktion von f , dann gilt

$$\int_a^b f(y)dy = G(b) - G(a).$$

Beweis. Wir betrachten zunächst reellwertige f und definieren

$$F(x) := \int_{x_0}^x f(y)dy.$$

Für festes $x \in [a, b]$ und für h so dass $x + h \in [a, b]$ gilt dann

$$F(x + h) - F(x) = \int_{x_0}^{x+h} f(y)dy - \int_{x_0}^x f(y)dy = \int_x^{x+h} f(y)dy = f(\xi_h)h$$

wobei wir in der letzten Umformung den Mittelwertsatz verwendet haben um ξ_h zwischen x und $x + h$ zu finden. Die letzte Gleichheit gilt dabei auch im Fall $h < 0$ (Warum?). Für $h \rightarrow 0$ konvergiert ξ_h gegen x und $f(\xi_h)$ gegen $f(x)$ (Stetigkeit von f). Daraus folgt für beliebiges $x \in [a, b]$ die Stetigkeit von F im Punkt x , da

$$\lim_{h \rightarrow 0} F(x + h) - F(x) = 0.$$

Für $x \in (a, b)$ gilt sogar

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f(\xi_h) = f(x).$$

Damit ist F differenzierbar mit $F'(x) = f(x)$.

Sei schließlich G eine beliebige Stammfunktion von F , dann existiert $c \in \mathbb{R}$ so, dass $G = F + c$ und es gilt

$$\int_a^b f(y)dy = \int_a^{x_0} f(y)dy + \int_{x_0}^b f(y)dy = F(b) - F(a) = G(b) - G(a).$$

Für komplexwertige f folgt der Satz aus dem eben gezeigten durch Zerlegung in Real- und Imaginärteil. \square

Bemerkung 7.50. Häufig wird die Stammfunktion von f , so sie denn existiert, mit

$$\int f(x)dx$$

bezeichnet und wird auch unbestimmtes Integral genannt. Diese Bezeichnung erschließt sich im Lichte des Hauptsatzes, ist aber insofern etwas unglücklich, dass „die Stammfunktion“ ja nur bis auf eine beliebige additive Konstante genau bestimmt ist, und der obige Ausdruck also keine Funktion, sondern eine ganze Schaar von Funktionen bezeichnet. Darüber hinaus wird die obige Notation auch für das bestimmte Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

benutzt

Wir kennen bereits Stammfunktionen für einige wichtige Funktionen wie zum Beispiel die Potenzfunktionen, Exponentialfunktionen, trigonometrische Funktionen. Ausgehend von diesen kann man nun mittels der beiden folgenden Korollare Stammfunktionen für kompliziertere Funktionen bestimmen. Das ist jedoch nicht immer möglich und für viele Funktionen ist es nicht möglich einen „geschlossenen Ausdruck“ für eine Stammfunktion anzugeben.

Korollar 7.51 (Partielle Integration). *Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ stetig differenzierbar. Dann gilt*

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx.$$

Für die Werte von Integralen ergibt sich entsprechend

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

Beweis. Sei $H : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ eine Stammfunktion von fg' , dann ist $fg - H$ stetig differenzierbar und es gilt auf Grund der Produktregel

$$(fg - H)' = f'g + fg' - H' = f'g.$$

Die Funktion $fg - H$ ist also eine Stammfunktion von $f'g$. Dies entspricht der ersten Aussage des Korollars.

Für das Integral folgt dann mit dem Hauptsatz

$$\begin{aligned} \int_a^b f'(x)g(x)dx &= (fg - H)(b) - (fg - H)(a) = f(b)g(b) - f(a)g(a) - (H(b) - H(a)) \\ &= f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)dx. \end{aligned} \quad \square$$

Korollar 7.52 (Substitutionsregel). *Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Setze $\xi = \min g([a, b])$ und $\eta = \max g([a, b])$. Sei $f : [\xi, \eta] \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Dann gilt*

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(y)dy$$

für $y = g(x)$.

Für das bestimmte Integral bedeutet das

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)dy.$$

Beweis. Sei F eine Stammfunktion von f , dann ist $F \circ g$ stetig differenzierbar und es gilt auf Grund der Kettenregel

$$(F \circ g)'(x) = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x),$$

also ist $F \circ g$ eine Stammfunktion von $(f \circ g)g'$.

Für das Integral erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_a^b f(g(x))g'(x)dx &= (F \circ g)(b) - (F \circ g)(a) = F(g(b)) - F(g(a)) \\ &= \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)dy. \end{aligned} \quad \square$$

Beispiel 7.53. Wir wollen eine Stammfunktion für die Tangensfunktion bestimmen. Es gilt

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\frac{\cos'(x)}{\cos(x)}.$$

Wir substituieren $y = \cos(x)$ und müssen nun die Stammfunktion

$$-\int \frac{1}{y} dy = -\ln |y|$$

bestimmen. Nach Rücksubstitution erhalten wir also

$$\int \tan(x) dx = -\ln |\cos(x)|.$$

Die Ableitung der so erhaltenen Funktion stimmt überall da, wo sie definiert ist, mit der \tan -Funktion überein, es gibt jedoch Definitionslücken (entsprechend den Polstellen des \tan). Insbesondere können wir bestimmte Integrale nur mit Hilfe dieser (oder irgendeiner anderen) Stammfunktion berechnen, wenn zwischen den Integralgrenzen keine Polstelle liegt.

Bemerkung 7.54. Häufig ist der $g'(x)$ -Term nicht auf den ersten Blick zu erkennen. Als Merksregel kann man benutzen, dass man den Term dx transformiert indem man die Ableitung der zu substituierenden Funktion $y = g(x)$ bestimmt

$$\frac{dy}{dx} = g'(x)$$

und diese Gleichung mit dx multipliziert. Daran sieht man, dass das nur dann nützlich ist, wenn die gesuchte Stammfunktion entweder einen Term $g'(x)dx$ enthält oder wenn die Funktion g monoton und damit invertierbar ist. In diesem Fall lässt sich die Gleichung formal zu

$$dx = \frac{1}{g'(g^{-1}(y))} dy$$

umschreiben und man erhält die Substitutionsregel in der Form

$$\int f(g(x)) dx = \int f(g(x)) \frac{1}{g'(g^{-1}(g(x)))} g'(x) dx = \int \frac{f(y)}{g'(g^{-1}(y))} dy.$$

7.4 Der Satz von Lebesgue

Wir haben bereits bei der Definition des Integrals Beispiele dafür gesehen, dass das Integral als Grenzwertprozess nicht in jedem Fall mit anderen Grenzwertprozessen vertauscht. In diesem Abschnitt wollen wir nun untersuchen, unter welchen Voraussetzungen das dennoch möglich ist. Es sei für den ganzen Abschnitt $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein fest gewählter Maßraum. Wird nichts anderes gesagt, dann bilden Funktionen von Ω nach \mathbb{C} ab.

Eine wichtige Aussage in diese Richtung – den Satz von Beppo-Levi – haben wir bereits bewiesen. Wir wollen seine Anwendung hier nochmal an einem Beispiel illustrieren.

Beispiel 7.55. Die Funktion

$$\begin{aligned} f : [1, \infty) &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^\kappa \end{aligned}$$

ist integrierbar (bezüglich des Lebesgue-Maßes) genau dann, wenn $\kappa < -1$.

Beweis. Die Funktion f ist integrierbar genau dann, wenn

$$\int_{[1, \infty)} |f| \, d\lambda = \int_{[1, \infty)} f \, d\lambda < \infty.$$

Betrachte die nichtnegativen Funktionen $f_n = f \mathbb{1}_{[1, n]}$. Die Folge f_n ist monoton wachsend und konvergiert punktweise gegen f . Die Funktion f besitzt die Stammfunktion

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{\kappa+1} x^{\kappa+1} & \kappa \neq -1 \\ \ln(x) & \kappa = -1. \end{cases}$$

Die Integrale können wir nun mit Hilfe des Hauptsatzes berechnen:

$$\int_{[1, \infty)} f \mathbb{1}_{[1, n]} \, d\lambda = \int_1^n x^\kappa \, dx = F(n) - F(1)$$

und mit dem Satz von Beppo Levi folgt

$$\int_{[1, \infty)} f \, d\lambda = \int f \mathbb{1}_{[1, \infty)} \, d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f \mathbb{1}_{[1, n]} \, d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} F(n) - F(1).$$

Die rechte Seite konvergiert für $\kappa < -1$ gegen $-F(1) = -\frac{1}{\kappa+1}$ und divergiert andernfalls bestimmt gegen $+\infty$. \square

Beispiel 7.56. Die Funktion $\frac{1}{\ln(x)}$ ist auf $[2, \infty)$ nicht integrierbar. Da $x \geq \ln x$ ist, gilt

$$\infty = \int_2^\infty \frac{1}{x} \, dx \leq \int_2^\infty \frac{1}{\ln(x)} \, dx.$$

Theorem 7.57 (Satz von Lebesgue). Sei (f_n) eine Folge messbarer Funktionen die (fast überall) punktweise gegen f konvergiert und integrierbar beschränkt ist, das heißt es existiert eine integrierbare Funktion $g : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ so, dass $|f_n| \leq g$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (fast überall) erfüllt ist. Dann ist f integrierbar und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

Beweis. Zunächst gilt

$$|f| = \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n| \leq g.$$

Damit ist insbesondere f integrierbar.

Wir definieren nun die Hilfsfunktionen

$$g_n = \sup_{k \geq n} |f - f_k|.$$

Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$g_n \leq \sup_{k \geq n} (|f| + |f_k|) \leq 2g,$$

die Funktionen sind also insbesondere integrierbar. Die Funktionenfolge (g_n) ist monoton fallend (Warum?) und konvergiert punktweise fast überall gegen 0. Um das zu sehen sei $x \in \Omega$ und $\epsilon > 0$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass $|f(x) - f_n(x)| < \epsilon$ für alle $n \geq N$. Für solche n gilt dann aber auch

$$g_n(x) = \sup_{k \geq n} |f(x) - f_k(x)| \leq \epsilon.$$

Damit erfüllt die Funktionenfolge $(2g - g_n)$ die Voraussetzungen des Satzes von Beppo-Levi (Satz 7.32) und daher gilt

$$\int 2g d\mu - \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int (2g - g_n) d\mu = \int \lim_{n \rightarrow \infty} (2g - g_n) d\mu = \int 2g d\mu.$$

Schließlich folgt die Aussage des Satzes mit der Dreiecksungleichung für das Integral

$$\left| \int f d\mu - \int f_n d\mu \right| \leq \int |f - f_n| d\mu \leq \int g_n d\mu. \quad \square$$

Bemerkung 7.58. Anstatt der Existenz einer integrierbaren Funktion g mit $|f_n| \leq g$ kann man auch konkreter fordern, dass die Funktion

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n|$$

integrierbar ist.

Da der Anfang der Folge (f_n) für die auftretenden Grenzwerte unerheblich ist, reicht es aus $|f_n| \leq g$ für hinreichend große n zu fordern.

Korollar 7.59. Sei $a \in \mathbb{R}$, $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion und F eine Stammfunktion von f . Falls f nichtnegativ oder integrierbar ist, so gilt

$$\int_{[a, \infty)} f d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} F(n) - F(a).$$

Beweis. Für alle $n > a$ betrachte $f_n = f \mathbb{1}_{[a, n]}$. Falls f nichtnegativ ist, dann ist (f_n) monoton wachsend. In jedem Fall gilt $|f_n| \leq |f|$. Für nichtnegative f können wir also den Satz von Beppo Levi, für integrierbare f den Satz von Lebesgue anwenden und erhalten

$$\int_{[a, \infty)} f d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^n f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} F(n) - F(a). \quad \square$$

Bemerkung 7.60. Die Existenz des Grenzwertes $\lim_{n \rightarrow \infty} F(n) - F(a)$ allein ist nicht ausreichend um die Existenz des Integrals auf der linken Seite zu zeigen.

Korollar 7.61. Sei f_n eine Folge von Funktionen. Falls

$$\int \sum_{n=0}^{\infty} |f_n| d\mu < \infty \text{ oder } \sum_{n=0}^{\infty} \int |f_n| d\mu < \infty,$$

dann gilt

$$\int \sum_{n=0}^{\infty} f_n d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int f_n d\mu.$$

Beweis. Es gilt (vergleiche Aufgabe 1 vom Blatt 13)

$$\int \sum_{n=0}^{\infty} |f_n| d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int |f_n| d\mu < \infty$$

und für die Folge der Partialsummen $s_n = \sum_{k=0}^n f_k$ gilt

$$|s_n| \leq \sum_{k=0}^n |f_k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |f_k|.$$

Die Funktion auf der rechten Seite ist nach Voraussetzung integrierbar und wir können den Satz von Lebesgue anwenden:

$$\int \lim_{n \rightarrow \infty} s_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \int f_k d\mu = \sum_{k=0}^{\infty} \int f_k d\mu. \quad \square$$

Beispiel 7.62. Betrachte die Funktion

$$F : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$a \mapsto \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{x+a} dx.$$

Ist F stetig? Da wir das Integral nicht explizit ausrechnen können, ist diese Frage zunächst schwierig zu beantworten.

Korollar 7.63. Sei X ein metrischer Raum, $f : \Omega \times X \rightarrow \mathbb{C}$ und $\tilde{a} \in X$. Sei $f(\cdot, a)$ integrierbar für jedes $a \in X$ und $f(\omega, \cdot)$ stetig in \tilde{a} für alle $\omega \in \Omega$. Sei U eine Umgebung von \tilde{a} und g eine integrierbare Funktion (unabhängig von $a \in X$) so, dass $|f(\omega, a)| \leq g(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$ und alle $a \in U$, dann ist die Funktion

$$F : X \rightarrow \mathbb{C}$$

$$a \mapsto \int f(\omega, a) d\mu(\omega)$$

stetig in \tilde{a} .

Beweis. Sei (a_n) eine Folge mit $a_n \rightarrow \tilde{a}$. Setze $f_n := f(\cdot, a_n)$. Für hinreichend große n ist dann $a_n \in U$ und es gilt $|f_n| = |f(\cdot, a_n)| \leq g$. Nach Voraussetzung gilt für $\omega \in \Omega$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(\omega, a_n) = f(\omega, \tilde{a}).$$

Nach dem Satz von Lebesgue gilt also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(\omega) d\mu(\omega) = \int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\omega) d\mu(\omega) = \int f(\omega, \tilde{a}) d\mu(\omega) = F(\tilde{a}).$$

Da die Folge (a_n) beliebig war folgt

$$\lim_{a \rightarrow \tilde{a}} F(a) = F(\tilde{a}),$$

also die Stetigkeit von F im Punkt \tilde{a} . □

Beispiel 7.64. Im obigen Beispiel sei jetzt also $\tilde{a} \in (0, \infty)$. Es gilt für alle $a \in (\frac{\tilde{a}}{2}, \infty)$ und für alle $x \in [0, \infty]$

$$\frac{e^{-x}}{x+a} \leq \frac{2}{\tilde{a}} e^{-x}.$$

Da die Funktion auf der rechten Seite über $[0, \infty)$ integrierbar ist und $(\frac{\tilde{a}}{2}, \infty)$ eine Umgebung von \tilde{a} ist, sind die Voraussetzungen des Korollars erfüllt und somit die Funktion F stetig in \tilde{a} .

Da \tilde{a} beliebig war, ist die Funktion überall stetig.

Korollar 7.65. Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : \Omega \times X \rightarrow \mathbb{R}$ und $\tilde{a} \in X$. Sei $f(\cdot, a)$ integrierbar für jedes $a \in X$. Sei U eine Umgebung von \tilde{a} und $f(\omega, \cdot)$ differenzierbar für alle $\omega \in \Omega$ in jedem Punkt $a \in U$. Sei g eine integrierbare Funktion (unabhängig von $a \in X$) so, dass

$$\|D_a f(\omega, a)\| \leq g(\omega)$$

für alle $\omega \in \Omega$ und alle $a \in U$, dann ist die Funktion

$$\begin{aligned} F : X &\rightarrow \mathbb{R} \\ a &\mapsto \int f(\omega, a) d\mu(\omega) \end{aligned}$$

differenzierbar in \tilde{a} und es gilt

$$DF(\tilde{a}) = \int D_a F(\omega, \tilde{a}) d\mu(\omega).$$

Ohne Beweis.

Beispiel 7.66. Wir betrachten weiter das vorhergehende Beispiel. Der Integrand ist nach a differenzierbar. Sei $\tilde{a} \in (0, \infty)$, dann gilt für $x \in [0, \infty]$ und $a \in (\frac{\tilde{a}}{2}, \infty)$

$$\left| \frac{d}{da} \frac{e^{-x}}{x+a} \right| = \frac{e^{-x}}{(x+a)^2} \leq \frac{4}{\tilde{a}^2} e^{-x}.$$

Damit sind die Voraussetzungen des Korollars erfüllt. Die Funktion F ist also in \tilde{a} differenzierbar und es gilt

$$F'(\tilde{a}) = - \int_0^\infty \frac{e^x}{(x+\tilde{a})^2} dx.$$

Da \tilde{a} beliebig war, ist F für jedes $a \in (0, \infty)$ differenzierbar.

7.5 Produktmaße und der Satz von Fubini

Beispiel 7.67. Wir betrachten eine stetige Funktion $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$. Ziel ist es, das Volumen (also das dreidimensionale Lebesgue-Maß λ^3) unter dem Graphen der Funktion, also der Menge

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq f(x, y)\}$$

zu bestimmen. Dazu bieten sich nun die folgenden Integralausdrücke an:

$$\int f d\lambda^2 \text{ oder } \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy \text{ oder } \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dy dx.$$

In diesem Abschnitt wollen wir untersuchen, inwieweit die verschiedenen Methoden zum selben Ergebnis führen.

Für diesen gesamten Abschnitt seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ und (Φ, \mathcal{B}, ν) σ -endliche Maßräume.

Definition 7.68. Die Produkt- σ -algebra $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ ist die kleinste σ -algebra auf $\Omega \times \Phi$, die alle Mengen der Form $A \times B$ für $A \in \mathcal{A}$ und $B \in \mathcal{B}$ enthält.

Ein auf $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ definiertes Maß θ heißt Produktmaß von μ und ν , falls für alle $A \in \mathcal{A}$ und $B \in \mathcal{B}$ gilt

$$\theta(A \times B) = \mu(A)\nu(B).$$

Bemerkung 7.69. Man kann, mit Methoden die denen in unserer Konstruktion des Lebesgue-Maßes ähneln, zeigen, dass stets so ein Produktmaß existiert und – so die beiden Maßräume σ -endlich sind – eindeutig bestimmt ist. Wir bezeichnen diese Produktmaß dann mit $\mu \otimes \nu$. Wir benutzen die Kurzschreibweise $\mu^2 := \mu \otimes \mu$. Der Maßraum $(\Omega \times \Phi, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu)$ heißt dann das Produkt der beiden Maßräume.

Beispiel 7.70. Wir betrachten nun den Spezialfall \mathbb{R} mit der Lebesgue- σ -algebra und dem Lebesgue-Maß λ . Dann existiert auf $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ das entsprechende Produktmaß λ^2 und es gilt für Rechtecke

$$\lambda^2([a, b] \times [c, d]) = \lambda([a, b])\lambda([c, d]) = (b - a)(d - c).$$

Dieses Produktmaß charakterisiert also den Flächeninhalt.

Beispiel 7.71. Betrachte die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\mathbb{1}_{[n, n+1]^2} - \mathbb{1}_{[n+1, n+2] \times [n, n+1]} \right).$$

Dann gilt

$$\int \int f(x, y) dx dy = 0 \text{ aber } \int \int f(x, y) dy dx = 1.$$

Bezüglich λ^2 ist die Funktion gar nicht integrierbar da offensichtlich gilt

$$\int |f(x, y)| d\lambda^2(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} 2 = \infty.$$

Satz 7.72 (Satz von Tonelli). Sei $f : \Omega \times \Phi \rightarrow [0, \infty)$ messbar. Dann sind die Funktionen $\omega \mapsto f(\omega, \varphi)$ für fast alle $\varphi \in \Phi$ und $\varphi \mapsto f(\omega, \varphi)$ für fast alle $\omega \in \Omega$ messbar. Außerdem sind die Funktionen

$$\varphi \mapsto \int f(\omega, \varphi) d\mu(\omega) \text{ und } \omega \mapsto \int f(\omega, \varphi) d\nu(\varphi)$$

messbar. Es gilt

$$\int f(\omega, \varphi) d(\mu \times \nu)(\omega, \varphi) = \int \int f(\omega, \varphi) d\mu(\omega) d\nu(\varphi) = \int \int f(\omega, \varphi) d\nu(\varphi) d\mu(\omega)$$

Insbesondere ist f integrierbar falls entweder

$$\int \int f(\omega, \varphi) d\mu(\omega) d\nu(\varphi) \text{ oder } \int \int f(\omega, \varphi) d\nu(\varphi) d\mu(\omega)$$

endlich sind.

Ohne Beweis.

Korollar 7.73 (Prinzip des Cavalieri). Sei $A \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Bezeichne mit A_ω die Schnitte von A , das heißt

$$A_\omega = \{\varphi \in \Phi \mid (\omega, \varphi) \in A\}.$$

Dann ist $\omega \mapsto \nu(A_\omega)$ messbar und es gilt

$$(\mu \otimes \nu)(A) = \int \nu(A_\omega) d\mu(\omega).$$

Beweis. Nach der Definition von A_ω gilt, dass $(\omega, \varphi) \in A$ ist, genau dann wenn $\varphi \in A_\omega$ ist also gilt $\mathbb{1}_A(\omega, \varphi) = \mathbb{1}_{A_\omega}(\varphi)$. Wir wenden den Satz von Tonelli auf die Funktion $\mathbb{1}_A$ an. Dann folgt

$$\begin{aligned} (\mu \otimes \nu)(A) &= \int \mathbb{1}_A(\omega, \varphi) d(\mu \otimes \nu)(\omega, \varphi) = \int \int \mathbb{1}_A(\omega, \varphi) d\nu(\varphi) d\mu(\omega) \\ &= \int \int \mathbb{1}_{A_\omega}(\varphi) d\nu(\varphi) d\mu(\omega) = \int \nu(A_\omega) d\mu(\omega). \quad \square \end{aligned}$$

Beispiel 7.74. Sei V ein höchstens $n - 1$ dimensionaler Untervektorraum von \mathbb{R}^n . Dann ist $\lambda^n(V) = 0$.

Beweis. Es gibt mindestens einen Vektor der Standardbasis, der nicht in V enthalten ist (Warum?). Durch Umsortieren können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass e_1 dieser Vektor ist und zerlegen $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$. Die Schnitte von V bezüglich dieser Zerlegung, also die Mengen

$$V_{(x_2, \dots, x_n)} = \{x_1 \in \mathbb{R} \mid (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n\}$$

enthalten für beliebige Werte von (x_2, \dots, x_n) höchstens einen Punkt (Warum?) und haben damit λ -Maß 0. Damit gilt

$$\lambda^n(V) = \int \lambda(V_{(x_2, \dots, x_n)}) d\lambda^{n-1}(x_2, \dots, x_n) = 0 \quad \square$$

Korollar 7.75. Sei $f : \Omega \rightarrow [0, \infty)$ eine messbare Funktion und

$$A_f := \{(\omega, y) \in \Omega \times \mathbb{R} \mid 0 \leq y \leq f(\omega)\} \subset \Omega \times \mathbb{R}.$$

Dann ist A_f messbar und es gilt

$$(\mu \otimes \lambda)(A_f) = \int f(\omega) d\mu(\omega).$$

Beweis. Es gilt $\mathbb{1}_{A_f}(\omega, y) = \mathbb{1}_{[0, f(\omega)]}(y)$ und damit

$$\begin{aligned} (\mu \otimes \lambda)(A_f) &= \int \mathbb{1}_{A_f}(\omega, y) d(\mu \otimes \lambda)(\omega, y) = \int \int \mathbb{1}_{[0, f(\omega)]}(y) d\lambda(y) d\mu(\omega) \\ &= \int f(\omega) d\mu(\omega). \end{aligned} \quad \square$$

Für $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ entspricht das Integral über f also tatsächlich der Fläche (λ^2 -Maß) unter dem Graphen der Funktion.

Theorem 7.76 (Satz von Fubini). Sei $f : \Omega \times \Phi$ eine messbare Funktion, die bezüglich $\mu \otimes \nu$ integrierbar ist, dann sind die Funktionen $\omega \mapsto f(\omega, \varphi)$ messbar und integrierbar für μ -fast alle $\varphi \in \Phi$, die Funktionen $\varphi \mapsto f(\omega, \varphi)$ messbar und integrierbar für ν -fast alle $\omega \in \Omega$. Die Funktionen

$$\omega \mapsto \int f(\omega, \varphi) d\nu(\varphi) \text{ und } \varphi \mapsto \int f(\omega, \varphi) d\mu(\omega)$$

sind messbar und integrierbar und es gilt

$$\int \int f(\omega, \varphi) d(\mu \otimes \nu)(\omega, \varphi) = \int \int f(\omega, \varphi) d\nu(\varphi) d\mu(\omega) = \int \int f(\omega, \varphi) d\mu(\omega) d\nu(\varphi).$$

Ohne Beweis.

Bemerkung 7.77. Um die Integrierbarkeit bezüglich des Produktmaßes zu überprüfen wird häufig der Satz von Tonelli verwendet. Auch die Aussage des Satzes von Fubini lässt sich unmittelbar auf Produkte von mehr als zwei Maßen und entsprechende Integrale verallgemeinern.

Korollar 7.78. *Seien $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ und $a_i < b_i$ für $i \in \{1, \dots, n\}$ und setze $D = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$. Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige oder wenigstens beschränkte Funktion, dann gilt*

$$\int_D f d\lambda^n = \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n) dx_n \dots dx_1.$$

Die Integrale können dabei in beliebiger Reihenfolge ausgeführt werden.

Beweis. Da D kompakt ist ist jedes stetige f beschränkt. Es existiert also eine obere Schranke K für f und es gilt

$$\int_D |f| d\lambda^n = \int_D K d\lambda^n = K \lambda^n(D) < \infty.$$

Damit ist f integrierbar und wir können wiederholt den Satz von Fubini anwenden und erhalten

$$\begin{aligned} \int_D f d\lambda^n &= \int f(x_1, \dots, x_n) \mathbb{1}_D(x_1, \dots, x_n) d\lambda^n \\ &= \int \dots \int f(x_1, \dots, x_n) \mathbb{1}_{[a_1, b_1]}(x_1) \dots \mathbb{1}_{[a_n, b_n]}(x_n) d\lambda(x_n) \dots d\lambda(x_1) \\ &= \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n) dx_n \dots dx_1 \quad \square \end{aligned}$$

Beispiel 7.79. Wir wollen den Schwerpunkt der Fläche

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq y^2 \text{ und } x \leq 1\}$$

bestimmen. Dabei ist der Schwerpunkt einer beliebigen Fläche A definiert als

$$\int_A (x, y) d\lambda^2(x, y).$$

Wir können dieses (vektorwertige) Integral komponentenweise ausrechnen, interessieren uns also für den Ausdruck

$$\int_A x d\lambda^2(x, y) = \int x \mathbb{1}_A(x, y) d\lambda^2(x, y) = \int_{[0,1] \times [-1,1]} x \mathbb{1}_A(x, y) d\lambda^2(x, y).$$

Der letzte Ausdruck erfüllt die Voraussetzungen des vorhergehenden Korollars

$$\int_A x d\lambda^2(x, y) = \int_0^1 \int_{-1}^1 x \mathbb{1}_{[-\sqrt{x}, \sqrt{x}]}(y) dy dx = 2 \int_0^1 x \sqrt{x} dx = \frac{4}{5}$$

Die y -Komponente des Schwerpunktes kann im Prinzip genauso bestimmt werden, muss aber aus Symmetriegründen 0 sein.

7.6 Der Transformationsatz

Viele (physikalische) Systeme besitzen Symmetrien. In diesen Fällen ist es oft möglich die Behandlung des Problems substantiell zu vereinfachen indem man ein angepasstes Koordinatensystem verwendet. Man hat dann eine Koordinatentransformation $T : U \rightarrow V$ ($U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen) und betrachtet statt der ursprünglich gegebenen Funktion (physikalischen Größe) $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ die transformierte Funktion $f \circ T : U \rightarrow \mathbb{R}$, deren Gestalt (hoffentlich) einfacher ist. Wir wollen uns in diesem Abschnitt damit befassen, wie man Integrale auf andere Koordinatensysteme transformiert.

Definition 7.80. Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Abbildung $T : U \rightarrow V$ heißt Diffeomorphismus wenn sie bijektiv ist und sowohl T als auch T^{-1} stetig differenzierbar sind. Falls T und T^{-1} darüber hinaus r -fach oder beliebig oft stetig differenzierbar sind, sprechen wir von C^r -Diffeomorphismen beziehungsweise C^∞ -Diffeomorphismen.

Bemerkung 7.81. (i) Diffeomorphismen, insbesondere C^∞ -Diffeomorphismen, beschreiben Koordinatentransformationen. Man sagt T erhält die differenzierbare Struktur von X , das heißt vereinfacht formuliert: Eigenschaften einer Funktion die mit Hilfe ihrer Ableitungen fomuliert sind werden von f genau dann erfüllt, wenn sie von $f \circ T$ erfüllt werden.

(ii) In der Physik werden die Funktionen f und $f \circ T$ häufig mit dem selben Symbol bezeichnet, da sie die selbe physikalische Größe lediglich in einem anderen Koordinatensystem beschreiben. Diese Notation ist jedoch mit Vorsicht zu behandeln, da der funktionale Zusammenhang sich natürlich im Allgemeinen ändert.

(iii) Wir leiten die Gleichung $T \circ T^{-1} = \text{id}_V$ ab und erhalten mittels der Kettenregel

$$DT(T^{-1}(y))DT^{-1}(y) = I.$$

Da T^{-1} surjektiv ist, besitzt die Jakobi-Matrix $DT(x)$ für jedes $x \in U$ eine inverse Matrix.

Andererseits ist nach dem Satz über die Umkehrfunktion die Inverse T^{-1} einer bijektiven Abbildung stetig differenzierbar wenn $DT(x)$ für jedes x invertierbar ist (Warum?).

Die Abbildung $T : U \rightarrow T(U)$ ist also ein Diffeomorphismus wenn sie injektiv ist und die Jakobi-Determinante $\det DT$ auf U keine Nullstellen hat.

(iv) Offensichtlich ist die Umkehrfunktion T^{-1} eines Diffeomorphismus wieder ein Diffeomorphismus.

Beispiel 7.82. (i) Die Abbildung

$$\begin{aligned} T : (0, \infty) \times (0, 2\pi) &\rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus (0, \infty) \times \{0\} \\ (r, \varphi) &\mapsto (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) \end{aligned}$$

ist ein C^∞ -Diffeomorphismus und beschreibt den Übergang zu Polarkoordinaten. Diese Aussage sollte als Übung überprüft werden. Das kann geschehen indem man entweder die Inverse Abbildung explizit angibt oder indem man separat überprüft, dass T injektiv und surjektiv ist und dass die Jakobi-Matrix $DT(x)$ für alle x invertierbar ist.

(ii) Die Abbildung

$$T : B_1(0) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1 - \|x\|^2}}$$

ist ein Diffeomorphismus zwischen der offenen Einheitskugel $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ und ganz \mathbb{R}^n . Das Bestimmen der Umkehrabbildung wird zur Übung überlassen.

(iii) Die Abbildung

$$T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^3$$

ist kein Diffeomorphismus. Sie ist zwar glatt und bijektiv, die inverse Abbildung ist jedoch nicht differenzierbar (bzw. die Jakobi-Matrix $T'(0)$ ist nicht invertierbar).

(iv) Die Abbildung

$$T : (0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

$$(r, \varphi) \mapsto (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi))$$

ist kein Diffeomorphismus. Die Jakobi-Matrix ist zwar überall invertierbar (und T besitzt damit lokale Umkehrfunktionen) aber die Abbildung ist nicht injektiv.

Theorem 7.83 (Transformationsatz). *Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $T : U \rightarrow V$ ein Diffeomorphismus. Dann ist $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ genau dann integrierbar wenn $f \circ T |\det DT|$ über U integrierbar ist und es gilt*

$$\int_V f d\lambda^n = \int_U f \circ T |\det DT| d\lambda^n.$$

Ohne Beweis.

Beispiel 7.84. Wir wollen die Fläche des Einheitskreises berechnen also

$$\lambda^2(K_1(0)) = \int \mathbb{1}_{K_1(0)} d\lambda^2.$$

Auf Grund der offensichtlichen Radialsymmetrie des Problems bieten sich Polarkoordinaten aus Beispiel 7.82 an. Wir wählen also

$$\begin{aligned} V &= \mathbb{R}^2 \setminus [0, \infty) \times \{0\} \\ U &= (0, \infty) \times (0, 2\pi) \end{aligned}$$

und T wie oben. Zunächst ist es unerheblich ob wir über ganz \mathbb{R}^2 oder über V integrieren, da die entfernte Menge eine λ^2 -Nullmenge ist (Warum?).

Man rechnet leicht die Jakobi-Determinante $\det DT(r, \varphi) = r$ aus. Die charakteristische Funktion $\mathbb{1}_{K_1(0)}$ testet, ob ein Punkt im Einheitskreis liegt. Man überzeugt sich also leicht, dass gilt $\mathbb{1}_{K_1(0)} \circ T(r, \varphi) = \mathbb{1}_{[0,1]}(r)$ und wir erhalten mit der Transformationsformel

$$\begin{aligned} \lambda^2(K_1(0)) &= \int_V \mathbb{1}_{K_1(0)}(x, y) d\lambda^2(x, y) = \int_U r \mathbb{1}_{[0,1]}(r) d\lambda^2(r, \varphi) \\ &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} r \mathbb{1}_{[0,1]}(r) d\varphi dr = 2\pi \int_0^1 r dr = \pi. \end{aligned}$$

Dabei haben wir noch den Satz von Tonelli verwendet.

Bemerkung 7.85. (i) Einen wichtigen Spezialfall erhält man, mit der Abbildung

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto Ax. \end{aligned}$$

Falls A invertierbar ist, dann ist T ein Diffeomorphismus mit $DT = A$ und es folgt aus der Transformationsformel

$$\int f d\lambda^2 = |\det A| \int f \circ T d\lambda^2.$$

- (ii) Falls A eine orthogonale Matrix ist (also eine Drehung oder Spiegelung), dann ändert T die Integrale nicht. Mit anderen Worten: Drehungen und Spiegelungen lassen das (Hyper)-Volumen von Mengen unverändert.
- (iii) Ein weiterer Spezialfall ergibt sich für $A = \text{diag}(a, a, \dots, a)$ mit $\det A = a^n$. Eine gleichmäßige Streckung (oder Stauchung) in allen Raumdimensionen um den Faktor a skaliert n -dimensionale (Hyper)-Volumina mit dem Faktor a^n .
- (iv) In der physikalischen Literatur wird häufig mit „Das Flächenelement in Polarkoordinaten ist $r dr d\varphi$.“ auf die Transformationsformel (für zum Beispiel Polarkoordinaten) verwiesen.
- (v) Der Transformationssatz verallgemeinert die Substitutionsregel für Integrale über \mathbb{R} .

Beispiel 7.86. Wir wollen $K := \int e^{-x^2} dx$ berechnen. Wir schreiben dazu

$$\begin{aligned} K^2 &= \int e^{-x^2} dx \int e^{-y^2} dy = \int \int e^{-(x^2+y^2)} dx dy \\ &= \int e^{-(x^2+y^2)} d\lambda^2(x, y) = \int f(x, y) d\lambda^2(x, y) \end{aligned}$$

für $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$. Da die Integranden nichtnegativ sind, konnten wir oben den Satz von Tonelli verwenden.

Wir transformieren das letzte Integral nun auf Polarkoordinaten. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_V f(x, y) d\lambda^2(x, y) &= \int_U f \circ T(r, \varphi) |\det DT(r, \varphi)| d\lambda^2(r, \varphi) = \int e^{-r^2} r d\lambda^2(r, \varphi) \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty r e^{-r^2} dr = 2\pi \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2} e^{-n^2} + \frac{1}{2} \right) = \pi. \end{aligned}$$

Dabei haben wir nochmals den Satz von Tonelli und Korollar 7.59 verwendet. Da $((0, \infty) \times \{0\})$ eine Nullmenge bezüglich λ^2 ist gilt $K^2 = \pi$.

Beispiel 7.87 (Integrierbarkeit von radialsymmetrischen Funktionen). Sei $f : [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}$ messbar und $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ die Funktion $F(x) = f(\|x\|)$ wobei $\|\cdot\|$ die euklidische Norm bezeichnet. Unter welchen Bedingungen an f ist F dann λ^n integrierbar? Dazu können wir Kugelkoordinaten in \mathbb{R}^n folgendermaßen definieren:

$$\begin{aligned} D &:= (0, \infty) \times D_\varphi := (0, \infty) \times (0, \pi)^{n-2} \times (0, 2\pi) \\ T : D &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ &\quad (r \cos(\varphi_1), \\ &\quad r \sin(\varphi_1) \cos(\varphi_2), \\ &\quad r \sin(\varphi_1) \sin(\varphi_2) \cos(\varphi_3), \\ (r, \varphi) &\mapsto \dots, \\ &\quad r \sin(\varphi_1) \cdots \sin(\varphi_{n-3}) \cos(\varphi_{n-2}), \\ &\quad r \sin(\varphi_1) \cdots \sin(\varphi_{n-2}) \cos(\varphi_{n-1}), \\ &\quad r \sin(\varphi_1) \cdots \sin(\varphi_{n-2}) \sin(\varphi_{n-1})). \end{aligned}$$

Dabei ist $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})$. Man kann zeigen (Übung) dass T injektiv ist und

$$|\det DT(r, \varphi)| = r^{n-1} \sin(\varphi_1)^{n-2} \sin(\varphi_2)^{n-3} \cdots \sin(\varphi_{n-2}) := r^{n-1} A(\varphi)$$

gilt. Damit ist insbesondere DT auf D invertierbar und $T : D \rightarrow T(D)$ ein Diffeomorphismus (Bemerkung 7.81). Außerdem überzeugt man sich, dass $\|T(r, \varphi)\| = r$ gilt.

Dann gilt mit dem Transformationssatz und dem Satz von Tonelli

$$\begin{aligned}
 \int |F(x)| \, d\lambda^n(x) &= \int |F \circ T(r, \varphi)| |\det DT(r, \varphi)| \, d\lambda^n(r, \varphi) \\
 &= \int_{D_\varphi} \int_0^\infty |f(r)| r^{n-1} A(\varphi) \, dr \, d\lambda^{n-1}(\varphi) \\
 &= \int_0^\infty r^{n-1} |f(r)| \, dr \int_{D_\varphi} A(\varphi) \, d\lambda^{n-1}(\varphi).
 \end{aligned}$$

Das Integral über φ kann man explizit berechnen, hier ist jedoch nur entscheidend, dass A beschränkt ist und D_φ endliches λ^{n-1} Maß hat. Man erhält also, dass F integrierbar ist, genau dann wenn $r \mapsto r^{n-1} |f(r)|$ integrierbar über $(0, \infty)$ ist.

Insbesondere ist $e^{-\|x\|}$ integrierbar für beliebigen Dimensionen n . Die Funktion $\frac{1}{\|x\|^\kappa}$ ist über $\mathbb{R}^n \setminus B_\epsilon(0)$ (für beliebiges $\epsilon > 0$) integrierbar genau dann wenn $\kappa > n$ und über $B_\epsilon(0)$ genau dann wenn $\kappa < n$ ist.

8 Gewöhnliche Differentialgleichungen

8.1 Lösungsmethoden

Definition 8.1 (Gewöhnliche Differenzialgleichung). Eine gewöhnliche Differenzialgleichung (GDGL) ist eine Gleichung der Form

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

für ein $F : \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}$. Dabei ist n die Ordnung der Differenzialgleichung.

Sei I ein offenes Intervall. Eine Funktion $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Lösung dieser Differenzialgleichung wenn sie mindestens n mal differenzierbar ist und wenn gilt

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$$

für alle $x \in I$.

Beispiel 8.2. (i) Die Differenzialgleichung

$$y'' = -\frac{1}{y^2} \text{ beziehungsweise } y'' + \frac{1}{y^2} = 0$$

beschreibt die Bewegung einer Probemasse im Gravitationsfeld außerhalb einer radialsymmetrischen Massenverteilung entlang einer Geraden durch das Zentrum der Massenverteilung.

(ii) Die Differenzialgleichung

$$y'' = -\sin(y) \text{ oder } y'' + \sin(y) = 0$$

beschreibt die Bewegung eines mathematischen Pendels.

Bemerkung 8.3. (i) Auch wenn in unserer Definition die rechte Seite der Gleichung stets 0 ist, also alle Terme auf einer Seite stehen, werden wir natürlich auch mit anderen Differenzialgleichungen arbeiten, die sich immer einfach in diese Form überführen lassen.

(ii) Häufig ist F auch nur auf einer Teilmenge von \mathbb{R}^{n+2} definiert und die Definitionen gelten sinngemäß.

(iii) Das Lösen von (selbst einfach aussehenden) Differenzialgleichungen ist im Allgemeinen schwierig. Wir werden Verfahren für einige Arten von gewöhnlichen Differenzialgleichungen erarbeiten. In vielen (auch praktisch relevanten) Fällen erfordert jedoch jede Gleichung eine eigene Theorie.

(iv) Auch wenn sich eine Differenzialgleichung nicht explizit lösen lässt, kann man dennoch versuchen die folgenden Aspekte zu untersuchen:

- Existenz von Lösungen
- Eindeutigkeit der Lösungen

- Stabilität
- Näherungsweise und numerische Lösungen

(v) In der obigen Definition spielt y zwei verschiedene Rollen. Es ist die (funktionswertige) Variable der Differenzialgleichung sowie der Name der Lösungsfunktion. Diese Doppeldeutigkeit ist etwas unglücklich aber weit verbreitet.

Beispiel 8.4. (i) Sei I ein offenes Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann sind die Lösungen der GDGI

$$y' = f(x)$$

genau die Stammfunktionen von f .

Sei nun $x_0 \in I$ dann folgt aus dem Hauptsatz (Theorem 7.49) und aus Bemerkung 7.48, dass die Lösungen genau die Form

$$y(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt + c$$

für beliebiges $c \in \mathbb{R}$ haben.

(ii) Für die Gleichung $y' = y$ überzeugt man sich leicht, dass $x \mapsto ce^x$ für jedes $c \in \mathbb{R}$ eine Lösung auf ganz \mathbb{R} ist. Um zu zeigen, dass jede Lösung diese Form hat, sei y eine beliebige Lösung der Gleichung und betrachte $u(x) = y(x)e^{-x}$. Dann gilt

$$u'(x) = y'(x)e^{-x} - y(x)e^{-x} = 0$$

woraus $u(x) = c$ für eine Konstante c folgt.

Wie in den obigen Fällen haben Differenzialgleichungen üblicherweise ganze Schaaren von Funktionen als Lösungen. Es können also zusätzliche Bedingungen an die Lösungen gestellt werden.

Definition 8.5 (Anfangswertproblem). Seien $y_0, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$ und $F : \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{K}$. Das System von Gleichungen

$$\begin{aligned} F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) &= 0 \\ y(0) &= y_0 \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}(0) &= y_{n-1} \end{aligned}$$

heißt Anfangswertproblem.

Beispiel 8.6. Das Anfangswertproblem (AWP)

$$\begin{aligned}y'' &= -\frac{1}{y^2} \\ y(0) &= y_0 \\ y'(0) &= y_1\end{aligned}$$

legt für die Bewegung des Massenpunktes den Anfangsort y_0 sowie die Anfangsgeschwindigkeit y_1 fest.

Beispiel 8.7. Sei I ein offenes Intervall, das die 0 enthält. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned}y' &= -y^2 \\ y(0) &= 1\end{aligned}$$

Angenommen $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine Lösung und es gilt $y(x) > 0$ für $x \in I$. Integrieren wir die Gleichung

$$1 = -\frac{1}{y(t)^2}y'(t)$$

von 0 bis x , so erhalten wir mit der Substitutionsregel

$$x = -\int_0^x \frac{1}{y(t)^2}y'(t)dt = -\int_1^{y(x)} \frac{1}{y^2}dy = \frac{1}{y(x)} - 1,$$

also

$$y(x) = \frac{1}{x+1}.$$

Man überprüft leicht, dass das tatsächlich eine Lösung des Anfangswertproblems ist. Wir haben hier vorausgesetzt, dass $y(x)$ positiv ist, und I muss die 0 enthalten. Daher ist $I = (-1, \infty)$ das größte mögliche Intervall auf dem die Lösung definiert ist.

Auf ähnliche Weise kann verfahren werden, wenn das Anfangswertproblem die Form

$$\begin{aligned}y' &= f(y)g(x) \\ y(x_0) &= y_0\end{aligned}$$

hat. Formal können wir wie oben schreiben

$$\int_{y(x_0)}^{y(x)} \frac{1}{f(y)}dy = \int_{x_0}^x g(x).$$

Es stellt sich aber die Frage, ob die Integrale existieren und ob die entstehende Gleichung nach $y(x)$ aufgelöst werden kann.

Satz 8.8 (Trennung der Variablen). Seien I, J offene Intervalle, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $0 \notin f(I)$. Seien $x_0 \in J$ und $y_0 \in I$.

Dann existiert ein offenes Intervall $I_2 \subset J$, so dass das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y' &= f(y)g(x) \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned}$$

genau eine Lösung y mit Definitionsbereich I_2 besitzt. Setze

$$F(y) = \int_{y_0}^y \frac{1}{f(t)} dt.$$

Dann ist $y : I_2 \rightarrow I$ eindeutig durch

$$F(y(x)) = \int_{x_0}^x g(t) dt$$

bestimmt.

Beweis. Nach Voraussetzung hat f keine Nullstellen. Wir nehmen hier $f > 0$ an, der Fall $f < 0$ wird analog behandelt. Da die Ableitung von $F'(y) = \frac{1}{f(y)}$ positiv ist, ist F streng monoton wachsend (Korollar 4.45) also insbesondere injektiv. Es besitzt also eine Umkehrfunktion $H : F(I) \rightarrow I$ und nach dem Satz über die Umkehrfunktion (Satz 4.50) ist diese stetig differenzierbar und es gilt

$$H'(z) = \frac{1}{F'(H(z))}$$

für alle $z \in F(I)$.

Setze jetzt

$$G(x) := \int_{x_0}^x g(t) dt,$$

für $x \in J$. Das Bild $F(I)$ ist ein offenes Intervall (Warum?), das die 0 enthält. Wähle ein offenes Intervall I_2 , so dass $x_0 \in I_2$ und $G(I_2) \subset F(I)$. (Warum existiert das?) Dann gilt für $y(x) = H(G(x))$ ($x \in I_2$):

$$y'(x) = H'(G(x))G'(x) = \frac{1}{F'(H(G(x)))}g(x) = \frac{1}{F'(y(x))}g(x) = f(y(x))g(x),$$

und $y'(x_0) = H'(0) = y_0$, also löst y das Anfangswertproblem.

Sei andererseits $\tilde{y} : I_2 \rightarrow \mathbb{R}$ irgendeine Lösung des Anfangswertproblems, dann gilt für jedes $x \in I_2$

$$\int_{x_0}^x g(x) dx = \int_{x_0}^x \frac{\tilde{y}'(x)}{f(\tilde{y}(x))} dx = \int_{y_0}^{\tilde{y}(x)} \frac{1}{f(\tilde{y})} d\tilde{y} = F(\tilde{y}(x)).$$

Nach Voraussetzung ist die linke Seite im Definitionsbereich von H und damit gilt $\tilde{y}(x) = H(G(x)) = y(x)$. \square

Bemerkung 8.9. Die Wahl von I_2 ist natürlich nicht eindeutig. Wir können jedoch das maximale Intervall wählen, das heißt die Vereinigung aller Intervalle die die gestellten Bedingungen erfüllen. In diesem Sinne gibt es für jedes x_0 und y_0 eine eindeutige Lösung der Differenzialgleichung mit maximalem Definitionsbereich.

Analog zum Bestimmen von Stammfunktionen und Integralen mittels Substitution kann man auch Differenzialgleichungen durch Substitution auf bereits bekannte Fälle zurückführen. Ähnlich wie bei Integralen gibt es kein „Rezept“ zum Auffinden geeigneter Substitutionen.

Satz 8.10. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, $a, b, c \in \mathbb{R}$ und I ein offenes Intervall. Dann ist $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung der Differenzialgleichung

$$y' = f(ax + by + c)$$

genau dann wenn $u(x) = ax + by(x) + c$ eine Lösung von

$$u' = a + bf(u)$$

ist. Letztere Gleichung hat getrennte Variablen.

Der Beweis der Aussage folgt direkt aus der Gleichung

$$u'(x) = a + by'(x).$$

Beispiel 8.11 (eulerhomogene Differenzialgleichung). Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und I ein offenes Intervall das die 0 nicht enthält. Dann ist $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung der Differenzialgleichung

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

genau dann wenn $u(x) = \frac{y(x)}{x}$ die Differenzialgleichung

$$u' = \frac{f(u) - u}{x}$$

löst.

Beweis. Übung □

Beispiel 8.12. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ so, dass

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Seien \tilde{x} und \tilde{y} die eindeutig bestimmten (Warum?) Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} a_1 \tilde{x} + b_1 \tilde{y} + c_1 &= 0 \\ a_2 \tilde{x} + b_2 \tilde{y} + c_2 &= 0. \end{aligned}$$

Sei I ein offenes Intervall, das die 0 nicht enthält. Dann ist $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung der Differenzialgleichung

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

genau dann wenn

$$\begin{aligned} u : I - \tilde{x} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto y(x + \tilde{x}) - \tilde{y} \end{aligned}$$

eine Lösung von

$$u' = f\left(\frac{a_1 + b_1 \frac{u(x)}{x}}{a_2 + b_2 \frac{u(x)}{x}}\right)$$

ist. Die letzte Gleichung ist eine eulerhomogene Differenzialgleichung.

Wir zeigen nur die eine Richtung der Substitution. Die Rücksubstitution verläuft analog.

$$\begin{aligned} u'(x) = y'(x + \tilde{x}) &= f\left(\frac{a_1(x + \tilde{x}) + b_1y(x + \tilde{x}) + c_1}{a_2(x + \tilde{x}) + b_2y(x + \tilde{x}) + c_2}\right) \\ &= f\left(\frac{a_1x + b_1u(x) + a_1\tilde{x} + b_1\tilde{y} + c_1}{a_2x + b_2u(x) + a_2\tilde{x} + b_2\tilde{y} + c_2}\right) \\ &= f\left(\frac{a_1 + b_1 \frac{u(x)}{x}}{a_2 + b_2 \frac{u(x)}{x}}\right) \end{aligned}$$

Definition 8.13 (exakte Differenzialgleichung). Seien $D \subset \mathbb{R}^2$ offen und $p, q : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Die Differenzialgleichung

$$p(x, y) + q(x, y)y' = 0$$

heißt exakt, wenn es eine stetig differenzierbare Funktion $H : D \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, so dass $\partial_1 H = p$ und $\partial_2 H = q$ gelten. Die Funktion H heißt Stammfunktion oder Potentialfunktion der exakten Differenzialgleichung.

Satz 8.14. Seien $D \subset \mathbb{R}^2$ offen und $p, q : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen, die Differenzialgleichung

$$p(x, y) + q(x, y)y' = 0$$

exakt und H eine Potentialfunktion. Sei I ein offenes Intervall und $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, so dass der Graph $(x, y(x))$ der Funktion in D enthalten ist. Dann ist y eine Lösung der Differenzialgleichung genau dann wenn es ein $c \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $H(x, y(x)) = c$ für alle $x \in I$ ist.

Beweis. Die Aussage folgt unmittelbar aus der Gleichung

$$\frac{d}{dx}H(x, y(x)) = \partial_1 H(x, y(x)) + \partial_2 H(x, y(x))y'(x) = p(x, y(x)) + q(x, y(x))y'(x). \quad \square$$

Bemerkung 8.15. Die obige Aussage führt die Lösung einer Differentialgleichung auf die Lösung einer gewöhnlichen Gleichung zurück (zu beachten ist jedoch, dass die Lösung der Gleichung gewisse Bedingungen erfüllen muss um auch eine Lösung der Differentialgleichung zu sein). Allerdings ist dazu die Kenntnis der Potentialfunktion notwendig. Eine systematische Methode zur Bestimmung von Stammfunktionen steht uns bisher nicht zur Verfügung. Der folgende Satz gibt uns aber wenigstens ein notwendiges Kriterium zum Erkennen von exakten Differentialgleichungen an die Hand.

Satz 8.16. *Seien $D \subset \mathbb{R}^2$ offen und $p, q : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen. Falls die Differentialgleichung*

$$p(x, y) + q(x, y)y' = 0$$

exakt ist, gilt $\partial_2 p(x, y) = \partial_1 q(x, y)$.

Beweis. Sei H eine Potentialfunktion, dann ist H zweimal stetig differenzierbar und nach dem Satz von Schwarz gilt

$$\partial_2 p(x, y) = \partial_2 \partial_1 H(x, y) = \partial_1 \partial_2 H(x, y) = \partial_1 q(x, y). \quad \square$$

Bemerkung 8.17. Unter zusätzlichen Voraussetzungen an den Definitionsbereich D ist die obige „Integrabilitätsbedingung“ auch hinreichend. Wir werden später darauf zurückkommen.

Beispiel 8.18. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} 2x + y^2 + 2xyy' &= 0 \\ y(1) &= 1. \end{aligned}$$

Es sind $p(x, y) = 2x + y^2$ und $q(x, y) = 2xy$ und es gilt $\partial_2 p(x, y) = 2y = \partial_1 q(x, y)$, die notwendige Bedingung für Exaktheit ist also erfüllt.

Für eine Potentialfunktion H muss gelten $\partial_1 H(x, y) = 2x + y^2$, also muss $H(x, y) = x^2 + xy^2 + G(y)$ sein, für eine differenzierbare Funktion G . Außerdem muss gelten

$$\partial_2 H(x, y) = 2xy + G'(y) = 2xy.$$

Also muss G konstant sein und eine mögliche Potentialfunktion ist $H(x, y) = x^2 + xy^2$. Für die gesuchte Lösung gilt also $H(x, y(x)) = x^2 + xy^2 = H(1, 1) = 2$. Die letzte Gleichung hat die beiden Lösungen

$$y(x) = \pm \sqrt{\frac{2}{x} - x}.$$

von denen jedoch nur die mit positivem Vorzeichen die Anfangsbedingung erfüllt. Diese Funktion ist auf $(-\infty, -2] \cup (0, 2]$ definiert, der maximale (sinnvolle) Definitionsbereich der Lösung ist jedoch $(0, 2)$.

Bemerkung 8.19. Falls eine Differentialgleichung der Form

$$p(x, y) + q(x, y)y' = 0$$

nicht exakt ist, so kann man versuchen, einen integrierenden Faktor zu finden, das heißt eine nichtverschwindende Funktion $h(x, y)$, so dass

$$h(x, y)p(x, y) + h(x, y)q(x, y)y' = 0$$

exakt ist. In manchen Fällen ist es möglich, einen integrierenden Faktor zu raten, oder durch bestimmte Ansätze zu ermitteln (zum Beispiel ist es üblich anzunehmen, dass h nur von x oder nur von y abhängt).

Allgemein können wir mit Satz 8.16 die folgende notwendige Bedingung für einen integrierenden Faktor herleiten:

$$p(x, y)\partial_2 h(x, y) + h(x, y)\partial_2 p(x, y) = q(x, y)\partial_1 h(x, y) + h(x, y)\partial_1 q(x, y).$$

Da es sich hier um eine partielle Differentialgleichung handelt, wird sich die Lösung des Problems dadurch im Allgemeinen nicht vereinfachen.

Definition 8.20 (Gewöhnliche Differentialgleichungssysteme). Ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem (GDGS) ist eine Gleichung der Form

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

für ein $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^l \times \dots \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Eine mindestens n mal differenzierbare Funktion $y : I \rightarrow \mathbb{R}^l - I$ offenes Intervall – heißt Lösung des Differentialgleichungssystems, wenn für $x \in I$ gilt

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0.$$

Beispiel 8.21. (i) Das Differentialgleichungssystem ($z = (z_1, z_2, z_3)$)

$$z'' = -\frac{z}{\|z\|^3} = -\frac{1}{\|z\|^2} \frac{z}{\|z\|}$$

beschreibt die Bewegung einer Punktmasse im Gravitationsfeld außerhalb einer radialsymmetrischen Massenverteilung.

(ii) Die Lotka-Volterra-Gleichungen sind ein Modell für die Entwicklung der Populationsgröße von Räubern r sowie deren Beutetieren b :

$$\begin{aligned} b' &= \alpha_1 b - \gamma_1 br \\ r' &= -\alpha_2 r + \gamma_2 br. \end{aligned}$$

Bemerkung 8.22. Das Differentialgleichungssystem

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$$

ist äquivalent (hat also genau die selben Lösungen) wie das Differentialgleichungssystem erster Ordnung

$$\begin{aligned} F(x, y, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y'_{n-1}) &= 0 \\ y' &= y_1 \\ y'_1 &= y_2 \\ &\vdots \\ y'_{n-2} &= y_{n-1}. \end{aligned}$$

Diese Substitution bringt uns einer Lösung natürlich nicht näher, wir können uns aber in der theoretischen Behandlung von Differentialgleichungssystemen auf Systeme erster Ordnung beschränken.

8.2 Der Satz von Picard-Lindelöf

Beispiel 8.23. Betrachte die Differentialgleichung

$$y' = 2\sqrt{|y|}.$$

Man überzeugt sich leicht, dass $y(x) = (x - c)^2$ für $x > c$, $y(x) = -(x - c)^2$ für $x < c$ und $y(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R}$ Lösungen sind. Aus diesen können wir jetzt allerdings weitere Lösungen konstruieren. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $a \leq b$ und

$$y_1(x) = \begin{cases} (x - a)^2 & x \in (-\infty, a) \\ 0 & x \in [a, b] \\ (x - b)^2 & x \in (b, \infty) \end{cases}$$

Dann ist die Funktionen y_1 Lösungen der Differentialgleichung für beliebige Werte von a und b (Warum gilt das auch in a und b ?).

Insbesondere lösen diese Funktionen das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y' &= \sqrt{|y|} \\ y(0) &= 0 \end{aligned}$$

falls $a \leq 0 \leq b$ ist.

Unser Ziel ist nun ein Satz, der sicherstellt, dass ein gegebenes Anfangswertproblem genau eine Lösung hat. Dazu benötigen wir zunächst noch einige Vorbereitungen.

Definition 8.24. Sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $(x_0, y_0) \in D$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$. Wir sagen, dass f eine lokale Lipschitzbedingung in y (oder bezüglich y) erfüllt (im Punkt (x_0, y_0)), wenn es eine Umgebung U von (x_0, y_0) und eine Konstante $L \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$\|f(x, y) - f(x, z)\| \leq L \|y - z\|$$

für alle $(x, y), (x, z) \in U$ erfüllt ist. Wir sagen f erfüllt eine lokale Lipschitzbedingung in y auf D falls das für jeden Punkt gilt.

Falls wir $U = D$ wählen können, so sagen wir, dass f eine globale Lipschitzbedingung bezüglich y erfüllt.

Beispiel 8.25. Der Begriff ist ähnlich dem der Lipschitzstetigkeit, wir interessieren uns jedoch hier nur für das Verhalten in den y -Variablen.

Wir betrachten beispielsweise die Funktion

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto x^2 y^2 \end{aligned}$$

Dann erhalten wir

$$|f(x, y) - f(x, z)| = |x^2(y + z)| |y - z|.$$

Der erste Faktor auf der rechten Seite kann beliebig große Werte annehmen, die erfüllt also keine globale Lipschitzbedingung. Sei nun $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ fest und wähle $R > \max |x_0|, |y_0|$. Dann gilt für alle Punkte $(x, y), (x, z) \in (-R, R) \times (-R, R)$

$$|x^2(y + z)| \leq 2R^3.$$

Damit erfüllt f eine lokale Lipschitzbedingung in jedem Punkt.

Wir werden im Zusammenhang mit Differenzialgleichungssystemen auf Ausdrücke der Form

$$\int_a^b f(x) dx$$

stoßen für vektorwertige $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Solche Integrale definieren wir komponentenweise.

Definition 8.26. Sei also $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine messbare Funktion und f_1, \dots, f_n die Komponentenfunktionen von f , das heißt $f(\omega) = (f_1(\omega), \dots, f_n(\omega))$. Dann heißt f integrierbar, falls f_1, \dots, f_n integrierbar sind und in diesem Falle definieren wir

$$\int f d\mu := \left(\int f_1 d\mu, \dots, \int f_n d\mu \right).$$

Satz 8.27. Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum, $\|\cdot\|$ eine Norm auf \mathbb{R}^n und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine messbare Funktion. Die Funktion f ist integrierbar genau dann, wenn $\|f\|$ integrierbar ist und es gilt

$$\left\| \int f d\mu \right\| \leq \int \|f\| d\mu.$$

Ohne Beweis.

Lemma 8.28. Sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $(x_0, y_0) \in D$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig. Sei I ein offenes Intervall, $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und $(x, y(x)) \in D$ für jedes $x \in I$. Dann ist y Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned}$$

genau dann, wenn es die Integralgleichung

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

erfüllt.

Beweis. Falls y das Anfangswertproblem löst, dann gilt nach dem Hauptsatz

$$y(x) - y_0 = y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^x y'(t) dt = \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt.$$

Ist die Integralgleichung erfüllt, so folgt

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

ebenfalls aus dem Hauptsatz. □

Theorem 8.29 (Satz von Picard-Lindelöf). Sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $(x_0, y_0) \in D$. Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und erfülle eine lokale Lipschitzbedingung in (x_0, y_0) bezüglich y . Dann existiert $\epsilon > 0$ so, dass das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned}$$

auf $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ genau eine Lösung hat.

Beweis. Wir haben oben die Lösung des Anfangswertproblems zu einem Fixpunktproblem umformuliert und wollen darauf nun den Banachschen Fixpunktsatz anwenden. Wir basteln uns also eine Menge von Funktionen so, dass der Satz für das Fixpunktproblem anwendbar ist. Sei dazu $U \subset D$ eine Umgebung von (x_0, y_0) und $L > 0$, so dass

$$\|f(x, y) - f(x, z)\| \leq L \|y - z\|$$

für alle $(x, y), (x, z) \in U$. Wähle $a, r > 0$ so, dass $\tilde{D} = [x_0 - a, x_0 + a] \times K_r(y_0) \subset U$ (Warum geht das?). Da \tilde{D} abgeschlossen und beschränkt ist, existiert $M > 0$ so, dass $\|f(x, y)\| \leq M$ für $(x, y) \in \tilde{D}$ (Warum existiert das?). Wir wählen jetzt $a \geq \epsilon > 0$ so, dass $\epsilon M < r$ und $\epsilon L < 1$ und definieren $I = [x_0 + \epsilon, x_0 - \epsilon]$.

Sei nun $X \subset C(I)$ die Menge der Funktionen y , die die Bedingung $y(x) \in K_r(y_0)$ für alle $x \in I$ erfüllen. Wir erinnern uns, dass $C(I)$ und damit X mit der Supremumnorm ausgestattet sind. Dann ist X bezüglich dieser Norm eine abgeschlossene Teilmenge (Warum?) des vollständigen Raumes $C(I)$ und somit selbst vollständig (Satz 5.38). Wir definieren die Abbildung $T : X \rightarrow X$ durch

$$T(y)(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt.$$

Dazu müssen wir zunächst zeigen, dass $T(y)$ tatsächlich wiederum in X liegt. Die Stetigkeit folgt dabei aus dem Hauptsatz. Für $x \geq x_0$ (der Fall $x < x_0$ wird analog behandelt) folgt weiter

$$\begin{aligned} \|T(y)(x) - y_0\| &= \left\| \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \right\| \leq \int_{x_0}^x \|f(t, y(t))\| dt \\ &\leq \int_{x_0}^x M dt = (x - x_0)M \leq \epsilon M < r, \end{aligned}$$

das heißt $T(y)(x) \in K_r(y_0)$ für alle $x \in I$.

Schließlich gilt für $y, \tilde{y} \in X$ und $x \in I$ (wir betrachten erneut nur $x \geq x_0$)

$$\begin{aligned} \|T(y)(x) - T(\tilde{y})(x)\| &= \left\| \int_{x_0}^x (f(t, y(t)) - f(t, \tilde{y}(t))) dt \right\| \\ &\leq \int_{x_0}^x \|f(t, y(t)) - f(t, \tilde{y}(t))\| dt \\ &\leq \int_{x_0}^x L \|y(t) - \tilde{y}(t)\| dt \leq L \int_{x_0}^x \|y - \tilde{y}\|_\infty dt \leq \epsilon L \|y - \tilde{y}\|_\infty. \end{aligned}$$

Bilden wir nun das Supremum über alle $x \in I$, so folgt

$$\|T(y) - T(\tilde{y})\|_\infty \leq \epsilon L \|y - \tilde{y}\|_\infty,$$

da $\epsilon L < 1$ ist, haben wir gezeigt, dass T eine strenge Kontraktion ist.

Jetzt folgt aus dem Banachschen Fixpunktsatz (Theorem 6.41) die Existenz eines eindeutigen Fixpunktes für die Gleichung $T(y) = y$. Aus Lemma 8.28 folgt dann, dass das Anfangswertproblem auf I eine eindeutige Lösung hat. \square

Bemerkung 8.30. Aus dem Banachschen Fixpunktsatz folgt auch ein Verfahren zum Bestimmen der Lösung (Bemerkung 6.42). Wir wenden die Abbildung T iterativ auf einen beliebigen Startpunkt in X , also zum Beispiel auf die konstante Funktion $\varphi(x) = y_0$ an:

$$\varphi_0 = \varphi \text{ und } \varphi_i(x) = y_0 + \int_{x_0}^x \varphi_{i-1}(x) dt.$$

Dann konvergieren die sogenannten Picard-Iterierten φ_i in X , also gleichmäßig, gegen die gesuchte Lösung. Dieses Verfahren eignet sich prinzipiell auch zum numerischen Lösen von Differenzialgleichungssystemen, der praktische Nutzen hängt jedoch von der Größe des Intervalls $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ ab.

Beispiel 8.31. Wir betrachten erneut die Gleichung $y' = f(x, y) := \sqrt{|y|}$. Es gilt (vergleiche Beispiel 5.52)

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{|f(x, y) - f(x, 0)|}{|y - 0|} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{|y|}} = \infty$$

also erfüllt f in keinem Punkt der Form $(x_0, 0)$ eine lokale Lipschitzbedingung.

Satz 8.32. Sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, dann erfüllt f eine lokale Lipschitzbedingung bezüglich y .

Beweis. Sei $(x_0, y_0) \in D$. Wähle $r > 0$ so, dass $K_r(x_0, y_0) \subset D$. Da f stetig differenzierbar ist, ist $D_y f$ eine stetige Funktion und damit auf der kompakten Menge $K_r(x_0, y_0)$ beschränkt (Satz 5.67), es gibt also ein $L > 0$ so, dass $\|D_y f(x, y)\| \leq L$ für alle $(x, y) \in K_r(x_0, y_0)$. Mit dem allgemeinen Mittelwertsatz (Satz 6.14) erhalten wir für $(x, y), (x, z) \in K_r(x_0, y_0)$ (der Wert von x ist hier zunächst fest)

$$\|f(x, y) - f(x, z)\| \leq \sup_{t \in [0, 1]} \|D_y f(x, y + t(z - y))\| \|y - z\| \leq L \|y - z\|. \quad \square$$

Beispiel 8.33. Betrachte die Differentialgleichung

$$y'' = -\frac{y}{\|y\|^3}$$

beziehungsweise das äquivalente Differentialgleichungssystem

$$(y, z)' = \left(z, -\frac{y}{\|y\|^3} \right).$$

Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \mapsto \left(z, -\frac{y}{\|y\|^3} \right) = \left(z, -(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)^{-\frac{3}{2}}(y_1, y_2, y_3) \right)$$

ist stetig differenzierbar auf ihrem gesamten Definitionsbereich und f erfüllt damit eine lokale Lipschitzbedingung. Das Anfangswertproblem für die Planeten- beziehungsweise Satellitenbewegung hat also (zunächst lokal) eine eindeutige Lösung.

Definition 8.34. Sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $(x_0, y_0) \in D$. Eine Lösung $\tilde{y} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ des Anfangswertproblems

$$y' = f(x, y)$$

$$y(x_0) = y_0$$

heißt (echte) Fortsetzung der Lösung $y : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ falls $J \subset I$ ($J \subsetneq I$) und $y(x) = \tilde{y}(x)$ für alle $x \in J$ gilt. Die Lösung y heißt maximale Lösung, falls sie keine echten Fortsetzungen besitzt.

Satz 8.35. Sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $(x_0, y_0) \in D$. Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und erfülle eine lokale Lipschitzbedingung (in allen Punkten von D) bezüglich y . Dann besitzt das Anfangswertproblem

$$y' = f(x, y)$$

$$y(x_0) = y_0 \tag{8.1}$$

eine eindeutige, maximale Lösung.

Beweis. Wir zeigen zunächst: falls $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $\tilde{y} : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lösungen des Anfangswertproblems sind, dann gilt $y(x) = \tilde{y}(x)$ für alle $x \in (a, b) := I \cap J$. Sei

$$c = \sup \{ \tilde{c} \in [x_0, b) \mid y = \tilde{y} \text{ auf } [x_0, \tilde{c}] \}.$$

Nach dem Satz von Picard-Lindelöf existieren solche \tilde{c} (Warum?). Dann gibt es eine Folge $(c_n) \subset (x_0, c)$ so, dass $c_n < c$ – also $y(c_n) = \tilde{y}(c_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ – und $c_n \rightarrow c$. Falls

$c < b$ ist, folgt aus der Stetigkeit von y und \tilde{y} dann $y(c) = \tilde{y}(c)$. Da f im Punkt $(c, y(c))$ eine lokale Lipschitzbedingung erfüllt, existiert $\epsilon > 0$ so, dass das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u' &= f(x, u) \\ u(c) &= y(c) \end{aligned}$$

auf $(c - \epsilon, c + \epsilon)$ eine eindeutige Lösung hat. Da sowohl y , als auch \tilde{y} dieses Anfangswertproblem erfüllen, muss $y = \tilde{y}$ auf $[x_0, c + \epsilon)$ gelten, was jedoch der Definition von c widerspricht. Es muss also $c = b$ und $y = \tilde{y}$ auf $[x_0, b)$ sein. Analog kann man nun mit dem Intervall $(a, x_0]$ verfahren.

Sei nun I_{\max} die Vereinigung aller offenen Intervalle I , die Definitionsbereich einer Lösung des Anfangswertproblems (8.1) sind. Für $x \in I_{\max}$ wähle eine Lösung $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $x \in I$ und setze $y_{\max}(x) := y(x)$. Nach dem ersten Teil des Beweises ist $y(x)$ nicht von der Wahl der Lösung y abhängig, und y_{\max} daher wohldefiniert. Gemäß seiner Definition stimmt y_{\max} in einer Umgebung jedes Punktes x mit einer Lösung des Anfangswertproblems überein und ist daher selbst eine Lösung dieses Anfangswertproblems. Offensichtlich ist y_{\max} eine maximale Lösung. Falls $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine weitere maximale Lösung ist, so gilt nach Konstruktion $I \subset I_{\max}$, nach dem ersten Teil des Beweises $y = y_{\max}$ auf I und schließlich $I = I_{\max}$ aufgrund der Maximalität von y . \square

Beispiel 8.36. (i) Das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y' &= e^{-y} \\ y(1) &= 0 \end{aligned}$$

hat die Lösung $y : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $y(x) = \ln x$ welche nach dem Satz von Picard-Lindelöf eindeutig ist. Sie ist auch maximal, da sie nach rechts offensichtlich nicht fortgesetzt werden kann, und eine hypothetische Fortsetzung nach links in 0 nicht stetig sein könnte.

(ii) Das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y' &= -i \frac{y}{x^2} \\ y\left(\frac{1}{2\pi}\right) &= 1 \end{aligned}$$

hat die Lösung $y : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$, $y(x) = e^{\frac{i}{x}}$. Da die Funktion

$$\begin{aligned} f : (\mathbb{R} \setminus 0) \times \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ (x, y) &\mapsto -\frac{y}{x^2} \end{aligned}$$

stetig differenzierbar ist, ist diese Lösung nach dem Satz von Picard-Lindelöf wiederum eindeutig. Sie ist ebenfalls maximal, da sie dem Rand des Definitionsbereiches von f beliebig nahe kommt.

Im folgenden Satz benutzen wir den Abstand zu einer Menge. Für einen metrischen Raum (X, d) , $x \in X$ und $A \subset X$ ist

$$\text{dist}(x, A) := \inf \{d(x, y) \mid y \in A\}.$$

Satz 8.37. Sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $(x_0, y_0) \in D$. Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und erfülle eine lokale Lipschitzbedingung bezüglich y . Seien $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ so, dass $-\infty \leq a < x_0 < b \leq \infty$ und sei $y : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y) \\ y(x_0) &= y_0. \end{aligned}$$

Dann ist y die maximale Lösung, genau dann wenn eine der Bedingungen

$$(i) \quad b = \infty,$$

$$(ii) \quad \lim_{x \rightarrow b} \|y(x)\| = \infty,$$

$$(iii) \quad \lim_{x \rightarrow b} \text{dist}((x, y(x)), \partial D) = 0$$

und eine der Bedingungen

$$(i) \quad a = -\infty,$$

$$(ii) \quad \lim_{x \rightarrow a} \|y(x)\| = \infty,$$

$$(iii) \quad \lim_{x \rightarrow a} \text{dist}((x, y(x)), \partial D) = 0$$

erfüllt ist.

Ohne Beweis.

8.3 Lineare Systeme

Definition 8.38. Sei I ein offenes Intervall und $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ und $b : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ Funktionen. Dann heißt das Differenzialgleichungssystem

$$y' = A(x)y + b(x)$$

lineares Differenzialgleichungssystem.

Falls b die Nullfunktion ist, so nennen wir das System homogen, anderenfalls inhomogen. Falls $A(x)$ konstant ist, sagen wir, dass das System konstante Koeffizienten hat.

Bemerkung 8.39. (i) Mittels der Substitution in Bemerkung 8.22 können wir die lineare Differenzialgleichung

$$y^{(n)} = a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y + b(x)$$

in das System

$$\begin{aligned} y'_{n-1} &= a_{n-1}(x)y_{n-2} + \dots + a_1(x)y_1 + a_0(x)y + b(x) \\ y_1 &= y' \\ &\vdots \\ y_{n-1} &= y'_{n-2} \end{aligned}$$

überführen, dass von obiger Form ist.

(ii) Seien y und z Lösungen des inhomogenen Systems

$$y' = A(x)y + b(x),$$

dann ist $y - z$ eine Lösung des zugehörigen homogenen Systems

$$y' = A(x)y.$$

Das folgt unmittelbar aus

$$(y - z)'(x) = A(x)y(x) + b(x) - A(x)z(x) - b(x) = A(x)(y - z)(x).$$

Lemma 8.40 (Lemma von Grönwall). Sei I ein Intervall, $x_0 \in I$, $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige, nicht-negative Funktion, $a, b \geq 0$ und es gelte

$$y(x) \leq a + b \left| \int_{x_0}^x y(t) dt \right|. \quad (8.2)$$

Dann gilt $y(x) \leq ae^{b|x-x_0|}$.

Beweis. Wir führen den Beweis für $t \geq t_0$, der andere Fall wird analog behandelt. Sei $\epsilon > 0$ beliebig und setze

$$z(x) := a + \epsilon + b \int_{x_0}^x y(t) dt. \quad (8.3)$$

Dann gilt $z'(x) = by(x) \leq bz(x)$. Da $z(t) \geq a + \epsilon > 0$ ist, erhalten wir

$$\ln z(x) - \ln z(x_0) = \int_{x_0}^x \frac{z'(t)}{z(t)} dt \leq \int_{x_0}^x b dt = b(x - x_0)$$

also dank der Monotonie der Exponentialfunktion $z(x) \leq z(x_0)e^{b(x-x_0)} = (a + \epsilon)e^{b(x-x_0)}$. Dann gilt auch $y(x) \leq z(x) \leq (a + \epsilon)e^{b(x-x_0)}$ und da diese Ungleichung für beliebige $\epsilon > 0$ gilt, folgt die gesuchte Ungleichung. \square

Für den Rest dieses Unterkapitels seien stets I ein offenes Intervall, $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ und $b : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetige Funktionen, $x_0 \in I$ und $y_0 \in \mathbb{R}^n$.

Korollar 8.41. *Des Anfangswertproblem*

$$\begin{aligned} y' &= A(x)y + b(x) \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned}$$

hat eine eindeutige maximale Lösung die auf ganz I definiert ist.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass

$$\begin{aligned} f : I \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (x, y) &\mapsto A(x)y + b(x) \end{aligned}$$

eine lokale Lipschitzbedingung erfüllt. Sei dazu $(x_1, y_1) \in I \times \mathbb{R}^n$. Wähle ein abgeschlossenes Intervall I_1 so, dass $x_1 \in I_1 \subset I$. Dann existiert $L > 0$ so, dass $\|A(x)\| \leq L$ für alle $x \in I_1$ und somit gilt

$$\|f(x, y) - f(x, z)\| = \|A(x)(y - z)\| \leq \|A(x)\| \|y - z\| \leq L \|y - z\|$$

für alle $x \in I_1$ und $y, z \in \mathbb{R}^n$.

Es folgt also aus Satz 8.35 die Existenz und Eindeutigkeit einer maximalen Lösung. Es seien $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ so, dass $y : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ diese maximale Lösung ist. Angenommen b liegt in I (ist also insbesondere endlich). Dann gibt es $M, K > 0$ so, dass $\|A(x)\| \leq M$ und $\|b(x)\| \leq K$ für alle $x \in [x_0, b]$ und es gilt

$$\begin{aligned} \|y(x)\| &= \left\| y_0 + \int_{x_0}^x (A(t)y(t) + b(t)) dt \right\| \\ &\leq \|y_0\| + \int_{x_0}^x \|A(t)\| \|y(t)\| dt + \int_{x_0}^x \|b(t)\| dt \\ &\leq \|y_0\| + K(b - x_0) + M \int_{x_0}^x \|y(t)\| dt. \end{aligned}$$

Aus dem Lemma von Grönwall (für $\|y\|$) folgt dann, dass

$$\|y(x)\| \leq (\|y_0\| + K(b - x_0))e^{M(x-x_0)} \leq (\|y_0\| + K(b - x_0))e^{M(b-x_0)}.$$

Damit kann keiner der Fälle aus Satz 8.37 erfüllt sein, was im Widerspruch zur Annahme steht, dass y die maximale Lösung ist. Analog zeigt man, dass $a \in I$ zu einem Widerspruch führt. Es muss also $a \notin I$ und $b \notin I$ gelten, was $(a, b) = I$ impliziert. \square

Bemerkung 8.42. Man kann zeigen (und auf diese Weise einen alternativen Beweis für obigen Satz angeben), dass die Picard-Iterierten mit Startfunktion $\varphi_0(x) = y_0$ für lineare Differenzialgleichungen auf ganz I konvergieren.

Korollar 8.43. Seien $y, z : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lösungen der Differenzialgleichung $y' = A(x)y + b(x)$, dann sind äquivalent

(i) $y(x) = z(x)$ für alle $x \in I$,

(ii) $y(x_0) = z(x_0)$,

(iii) $y(x) = z(x)$ für ein $x \in I$.

Beweis. Die Implikationen von oben nach unten sind offensichtlich. Sei nun $x_1 \in I$ so, dass $y_1 := y(x_1) = z(x_1)$. Dann sind y und z Lösungen des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} y' &= A(x)y + b(x) \\ y(x_1) &= y_1. \end{aligned}$$

Da dieses Anfangswertproblem eine eindeutige maximale Lösung hat muss gelten $y(x) = z(x)$ für alle $x \in I$. \square

Satz 8.44. Die Lösungsmenge der Differenzialgleichung $y' = A(x)y$, genauer die Menge

$$V := \{y : I \rightarrow \mathbb{R}^n \mid y'(x) = A(x)y(x) \text{ für alle } x \in I\}$$

ist ein n -dimensionaler Untervektorraum von $\mathbf{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$.

Beweis. Man überprüft leicht, dass für zwei Lösungen $y, z : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ auch $y + \lambda z$ eine Lösung der Differenzialgleichung ist.

Sei nun e_1, \dots, e_n eine Basis für \mathbb{R}^n und seien $y_i : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ die eindeutig bestimmten Lösungen der Anfangswertprobleme

$$\begin{aligned} y' &= A(x)y \\ y(x_0) &= e_i \end{aligned}$$

für $i \in \{1, \dots, n\}$. Dann ist y_1, \dots, y_n eine Basis für V .

Denn falls

$$\alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_n y_n = 0$$

ist, so gilt insbesondere

$$\alpha_1 y_1(x_0) + \cdots + \alpha_n y_n(x_0) = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n = 0$$

woraus $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$ folgt, die Funktionen y_1, \dots, y_n sind also linear unabhängig.

Sei nun $z \in V$ und wähle $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ so, dass

$$\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n = z(x_0).$$

Dann sind z und $\alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_n y_n$ maximale Lösungen des Differenzialgleichungssystems die in x_0 übereinstimmen, also folgt aus Korollar 8.43

$$z = \alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_n y_n.$$

Die Funktionen y_1, \dots, y_n spannen den Raum V auf. □

Bemerkung 8.45. (i) Der obige Satz ist die mathematisch exakte Formulierung von „die allgemeine Lösung hängt von n unbestimmten Parametern ab“. Er gilt in dieser Form nur für lineare Differenzialgleichungen.

(ii) Mit Bemerkung 8.39 erhalten wir, dass die Lösungsmenge des inhomogenen Differenzialgleichungssystems $y' = A(x)y + b(x)$ durch $y_i + V$ gegeben ist, wobei y_i eine beliebige Lösung der inhomogenen Gleichung ist.

Definition 8.46. Eine Basis y_1, \dots, y_n des Vektorraumes V aus Satz 8.44 heißt Fundamentalsystem der Differenzialgleichung $y' = A(x)y$.

Nach Bemerkung 8.39 sind lineare Differenzialgleichungen n -ter Ordnung äquivalent zu linearen Differenzialgleichungssystemen erster Ordnung (mit n Gleichungen). Wir werden also auch n linear unabhängige Lösungen der Gleichung

$$y^{(n)} = a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y + b(x)$$

als Fundamentalsystem bezeichnen.

Beispiel 8.47. Betrachte die Differenzialgleichung $y' = \sin(x)y + \sin(x)\cos(x)$. Die zugehörige homogene Differenzialgleichung $y' = \sin(x)y$ hat getrennte Variablen und wir lösen sie wie folgt:

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y} &= \sin(x) \\ \ln y(x) &= \int \frac{y'(t)}{y(t)} dt = -\cos(x) + c \\ y(x) &= K e^{-\cos(x)}. \end{aligned}$$

Man überprüft leicht, dass die erhaltene Funktion für beliebiges $K \in \mathbb{R}$ tatsächlich eine Lösung der homogenen Differenzialgleichung ist. Darüber hinaus stellt die Menge

aller solcher Funktionen offensichtlich einen eindimensionalen Vektorraum dar und damit haben wir bereits alle Lösungen gefunden.

Um nun die inhomogene Gleichung zu lösen verwenden wir das Verfahren der Variation der Konstanten. Falls $y(x) = C(x)e^{-\cos(x)}$ eine Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung ist, so muss gelten

$$y'(x) = C'(x)e^{-\cos(x)} + C(x)\sin(x)e^{-\cos(x)} = \sin(x)C(x)e^{-\cos(x)} + \sin(x)\cos(x)$$

Es gilt also

$$\begin{aligned} C'(x) &= \sin(x)\cos(x)e^{\cos(x)} \\ C(x) &= (1 - \cos(x))e^{\cos(x)}. \end{aligned}$$

Es genügt eine Lösung der inhomogenen Gleichung zu finden (Bemerkung 8.39).

Bei dem Verfahren „Variation der Konstanten“ handelt es sich wiederum um ein Substitutionsverfahren.

Das im Beispiel illustrierte Verfahren kann zur Lösung beliebiger inhomogener Differenzialgleichungssysteme benutzt werden, vorausgesetzt man kennt bereits ein Fundamentalsystem des zugehörigen homogenen Systems.

Satz 8.48. Sei y_1, \dots, y_n ein Fundamentalsystem der Differenzialgleichung $y' = A(x)y$. Definiere die $n \times n$ -Matrix $W(x) := (y_1(x), \dots, y_n(x))$ (in dieser Fundamentalmatrix stehen die Lösungen des homogenen Systems in den Spalten). Dann ist $W(x)$ für alle $x \in I$ invertierbar und $z : I \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$z(x) := W(x) \int_{x_0}^x W(t)^{-1}b(t)dt$$

ist eine Lösung des inhomogenen Differenzialgleichungssystems.

Beweis. Nach Voraussetzung sind die Funktionen y_1, \dots, y_n linear unabhängig. Für $x \in I$ sind dann auch $y_1(x), \dots, y_n(x)$ linear unabhängig, denn falls

$$\alpha_1 y_1(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) = 0$$

ist für ein $x \in I$, dann muss nach Korollar 8.43

$$\alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_n y_n = 0$$

gelten, was lediglich für $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ möglich ist. Damit ist die Matrix $W(x)$ für jedes x invertierbar.

Auf Grund der Definition von W gilt $W'(x) = A(x)W(x)$ (die i -te Spalte dieser Matrixgleichung lautet $y_i'(x) = A(x)y_i(x)$) und wir erhalten

$$z'(x) = W'(x) \int_{x_0}^x W(t)^{-1}b(t)dt + W(x)W(x)^{-1}b(x) = A(x)z(x) + b(x).$$

Für die Anwendung des Hauptsatzes wie oben (und um sicherzustellen, dass z überhaupt wohldefiniert ist) muss der Integrand stetig sein. Man kann zeigen, dass die Abbildung $A \mapsto A^{-1}$ definiert auf der Menge der invertierbaren Matrizen stetig ist (siehe z.B. Übungsblatt 8 aus dem vergangenen Semester). \square

Der vorhergehende Satz sagt aus, dass wir stets eine Lösung der inhomogenen Gleichung von der Form $W(x)C(x)$ ($C : I \rightarrow \mathbb{R}^n$) finden können. Er liefert auch einen expliziten Ausdruck für C , in der Praxis ist es jedoch häufig einfacher im Differenzialgleichungssystem $y = WC$ zu substituieren und das daraus resultierende Gleichungssystem zu lösen wie im folgenden Beispiel illustriert.

Beispiel 8.49. Betrachte das System

$$\begin{aligned}u' &= v + \sin(x) \\v' &= -u + \cos(x)\end{aligned}$$

Man überzeugt sich leicht, dass

$$y_1(x) := \begin{pmatrix} \sin(x) \\ \cos(x) \end{pmatrix} \text{ und } y_2 = \begin{pmatrix} \cos(x) \\ -\sin(x) \end{pmatrix}$$

linear unabhängige Lösungen des zugehörigen homogenen Systems

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

sind. Um eine Lösung des inhomogenen Systems zu finden machen wir den Ansatz

$$z(x) := C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) = \begin{pmatrix} \sin(x) & \cos(x) \\ \cos(x) & -\sin(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1(x) \\ C_2(x) \end{pmatrix}.$$

Die Koeffizientenmatrix ist dabei die Matrix W aus dem vorhergehenden Satz. Soll z eine Lösung sein, so muss gelten

$$\begin{aligned}z'(x) &= C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) + C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x) \\ &= C_1(x)A(x)y_1(x) + C_2(x)A(x)y_2(x) + b(x),\end{aligned}$$

Um nun C_1' und C_2' zu erhalten muss also das Gleichungssystem

$$C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = b(x)$$

gelöst werden, konkret

$$\begin{aligned}C_1'(x) \sin(x) + C_2'(x) \cos(x) &= \sin(x) \\ C_1'(x) \cos(x) - C_2'(x) \sin(x) &= \cos(x).\end{aligned}$$

Löst man das lineare Gleichungssystem (zum Beispiel mit dem Gaußverfahren) erhält man

$$\begin{aligned}C_1'(x) &= C_1'(x)(\sin^2(x) + \cos^2(x)) = \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \\ C_2'(x) &= C_2'(x)(\cos^2(x) + \sin^2(x)) = \sin(x) \cos(x) - \cos(x) \sin(x) = 0\end{aligned}$$

und damit $C_1(x) = x$ und $C_2(x) = 0$. Die Lösung der homogenen Gleichung ist also

$$y_h(x) = \begin{pmatrix} x \sin(x) \\ x \cos(x) \end{pmatrix}$$

Wir wenden uns nun Systemen mit konstanten Koeffizienten zu, wollen also $y' = Ay$ lösen für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Wir werden sehen, dass die „naive“ Verallgemeinerung der Lösung e^{Ax} für $n = 1$ zum Erfolg führt.

Die folgenden Aussagen gelten sinngemäß auch für $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, wir werden sie hier jedoch nur für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ausformulieren.

Bemerkung 8.50. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und betrachte die Funktion

$$e^{Ax} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k x^k. \quad (8.4)$$

Wir wissen, dass für die Konvergenz der Reihe auf der rechten Seite, ihre absolute Konvergenz hinreichend ist. Da

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{1}{k!} A^k x^k \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \|A\|^k |x|^k = e^{\|A\||x|}$$

gilt, ist e^{Ax} also für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert.

Konvergenz in $\mathbb{R}^{n \times n}$ entspricht der koordinatenweisen Konvergenz, das heißt die Koordinatenfunktionen der Reihe (8.4) sind Potenzreihen mit Konvergenzradius ∞ . Wir können also den Satz über Differenzierbarkeit von Potenzreihen (Satz 6.34) koordinatenweise anwenden und erhalten

$$\frac{d}{dx} e^{Ax} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k k x^{k-1} = A e^{Ax}.$$

Satz 8.51. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Das Anfangswertproblem mit konstanten Koeffizienten

$$\begin{aligned} y' &= Ay \\ y(x_0) &= y_0. \end{aligned}$$

wird genau von $y(x) = e^{A(x-x_0)} y_0$ gelöst.

Beweis. Das folgt unmittelbar aus der vorhergehenden Bemerkung. \square

Bemerkung 8.52. (i) Mit dem vorhergehenden Satz ist das Lösen der Differenzialgleichung auf das Berechnen der Matrixexponentialfunktion zurückgeführt. Letztere Aufgabe läßt sich algorithmisch gut lösen wie wir bald sehen werden.

(ii) Da die Matrixmultiplikation nicht kommutative ist gilt im Allgemeinen *nicht*

$$\frac{d}{dx} e^{A(x)} = A'(x) e^{A(x)},$$

ebensowenig wie $e^{A+B} = e^A e^B$.

(iii) Ein Fall, in dem wir $e^{Ax}v$ einfach ausrechnen können, ist der, dass v ein Eigenvektor der Matrix A ist, es also ein skalares λ gibt, so dass $Av = \lambda v$ gilt. Dann folgt

$$e^{Ax}v = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k x^k \right) v = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k A^k v = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k \lambda^k v = e^{\lambda x} v.$$

Beispiel 8.53. Wir suchen Lösungen für das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y' &= z \\ z' &= y \\ y(0) &= 1 \\ z(0) &= 0. \end{aligned}$$

Wir müssen also $e^{Ax}y_0$ bestimmen für

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

In diesem Falle kommt uns zu Gute, dass die Matrix A diagonalisierbar ist. Sie hat die Eigenwerte 1 und -1 und die zugehörigen Eigenvektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Mit der obigen Bemerkung erhalten wir dann

$$e^{Ax}y_0 = e^{Ax} \frac{1}{2}(v_1 + v_2) = \frac{1}{2}(e^x v_1 + e^{-x} v_2),$$

also die Lösung $y(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ und $z(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.

Bemerkung 8.54. Häufig wird das oben illustrierte Verfahren etwas anders formuliert: Um das lineare Differentialgleichungssystem $y' = Ay$ zu lösen, macht man den Ansatz $y = Ce^{\lambda x}v$. Diese Funktion ist genau dann eine Lösung, wenn gilt

$$\lambda e^{\lambda x} v = e^{\lambda x} Av$$

also genau dann wenn λ ein Eigenwert von A ist und v der zugehörige Eigenvektor.

Für allgemeine A sind nicht alle Lösungen von der angesetzten Form und wir werden auf diese Weise kein Fundamentalsystem erhalten. Wir können jedoch auf diese Weise ein Anfangswertproblem lösen, dessen Anfangsvektor y_0 sich als Linearkombination von Eigenvektoren von A schreiben läßt.

Insbesondere führt das Verfahren beziehungsweise der obige Ansatz stets zum Erfolg wenn A diagonalisierbar ist.

Satz 8.55. Sei $A \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ eine diagonalisierbare Matrix, v_1, \dots, v_n eine Basis aus Eigenvektoren und $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die zugehörigen Eigenwerte. Dann bilden die Funktionen $y_i(x) = e^{\lambda_i x} v_i$ für $i \in \{1, \dots, n\}$ ein Fundamentalsystem für das Differenzialgleichungssystem $y' = Ay$.

Beweis. Für beliebiges $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt $e^{Ax}v_i = e^{\lambda_i x}v_i$, die Funktionen sind also tatsächlich Lösungen des Differenzialgleichungssystems. Im Punkt $x = 0$ sind die Funktionswerte $y_1(0) = v_1, \dots, y_n(0) = v_n$ linear unabhängig und damit auch die Funktionen y_1, \dots, y_n (Übungsaufgabe 1 vom Blatt 4). \square

Bemerkung 8.56. (i) Im obigen Fall ist das Lösen der Differenzialgleichung also auf die Lösung des Eigenwertproblems $Av = \lambda v$ zurückgeführt, wofür wir bereits Methoden kennen.

- (ii) Ein interessanter Spezialfall ergibt sich, wenn $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nicht im reellen, aber im komplexen diagonalisierbar ist (also echt komplexe Eigenwerte besitzt). In diesem Fall können wir dennoch reellwertige Lösungen aus den (zunächst komplexwertigen) Lösungen $Ce^{\lambda x}v$ zusammensetzen. Konkret sind für einen (komplexen) Eigenwert $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$ und den zugehörigen Eigenvektor $v = v_r + iv_i$ ($\lambda_r, \lambda_i \in \mathbb{R}$ und $v_r, v_i \in \mathbb{R}^n$)

$$e^{\lambda_r x}(v_r \sin(\lambda_i x) + v_i \cos(\lambda_i x)) \text{ und } e^{\lambda_r x}(v_r \cos(\lambda_i x) - v_i \sin(\lambda_i x))$$

linear unabhängige reellwertige Lösungen des Differenzialgleichungssystems (Übung).

Will man lediglich ein Anfangswertproblem lösen, so kann man diesen Schritt auslassen. Man startet dann wieder mit dem Ansatz $y = Ce^{\lambda x}v$ und erhält eine allgemeine Lösung von der Form

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} v_1 + \dots + C_n e^{\lambda_n x} v_n.$$

Bestimmt man nun die (komplexen) Konstanten C_1, \dots, C_n aus der Anfangsbedingung

$$y_0 = C_1 v_1 + \dots + C_n v_n$$

so erhält man automatisch eine reellwertige Lösungsfunktion (vorausgesetzt natürlich A und y_0 sind reellwertig).

- (iii) Falls A nicht diagonalisierbar ist, so ist es dennoch möglich e^{At} effektiv zu berechnen. Man bringt dafür die Matrix auf Jordansche Normalform. In jedem Fall kann ein homogenes System linearer Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten mit Methoden der linearen Algebra vollständig gelöst werden.

Beispiel 8.57. Betrachte das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y' &= z \\ z' &= -y \\ y(0) &= 1 \\ z(0) &= 0. \end{aligned}$$

Die zugehörige Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (8.5)$$

ist im Reellen nicht diagonalisierbar, sie besitzt jedoch im Komplexen die Eigenwerte i und $-i$ mit den zugehörigen Eigenvektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1+i \\ -1+i \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1-i \\ -1-i \end{pmatrix}.$$

Soll die allgemeine (komplexe) Lösung $c_1 e^{ix} v_1 + c_2 e^{-ix} v_2$ die Anfangsbedingungen erfüllen, so muss gelten

$$\begin{aligned} (1+i)c_1 + (1-i)c_2 &= 1 \\ (-1+i)c_1 + (-1-i)c_2 &= 0, \end{aligned}$$

also $c_1 = \frac{1}{4}(1-i)$ und $c_2 = \frac{1}{4}(1+i)$.

Damit ergibt sich als Lösung

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{4}(1-i)e^{ix}(1+i) + \frac{1}{4}(1+i)e^{-ix}(1-i) = \frac{1}{2}e^{ix} + \frac{1}{2}e^{-ix} = \cos(x) \\ z(x) &= \frac{1}{4}(1-i)e^{ix}(-1+i) + \frac{1}{4}(1+i)e^{-ix}(-1-i) = \frac{i}{2}e^{ix} - \frac{i}{2}e^{-ix} = -\sin(x). \end{aligned}$$

Als wichtigen Spezialfall wollen wir zuletzt noch lineare Differenzialgleichungen höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten behandeln.

Satz 8.58. Seien $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ die Nullstellen des Polynoms

$$a_0 + a_1 \lambda + \dots + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \lambda^n$$

und ν_1, \dots, ν_k die zugehörigen Vielfachheiten. Dann bilden die Funktionen $x \mapsto x^l e^{\lambda_i x}$ mit $i \in \{1, \dots, k\}$ und $l \in \{0, \dots, \nu_i - 1\}$ ein Fundamentalsystem für die Differenzialgleichung

$$a_0 y + a_1 y' + \dots + a_{n-1} y^{(n-1)} + y^{(n)} = 0.$$

Ohne Beweis.

e

9 Integration über Untermannigfaltigkeiten

9.1 Kurvenintegrale

Definition 9.1. Sei I ein Intervall und $n \in \mathbb{N}$. Eine parametrisierte Kurve (manchmal auch Weg) im \mathbb{R}^n ist eine stetige Abbildung $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$. Eine parametrisierte Kurve heißt regulär, wenn sie stetig differenzierbar ist und für alle $t \in I$ gilt $\gamma'(t) \neq 0$. Sie heißt stückweise regulär wenn es eine disjunkte Zerlegung

$$I = I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_k$$

in Teilintervalle I_1, \dots, I_k gibt, so dass γ auf jedem Teilintervall regulär ist.

Eine Kurve ist eine Teilmenge des \mathbb{R}^n die Bild einer parametrisierten Kurve ist. Ist C eine Kurve dann nennen wir $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Parametrisierung von C , wenn γ auf dem Inneren von I injektiv ist und wenn $\gamma(I) = C$ gilt.

Wir nehmen hier Kurven und parametrisierte Kurven stets als stückweise regulär an, werden das also nicht jedes mal explizit erwähnen.

Beispiel 9.2. (i) Seien $\alpha, \kappa > 0$. Dann ist die Schraubenlinie

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto (\cos(\alpha t), \sin(\alpha t), \kappa t) \end{aligned}$$

eine reguläre parametrisierte Kurve.

(ii) Der Einheitskreis $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ ist eine Kurve. Eine Parametrisierung wird durch die Abbildung

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (\cos(t), \sin(t)). \end{aligned}$$

gegeben.

Die Parametrisierung ist keinesfalls eindeutig. Weitere Möglichkeiten sind beispielsweise

$$\begin{aligned} \rho : [0, \pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (\cos(2t), \sin(2t)) \\ \xi : [-\infty, \ln(2\pi)] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (\cos(e^t), \sin(e^t)). \end{aligned}$$

(iii) Das Rechteck $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{|x|, |y|\}\}$ ist eine (stückweise reguläre) Kurve. Gib als Übung eine Parametrisierung an.

Wir wollen nun untersuchen, wie man eine entlang einer Kurve definierte Funktion über diese Kurve integrieren kann. Die Kurve könnte dabei beispielsweise einen dünnen Draht repräsentieren und die Funktion eine Ladungsdichte, die zur Gesamtladung aufintegriert werden soll.

Bemerkung 9.3. Sei $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ regulär und $f : \gamma(I) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Seien $a, b \in \overset{\circ}{I}$ und $a < b$. Eine Zerlegung Z ist gegeben durch Punkte $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$. Wir nennen die t_i Stützstellen. Die Feinheit einer Zerlegung sei

$$m(Z) = \max_{0 \leq i < n} (t_{i+1} - t_i).$$

Setze

$$I(Z) := \sum_{i=0}^{n-1} f(\gamma(t_i)) \|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\| = \int_{[a,b]} \sum_{i=0}^{n-1} f(\gamma(t_i)) \left\| \frac{\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)}{t_{i+1} - t_i} \right\| \mathbb{1}_{[t_i, t_{i+1})}(t) dt.$$

Bezeichne den Integranden im letzten Ausdruck mit g_Z . Mit dem verallgemeinerten Mittelwertsatz kann man abschätzen

$$|g_Z(t)| \leq \max_{t \in [a,b]} |f(\gamma(t))| \max_{t \in [a,b]} \|\gamma'(t)\| < \infty. \quad (9.1)$$

Sei nun (Z_j) eine Folge von Zerlegungen mit $m(Z_j) \rightarrow 0$ und t sei nicht Stützstelle einer Zerlegung Z_j . Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Folge von Stützstellen t_{j,i_j} , so dass $t \in [t_{j,i_j}, t_{j,i_j+1})$. Es gilt $\lim_{j \rightarrow \infty} t_{j,i_j} = t = \lim_{j \rightarrow \infty} t_{j,i_j+1}$ und damit wegen der Stetigkeit von f und der Differenzierbarkeit von γ

$$\lim_{j \rightarrow \infty} g_{Z_j}(t) = f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\|.$$

Da die Menge aller Stützstellen abzählbar, also eine Nullmenge ist, gilt $\lim_{j \rightarrow \infty} g_{Z_j} = f \|\gamma'\|$ fast überall und wegen (9.1) sind die Funktionen g_{Z_j} integrierbar beschränkt. Dann folgt aus dem Satz von Lebesgue

$$\lim_{j \rightarrow \infty} I(Z_j) = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt.$$

Die Approximationen $I(Z_j)$ konvergieren also.

Insbesondere erhalten wir eine Formel für die Bogenlänge der Kurve wenn wir für f die Einsfunktion einsetzen.

Definition 9.4 (Kurvenintegrale, Bogenlänge). Sei I ein Intervall und $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine parametrisierte Kurve. Sei $f : \gamma(I) \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $E : \gamma(I) \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld. Dann heißt

$$\int_{\gamma} f ds := \int_I f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt$$

das skalare Kurvenintegral (Kurvenintegral 1. Art) von f entlang γ und

$$\int_{\gamma} \langle E | ds \rangle := \int_I \langle E(\gamma(t)) | \gamma'(t) \rangle dt$$

das vektorielle Kurvenintegral (Kurvenintegral 2. Art) von E entlang γ .

Die Funktion f beziehungsweise das Vektorfeld E heißen integrierbar über γ wenn das entsprechende Integral existiert.

Das Integral

$$\int_{\gamma} ds$$

heißt die Bogenlänge von γ und eine Kurve heißt rektifizierbar wenn diese Bogenlänge endlich ist.

Beispiel 9.5. Wir berechnen den Umfang des Einheitskreises. Wir wählen dazu die Parametrisierung

$$\begin{aligned}\gamma &: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (\cos(t), \sin(t))\end{aligned}$$

und berechnen

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= (-\sin(t), \cos(t)) \\ \|\gamma'(t)\| &= 1\end{aligned}$$

und damit

$$\int_{\gamma} ds = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

Bemerkung 9.6. (i) Falls γ nur stückweise regulär ist, dann ist der Integrand eventuell nicht in allen Punkten von I definiert. Wir wissen jedoch bereits, dass das für das Integral kein Problem darstellt, da es sich lediglich um endlich viele Punkte handelt.

(ii) Die wichtigste Eigenschaft der Kurvenintegrale ist die Unabhängigkeit von der Parametrisierung. Das heißt, falls C eine Kurve ist und $\gamma : I \rightarrow C$ und $\rho : J \rightarrow C$ zwei Parametrisierungen von C . Dann gilt

$$\int_{\gamma} f ds = \int_{\rho} f ds.$$

Wir beweisen diese Aussage hier nur zum Teil.

- (iii) Die Definition beider Arten von Kurvenintegralen hängt vom Skalarprodukt ab. Das wird wichtig, wenn man Kurvenintegrale in nichteuklidischen Geometrien betrachtet zum Beispiel in der Relativitätstheorie.
- (iv) Die Definition des vektoriiellen Kurvenintegrals kann ähnlich wie in Bemerkung 9.3 motiviert werden.
- (v) Nicht rektifizierbare Kurven (Kurven mit unendlicher Bogenlänge) sind selbst mit endlichem Parameterintervall möglich.

(vi) Beide Arten von Kurvenintegralen sind Spezialfälle des Integrals von sogenannten 1-Formen über Kurven.

Satz 9.7. Sei $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine parametrisierte Kurve, $\theta : J \rightarrow I$ ein Diffeomorphismus (dass heißt hier θ ist stetig differenzierbar und $\theta' \neq 0$) und $f : \gamma(I) \rightarrow \mathbb{R}$ dann gilt

$$\int_{\gamma} f ds = \int_{\gamma \circ \theta} f ds.$$

Dabei existiert das Integral auf der einen Seite genau dann, wenn das auf der anderen Seite existiert.

Beweis. Da die Endpunkte für die Integrale unerheblich sind können wir I und J als offen annehmen. Darüber hinaus können wir annehmen, dass γ (und damit $\gamma \circ \theta$) regulär sind (Warum?).

Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_{\gamma \circ \theta} f ds &= \int_J f(\gamma \circ \theta(t)) \|(\gamma \circ \theta)'(t)\| dt = \int_J f(\gamma(\theta(t))) \|\gamma'(\theta(t))\| |\theta'(t)| dt \\ &= \int_I f(\gamma(\tau)) \|\gamma'(\tau)\| d\tau = \int_{\gamma} f ds \end{aligned}$$

wobei wir für die vorletzte Umformung die Transformationsformel beziehungsweise – für hinreichend gute f – die Substitutionsregel verwendet haben. \square

Bemerkung 9.8. (i) Unter zusätzlichen Voraussetzungen kann man zeigen, dass es für zwei Parametrisierungen $\gamma : I \rightarrow C$ und $\rho : J \rightarrow C$ einer regulären Kurve C stets einen Diffeomorphismus $\theta : J \rightarrow I$ gibt, so dass $\rho = \gamma \circ \theta$ gilt. Damit ist das Kurvenintegral erster Art also tatsächlich unabhängig von der Parametrisierung und wir werden für das Integral über eine Kurve C daher auch

$$\int_C f ds$$

schreiben.

(ii) Auch das Kurvenintegral zweiter Art ist – mit ähnlichem Beweis – von der Parametrisierung unabhängig, unter der Voraussetzung dass die beiden Parametrisierungen die Kurve in der selben Richtung durchlaufen. Das ist genau dann der Fall, wenn der Diffeomorphismus θ positive Ableitung hat. Man sagt dann auch, dass θ Orientierungserhaltend ist.

Falls θ die Orientierung umkehrt ($\theta < 0$), dann wechselt das Integral das Vorzeichen.

Beispiel 9.9. Ist $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ die Bahnkurve eines Massenpunktes und $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein zeitunabhängiges Kraftfeld, dann erhält man die am Massenpunkt verrichtete Arbeit als

$$\int_{\gamma} \langle F | ds \rangle.$$

Die Unabhängigkeit des Integrals von der Parametrisierung bedeutet in diesem Fall, dass die Arbeit nicht davon abhängt mit welcher Geschwindigkeit die Bahnkurve durchlaufen wird (wohl aber von der Richtung).

Bemerkung 9.10. (i) Das Kurvenintegral ist linear in f beziehungsweise in E , es gilt also beispielsweise für jedes $f, g : \gamma(I) \rightarrow \mathbb{R}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\int_{\gamma} (f + \lambda g) ds = \int_{\gamma} f ds + \lambda \int_{\gamma} g ds,$$

vorausgesetzt die entsprechenden Integrale sind definiert.

- (ii) Wir können jede parametrisierte Kurve über einem kompakten Intervall so reparametrisieren, dass ihr Definitionsbereich $[0, 1]$ ist (Wie?).
- (iii) Für parametrisierte Kurven $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $\rho : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ die $\gamma(1) = \rho(0)$ erfüllen können wir definieren

$$\begin{aligned} \gamma^{-1} : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto \gamma(1 - t) \\ \gamma\rho : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto \begin{cases} \gamma(2t) & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \rho(2t - 1) & t \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_{\gamma^{-1}} f ds &= \int_{\gamma} f ds & \int_{\gamma\rho} f ds &= \int_{\gamma} f ds + \int_{\rho} f ds \\ \int_{\gamma^{-1}} \langle E | ds \rangle &= - \int_{\gamma} \langle E | ds \rangle & \int_{\gamma\rho} \langle E | ds \rangle &= \int_{\gamma} \langle E | ds \rangle + \int_{\rho} \langle E | ds \rangle. \end{aligned}$$

Definition 9.11. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann definieren wir das auf U definierte Vektorfeld

$$\text{grad } f = (\partial_1 f, \partial_2 f, \dots, \partial_n f).$$

Wir nennen ein Vektorfeld $E : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ konservativ, wenn es eine Funktion $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ gibt so, dass $E = \text{grad } g$. In diesem Falle heißt g ein Potential für E .

Bemerkung 9.12. (i) Viele in der Physik wichtige Kraftfelder sind konservativ, so zum Beispiel das Gravitationsfeld (in der nichtrelativistischen Theorie). In diesem Fall wird häufig eine andere Vorzeichenkonvention für das Potential verwendet also $E = -\text{grad } g$.

- (ii) Die Differentialgleichung $p(x, y) + q(x, y)y'$ ist exakt genau dann wenn das Vektorfeld (p, q) konservativ ist.

- (iii) Falls E konservativ und stetig differenzierbar ist gilt $\partial_i E_j = \partial_j E_i$ für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Diese vergleichsweise einfach zu überprüfende Bedingung ist jedoch im Allgemeinen nicht hinreichend.
- (iv) Ist g ein Potential für E (auf einem zusammenhängenden Gebiet), dann sind genau die Funktionen $g + c$ für $c \in \mathbb{R}$ weitere Potentiale (Warum?).
- (v) Falls E konservativ ist, g ein Potential und $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Kurve, dann folgt aus der Kettenregel

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma} \langle E | ds \rangle &= \int_a^b \langle E(\gamma(t)) | \gamma'(t) \rangle dt \\
 &= \int_a^b (\partial_1 g(\gamma(t)) \gamma'_1(t) + \dots + \partial_n g(\gamma(t)) \gamma'_n(t)) dt \\
 &= \int_a^b (g \circ \gamma)'(t) dt = g(\gamma(b)) - g(\gamma(a)). \tag{9.2}
 \end{aligned}$$

Die vektoriellen Kurvenintegrale über konservative Vektorfelder können also direkt aus der Potentialfunktion bestimmt werden und hängen nicht von der Kurve sondern lediglich von deren Endpunkten ab. Insbesondere verschwindet das Kurvenintegral entlang geschlossener Kurven.

- (vi) Ist E ein Kraftfeld, dann läßt sich $\int_{\gamma} \langle E | ds \rangle$ als die Arbeit interpretieren, die an einem sich entlang γ bewegenden Teilchen verrichtet wird. Ist E konservativ (und nur dann) hängt diese Arbeit lediglich von Anfangs- und Endpunkt der Bewegung ab und wir können das Potential von E als potentielle Energie interpretieren.
- (vii) Aus der Formel (9.2) ist auch ersichtlich wie man ein Potential zu einem konservativen Vektorfeld bestimmen kann. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und wegzusammenhängend (das heißt je zwei Punkte von U lassen sich durch eine Kurve verbinden) und $E : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein konservatives Kraftfeld. Wähle einen Punkt $x_0 \in U$ aus. Für $x \in U$ sei nun γ_x eine beliebige parametrisierte Kurve von x_0 bis x , dann ist

$$x \mapsto \int_{\gamma_x} \langle E | ds \rangle$$

ein Potential denn falls g ein beliebiges Potential ist gilt für alle $x \in U$

$$\int_{\gamma_x} \langle E | ds \rangle = g(x) - g(x_0).$$

Beispiel 9.13. (i) Das Vektorfeld

$$\begin{aligned}
 E : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\
 x &\mapsto -\frac{x}{\|x\|^3}
 \end{aligned}$$

ist konservativ und

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{\|x\|}\end{aligned}$$

ist ein Potential (als Übung nachrechnen).

(ii) Das Vektorfeld

$$\begin{aligned}E : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)\end{aligned}$$

erfüllt

$$\partial_1 E_2 = \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \partial_2 E_1$$

also die notwendige Bedingung für konservative Vektorfelder.

Wir berechnen nun das vektorielle Kurvenintegral von E entlang des Einheitskreises

$$\begin{aligned}\gamma : [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (\cos(t), \sin(t)).\end{aligned}$$

Entlang des Kreises gilt

$$E(\gamma(t)) = (-\sin(t), \cos(t)) = \gamma'(t)$$

und damit

$$\int_{\gamma} \langle E | ds \rangle = \int_0^{2\pi} \|(-\sin t, \cos(t))\|^2 dt = 2\pi.$$

Das Vektorfeld ist also nicht konservativ.

(iii) Wir betrachten nochmals Beispiel 8.18 also die exakte Differentialgleichung

$$2x + y^2 + 2xyy' = 0.$$

Wir suchen eine Potentialfunktion für die Gleichung beziehungsweise für das Vektorfeld $(x, y) \mapsto E(x, y) := (2x + y^2, 2xy)$. Diese Potentialfunktion können wir nun auch mittels Kurvenintegralen bestimmen. Wir wählen dafür den Punkt $x_0 = (0, 0)$ und verbinden die Punkte x_0 und (ξ, η) mit der Geraden

$$\begin{aligned}\gamma_{(\xi, \eta)} : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (\xi t, \eta t).\end{aligned}$$

Es gilt $\gamma'(t) = (\xi, \eta)$ und wir bestimmen eine Potentialfunktion mittels

$$(\xi, \eta) \mapsto \int_{\gamma(\xi, \eta)} \langle E | ds \rangle = \int_0^1 (2t\xi^2 + \eta^2 t^2 \xi + 2\xi\eta t^2 \eta) dt = \xi^2 + \eta^2 \xi.$$

Man beachte dass hier der Punkt x_0 und die Kurve $\gamma_{(x,y)}$ frei gewählt werden können. Häufig kann man diese Freiheit nutzen, um den Rechenaufwand zu reduzieren.

Satz 9.14. *Sei U offen. Ein stetiges Vektorfeld $E : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist genau dann konservativ, wenn für alle geschlossenen Kurven $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$ gilt*

$$\int_{\gamma} \langle E | ds \rangle = 0.$$

Beweis. Wir haben bereits gesehen, dass für konservative Vektorfelder die Integrale über geschlossene Wege verschwinden. Wir zeigen nun, dass Kurvenintegrale über E lediglich von den Endpunkten des Weges abhängen. Seien dazu $\gamma, \rho : [0, 1] \rightarrow U$ zwei parametrisierte Kurven mit $\gamma(0) = \rho(0)$ und $\gamma(1) = \rho(1)$. Dann ist die Kurve $\gamma\rho^{-1}$ eine geschlossene Kurve und nach Voraussetzung gilt

$$0 = \int_{\gamma\rho^{-1}} \langle E | ds \rangle = \int_{\gamma} \langle E | ds \rangle - \int_{\rho} \langle E | ds \rangle.$$

Wir nehmen nun an, dass U wegzusammenhängend ist. Falls das nicht der Fall ist, führen wir den unten beschriebenen Beweis für jede Zusammenhangskomponente separat durch. Wir wählen $x_0 \in U$ fest und definieren die Funktion $g : U \rightarrow \mathbb{R}$

$$g(x) = \int_{x_0}^x \langle E | ds \rangle.$$

Diese Notation soll bedeuten, dass wir entlang einer beliebigen Kurve von x_0 nach x integrieren, denn das Ergebnis wird davon nicht abhängen. Wir wollen zeigen, dass g ein Potential für E ist. Zunächst zeigen wir dazu, dass alle Richtungsableitungen von g in jedem Punkt existieren. Sei also $x \in U$ und $h \in \mathbb{R}^n$, dann gilt für a klein genug (Was bedeutet das genau?)

$$g(x + ah) - g(x) = \int_{x_0}^{x+ah} \langle E | ds \rangle - \int_{x_0}^x \langle E | ds \rangle = \int_x^{x+ah} \langle E | ds \rangle = \int_0^a \langle E(x + th) | h \rangle dt.$$

Dabei haben wir als Integrationsweg zwischen x und $x + ah$ die Gerade $t \mapsto x + th$ verwendet.

Nach dem Mittelwertsatz existiert dann ξ_a zwischen 0 und a so, dass

$$g(x + ah) - g(x) = \langle E(x + \xi_a h) | h \rangle a.$$

Damit erhalten wir für die Richtungsableitung da E stetig ist

$$\partial_h g(x) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{g(x + ah) - g(x)}{a} = \langle E(x) | h \rangle.$$

Daraus ist erstens ersichtlich, dass alle Richtungsableitungen (und damit insbesondere die partiellen) Ableitungen stetig sind. Die Funktion g ist also nach Satz 6.10 stetig differenzierbar. Für die partiellen Ableitungen erhalten wir – indem wir e_i für h – einsetzen $\partial_i g(x) = E_i(x)$, g ist also tatsächlich ein Potential. \square

9.2 Oberflächenintegrale

Die Theorie der Flächenintegrale können wir aus Gründen die wir hier nur andeuten können lediglich im \mathbb{R}^3 behandeln. Zunächst müssen zu (stückweise regulären) Kurven analoge zweidimensionale Objekte definiert werden.

Definition 9.15. Sei $V \subset \mathbb{R}^2$ offen. Eine Abbildung $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ heißt parametrisiertes Flächenstück wenn sie stetig differenzierbar ist und die Vektoren $\partial_1\varphi(t)$ und $\partial_2\varphi(t)$ für alle $t \in V$ linear unabhängig sind.

Eine Teilmenge $S \subset \mathbb{R}^3$ heißt reguläre Fläche, wenn es offene Teilmengen $U_1, \dots, U_n \subset \mathbb{R}^3$, V_1, \dots, V_n und Abbildungen

$$\varphi_i : V_i \rightarrow U_i \cap S \quad i \in \{1, \dots, n\}$$

gibt so, dass die φ_i parametrisierte Flächenstücke sind, bijektiv sind und φ_i^{-1} stetig sind. Eine reguläre Fläche heißt auch (im \mathbb{R}^3) eingebettete zweidimensionale Mannigfaltigkeit. Die Abbildungen φ_i heißen dann Karten und die Sammlung $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ ein Atlas für S .

Eine Teilmenge $S \subset \mathbb{R}^3$ heißt stückweise reguläre Fläche, wenn es parametrisierte Flächenstücke $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, parametrisierte Kurven $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ und Punkte p_1, \dots, p_n gibt, so dass S als disjunkte Vereinigung

$$\varphi_1(V_1) \cup \dots \cup \varphi_n(V_n) \cup \gamma_1(I_1) \cup \dots \cup \gamma_k(I_k) \cup \{p_1, \dots, p_n\}$$

geschrieben werden kann.

Beispiel 9.16. (i) Die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi : (0, \infty) \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (s, t) &\mapsto (s \cos(t), s \sin(t), t) \end{aligned}$$

ist ein parametrisiertes Flächenstück.

(ii) Die Sphäre $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ ist eine reguläre Fläche. Eine Karte ist beispielsweise durch die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi_1 : (0, 2\pi) \times (0, \pi) &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (s, t) &\mapsto (\sin(t) \cos(s), \sin(t) \sin(s), \cos(t)) \end{aligned}$$

gegeben, diese Karte überdeckt jedoch nicht die gesamte Sphäre. Man suche als Übung eine weitere Karte, die den Rest der Sphäre abdeckt.

Tatsächlich ist es nicht möglich die Sphäre mit lediglich einer Karte zu überdecken.

(iii) Der Einheitswürfel

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \max\{|x|, |y|, |z|\} = 1\}$$

ist eine stückweise reguläre Fläche

Bemerkung 9.17. (i) Die Forderung nach linearer Unabhängigkeit drückt aus, dass die Menge $\varphi(V)$ in jedem Punkt $\varphi(t)$ eine zweidimensionale (von $\partial_1\varphi(t)$ und $\partial_2\varphi(t)$ aufgespannte) Tangentialebene besitzt.

- (ii) Unsere Definition der regulären Kurve entspricht nicht genau den eingebetteten eindimensionalen Mannigfaltigkeiten, da sie sich selbst schneiden darf. Durch die Forderung, dass φ_i^{-1} stetig sein soll, werden solche Selbstüberschneidungen verhindert.
- (iii) Die Definition der regulären Fläche ist komplizierter als die der regulären Kurve, da es in zwei Dimensionen nicht mehr in jedem Fall möglich ist verschiedene Karten „zusammenzulegen“.

Definition 9.18 (Kreuzprodukt). Für zwei Vektoren $v = (v_1, v_2, v_3)$ und $w = (w_1, w_2, w_3)$ definieren wir

$$v \times w = (v_2w_3 - v_3w_2, v_3w_1 - v_1w_3, v_1w_2 - v_2w_1).$$

Bemerkung 9.19. (i) Das Kreuzprodukt $v \times w$ ist orthogonal zu v und w .

- (ii) Das Kreuzprodukt ist linear in v und w und es gilt $v \times w = -w \times v$.
- (iii) Das Kreuzprodukt ist nicht assoziativ. Es erfüllt stattdessen die Jacobi-Identität

$$u \times (v \times w) + v \times (w \times u) + w \times (u \times v) = 0.$$

- (iv) Das Kreuzprodukt von v und w verschwindet genau dann, wenn v und w linear abhängig sind (Warum?).
- (v) Das Kreuzprodukt hängt von den Koordinaten der Vektoren, also von der Wahl einer Basis ab. Man kann allerdings zeigen, dass die Formel für jedes positiv orientierte orthonormale Koordinatensystem ihre Gültigkeit behält. Damit hängt das Kreuzprodukt allerdings vom Skalarprodukt ab.
- (vi) Das Bilden von Kreuzprodukten vertauscht nicht mit Spiegelungen. In der Physik werden gewöhnliche Vektoren daher als polare Vektoren bezeichnet und solche, die als Kreuzprodukt zweier polarer Vektoren entstehen, als axiale Vektoren. Hier deutet sich schon an, dass polare und axiale Vektoren eigentlich in unterschiedlichen Räumen „leben“.
- (vii) Das Kreuzprodukt lässt sich in dieser Form nicht auf andere Dimensionen verallgemeinern. Um das etwas besser zu verstehen betrachten wir den Raum aller antisymmetrischen Matrizen

$$V = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A^T = -A\}.$$

Man überzeugt sich leicht, dass dieser Raum ein Vektorraum der Dimension $\frac{1}{2}n(n-1)$ ist. Für $n = 3$ ist diese Dimension also 3. Damit können wir in 3 Dimensionen

– und nur dort – den Raum V durch entsprechende Wahl einer Basis mit \mathbb{R}^3 identifizieren.

Der Raum V wiederum hat (für beliebige n), je nach Kontext, unterschiedliche Interpretationen. Man kann ihn einerseits als Raum der antisymmetrischen Bilinearformen interpretieren: in diesem Fall entspricht das Kreuzprodukt dem sogenannten äußeren Produkt. Andererseits kann man ihn als Raum der infinitesimalen Drehungen des \mathbb{R}^n , die sogenannte Lie-Algebra zur Gruppe der Drehungen, interpretieren: dann entspricht das Kreuzprodukt der Lie-Klammer.

Definition 9.20. Sei $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein parametrisiertes Flächenstück. Dann nennen wir

$$\sigma_\varphi(t) = \partial_1\varphi(t) \times \partial_2\varphi(t)$$

das vektorielle Flächenelement von φ im Punkt $\varphi(t)$ und $\|\sigma_\varphi(t)\|$ das skalare Flächenelement.

Bemerkung 9.21. Das Oberflächenelement läßt sich für beliebige differenzierbare Abbildungen $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ definieren. Die Abbildung φ ist dann eine Parametrisierung genau dann, wenn σ_φ (oder $\|\sigma_\varphi\|$) nirgends verschwindet, da dann die Vektoren $\partial_1\varphi(t)$ und $\partial_2\varphi(t)$ überall linear unabhängig sind. In diesem Fall steht $\sigma_\varphi(t)$ stets senkrecht auf der (von $\partial_1\varphi(t)$ und $\partial_2\varphi(t)$) aufgespannten Tangentialebene.

Beispiel 9.22. (i) Wir untersuchen das Oberflächenelement der Einheitskugel

$$\begin{aligned} \varphi : (0, 2\pi) \times (0, \pi) &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (s, t) &\mapsto (\sin(t) \cos(s), \sin(t) \sin(s), \cos(t)). \end{aligned}$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned} \partial_1\varphi(s, t) &= (-\sin(t) \sin(s), \sin(t) \cos(s), 0), \\ \partial_2\varphi(s, t) &= (\cos(t) \cos(s), \cos(t) \sin(s), -\sin(t)) \text{ und} \\ \sigma_\varphi(s, t) &= (-\sin(t)^2 \cos(s), -\sin(t)^2 \sin(s), -\sin(t) \cos(t)). \end{aligned}$$

Schließlich können wir das skalare Flächenelement berechnen

$$\|\sigma_\varphi(s, t)\| = \sin(t).$$

Da dieser Ausdruck nirgends verschwindet ist φ ein reguläres Flächenstück.

(ii) Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und S der Graph von f . Dann ist $\varphi(s, t) = (s, t, f(s, t))$ eine Parametrisierung die ganz M abdeckt. Das sieht man daran, dass $\partial_1\varphi(s, t) = (1, 0, \partial_1f(s, t))$ und $\partial_2\varphi(s, t) = (0, 1, \partial_2f(s, t))$ linear unabhängig sind. Es ergeben sich die Flächenelemente

$$\begin{aligned} \sigma_\varphi(s, t) &= (-\partial_1f(s, t), -\partial_2f(s, t), 1) \\ \|\sigma_\varphi(s, t)\| &= \sqrt{(\partial_1f(s, t))^2 + (\partial_2f(s, t))^2 + 1}. \end{aligned}$$

Definition 9.23 (Skalares Oberflächenintegral). Sei $V \subset \mathbb{R}^2$ offen, $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine parametrisiertes Flächenstück und $f : \varphi(V) \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Das skalare Oberflächenintegral von f über φ ist dann durch

$$\int_{\varphi} f d\sigma := \int_V f(\varphi(t)) \|\sigma_{\varphi}(t)\| d\lambda^2(t),$$

definiert, falls das Integral auf der rechten Seite existiert.

Falls φ injektiv ist, können wir auch vom Integral über $\varphi(V)$ sprechen (andernfalls könnte es sein, dass über Teile von $\varphi(V)$ mehrfach integriert wird). Insbesondere definieren wir für solche φ den Oberflächeninhalt von $\varphi(V)$ als

$$\int_{\varphi} d\sigma.$$

Diese Formel für das Oberflächenintegral lässt sich analog zu Bemerkung 9.3 motivieren. Wir interessieren uns nun auch hier für die Unabhängigkeit von der Parametrisierung. Dazu untersuchen wir zunächst, wie sich das Oberflächenelement beim Wechsel der Parametrisierung ändert.

Lemma 9.24. Seien $V, \tilde{V} \subset \mathbb{R}^2$ offen. Sei $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine stetig differenzierbare Abbildung und $T = (T_1, T_2) : \tilde{V} \rightarrow V$ ein Diffeomorphismus und setze $\psi = \varphi \circ T$. Dann gilt

$$\sigma_{\psi}(t) = \det(DT(t))\sigma_{\varphi}(T(s)).$$

Insbesondere ist ψ ein parametrisiertes Flächenstück genau dann wenn φ eines ist.

Beweis. Aus der Kettenregel folgt

$$D\psi = D(\varphi \circ T)(t) = D\varphi(T(t))DT(t).$$

Um die Lesbarkeit der Formeln zu verbessern lassen wir nun die Argumente weg, dann lauten die beiden Spalten dieser Gleichung

$$\begin{aligned} \partial_1\psi &= \partial_1T_1\partial_1\varphi + \partial_1T_2\partial_2\varphi \\ \partial_2\psi &= \partial_2T_1\partial_1\varphi + \partial_2T_2\partial_2\varphi. \end{aligned}$$

und wir erhalten

$$\sigma_{\psi} = \partial_1T_1\partial_2T_2\partial_1\varphi \times \partial_2\varphi + \partial_2T_1\partial_1T_2\partial_2\varphi \times \partial_1\varphi.$$

also die gesuchte Formel. □

Bemerkung 9.25. Behalten wir die Notation des obigen Lemmas bei, dann gilt für eine Funktion $f : V \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \int_{\varphi} f d\sigma &= \int_V f(\varphi(t)) \|\sigma_{\varphi}(t)\| d\lambda^2(t) = \int_{\tilde{V}} f(\varphi(T(s))) \|\sigma_{\varphi}(T(s))\| |\det DT(s)| d\lambda^2(s) \\ &= \int_{\tilde{V}} f(\psi(s)) \|\sigma_{\psi}(s)\| d\lambda^2(s) = \int_{\psi} f d\|\sigma\|. \end{aligned}$$

Nach der Transformationsformel existiert das eine Integral genau dann, wenn das andere existiert. Das Integral (auch seine Existenz) hängt also nicht von der gewählten Parametrisierung ab.

Um über allgemeine (stückweise) reguläre Flächen zu integrieren, muss man diese zunächst disjunkt in reguläre Stücke zerlegen, für diese Parametrisierungen finden und die Integrale über diese Parametrisierungen aufaddieren. Man kann zeigen, dass das dieses Oberflächenintegral weder von der Zerlegung noch von der Wahl der Parametrisierung abhängt. Für praktische Rechnungen ist dabei wichtig, dass niedrigdimensionale Teile, also Punkte oder Kurven, für das Ergebnis der Integration keine Rolle spielen.

Beispiel 9.26. (i) Wir berechnen den Oberflächeninhalt der Kugel und verwenden dazu die Notation von Beispiel 9.22. Die dort angegebene Parametrisierung deckt zwar nicht die gesamte Kugel ab, aber das nicht abgedeckte Stück (ein Meridian und die Pole) sind für das Oberflächenintegral unerheblich. Wir erhalten also

$$\int_{\varphi} d\sigma = \int_{(0,2\pi) \times (0,\pi)} |\sigma_{\varphi}(s,t)| d\lambda^2(s,t) = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(t) ds dt = 4\pi$$

wobei wir noch den Satz von Tonelli benutzt haben.

(ii) Für $U \subset \mathbb{R}^2$ offen ist

$$\begin{aligned} \varphi : U &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (s,t) &\mapsto (s,t,0) \end{aligned}$$

ein parametrisiertes Flächenstück und man bestimmt leicht $\sigma_{\varphi}(s,t) = 1$. Es gilt dann für $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\int_{\varphi} f d\sigma = \int_U f(s,t,0) d\lambda^2(s,t).$$

Auf dieser einfachen Fläche stimmt also das Oberflächenintegral mit dem zweidimensionalen Lebesgue-Integral überein.

Definition 9.27. Sei V offen, $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein parametrisiertes Flächenstück und $E : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld. Dann wird das vektorielle Oberflächenintegral über E entlang φ definiert durch

$$\int_{\varphi} \langle E | d\sigma \rangle = \int_V \langle E(\varphi(t)) | \sigma_{\varphi}(t) \rangle d\lambda^2(t).$$

Bemerkung 9.28. Analog wie in Bemerkung 9.25 kann man die Unabhängigkeit dieses Integrals von der Wahl der Parametrisierung zeigen, vorausgesetzt $\det DT$ ist positiv (wir sagen T ist orientierungserhaltend). Falls T orientierungsumkehrend ist, dann ändert sich das Vorzeichen des Integrals.

Um für (stückweise) reguläre Flächen einen zerlegungs- und parametrisierungsunabhängigen Integralbegriff zu erhalten, müssen wir sicherstellen, dass wir für alle Teilstücken konsistent eine Orientierung wählen können. Es gibt jedoch (sogar reguläre)

Flächen, für die das nicht möglich ist – beispielsweise das Möbius-Band. Für solche nicht orientierbaren Flächen ist das vektorielle Oberflächenintegral nicht sinnvoll definiert.

Ein Fall der in der Praxis häufig auftritt ist der, dass die Fläche den \mathbb{R}^3 in ein „Innen“ und ein „Außen“ aufteilt. In diesem Fall kann man stets alle Parametrisierungen so wählen, dass σ_φ von Innen nach Außen (oder umgekehrt) zeigt.

Beispiel 9.29. Wir wollen das Oberflächenintegral des Vektorfeldes

$$E : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \mapsto \left(0, 0, \left(\frac{1}{1+z^2} (x \sin(y) + y \cos(x)) \right) \right)$$

über die Oberfläche des Einheitswürfels bestimmen. Wir wählen die Orientierung „von Innen nach Außen“. Zunächst stellen wir fest, dass das Vektorfeld stets in z -Richtung ausgerichtet ist und daher die Oberflächenintegrale über die Seitenflächen des Würfels (parallel zu x - z - beziehungsweise y - z -Ebene) nicht zum Integral beitragen. Für den „Deckel“ erhalten wir mit der Parametrisierung $(s, t) \mapsto (s, t, 1)$

$$\int_{\varphi} \langle E | d\sigma \rangle = \int_{(-1,1)^2} \frac{1}{2} (s \sin(t) + t \cos(s)) d\lambda^2(s, t).$$

Für den Boden ergibt sich allerdings der selbe Ausdruck mit umgekehrten Vorzeichen, das gesamte Integral verschwindet also.

9.3 Integralsätze

Definition 9.30. Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen. Wir definieren die Differentialoperatoren $\text{grad} : \mathbf{C}^1(U) \rightarrow \mathbf{C}(U, \mathbb{R}^3)$, $\text{div} : \mathbf{C}^1(U, \mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbf{C}(U)$, $\text{rot} : \mathbf{C}^1(U, \mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbf{C}(U, \mathbb{R}^3)$ und $\Delta : \mathbf{C}^2(U) \rightarrow \mathbf{C}(U)$ durch

$$\begin{aligned}\text{grad } f &:= (\partial_1 f, \partial_2 f, \partial_3 f) \\ \text{div } E &:= \partial_1 E_1 + \partial_2 E_2 + \partial_3 E_3 \\ \text{rot } E &:= (\partial_2 E_3 - \partial_3 E_2, \partial_3 E_1 - \partial_1 E_3, \partial_1 E_2 - \partial_2 E_1) \\ \Delta g &:= \partial_1^2 g + \partial_2^2 g + \partial_3^2 g.\end{aligned}$$

für $f \in \mathbf{C}^1(U)$, $g \in \mathbf{C}^2(U)$ und $E \in \mathbf{C}^1(U, \mathbb{R}^3)$.

Bemerkung 9.31. (i) Aus der Definition ist ersichtlich, dass die Differentialoperatoren linear sind. Sie wirken üblicherweise auf alles was rechts von ihnen steht bis zum nächsten + oder - Zeichen. Der Ausdruck

$$f \Delta gh + l$$

wird also als

$$f(\Delta(gh)) + l$$

interpretiert.

- (ii) Die Operatoren grad , div und Δ lassen sich ohne Weiteres auf \mathbb{R}^n für beliebiges n erweitern.
- (iii) Häufig führt man formal den vektorwertigen Nabla-Operator $\nabla := (\partial_1, \partial_2, \partial_3)$ ein, um die obigen Definitionen formal zusammenzufassen:

$$\begin{aligned}\text{grad } f &= \nabla f \\ \text{div } E &= \langle \nabla | E \rangle \\ \text{rot } E &= \nabla \times E \\ \Delta f &= \langle \nabla | \nabla \rangle f.\end{aligned}$$

Die obigen Skalar- und Kreuzprodukte sind nicht definiert, die Formeln dienen also primär als Gedächtnisstütze.

- (iv) Anhand der Definitionen rechnet man leicht die folgenden Rechenregeln nach:

$$\begin{aligned}\text{div rot } E &= 0 \\ \text{rot grad } E &= 0 \\ \text{div grad } f &= \Delta f \\ \text{grad } (fg) &= (\text{grad } f)g + f \text{grad } g \\ \text{div } (fE) &= \langle \text{grad } f | E \rangle + f \text{div } E \\ \text{rot } (fE) &= (\text{grad } f) \times E + f \text{rot } E \\ \Delta (fg) &= (\Delta f)g + 2 \langle \text{grad } f | \text{grad } g \rangle + f \Delta g\end{aligned}$$

Bemerkung 9.32. Eine parametrisierte Kurve $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt einfach geschlossen, wenn sie sich nicht selbst schneidet, das heißt wenn sie auf $[0, 1]$ injektiv ist. Im \mathbb{R}^2 teilen solche Kurven den gesamten Raum in einen beschränkten und einen unbeschränkten Teil. Den offenen beschränkten Teil werden wir mit U bezeichnen und wir werden stets annehmen, dass γ positiv orientiert ist, das heißt dass U links von γ liegt.

Satz 9.33 (Satz von Green). Sei $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine einfach geschlossene Kurve. Sei $E : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt

$$\int_U (\partial_1 E_2 - \partial_2 E_1) d\lambda^2 = \int_\gamma \langle E | ds \rangle.$$

Beweisskizze. Wir betrachten zunächst den folgenden Spezialfall: $f : [0, b]$ sei eine monoton wachsende, stetig differenzierbare Funktion mit $f(0) = a < 0$ und $f(b) = 0$. Sei $C_1 = \{0\} \times [0, b]$, $C_2 = [0, a] \times \{0\}$ und C_3 der durch $t \mapsto (t, f(t))$ parametrisierte Graph von f . Weiter sei U das von diesen Kurven umgrenzte Gebiet. Da f monoton wachsend ist, besitzt es eine stetig differenzierbare Umkehrfunktion g (Satz 4.50). Dann gilt nach dem Satz von Fubini (Warum dürfen wir den hier anwenden?)

$$\begin{aligned} \int_U (\partial_1 E_2 - \partial_2 E_1) d\lambda^2 &= \int_0^a \int_0^{g(y)} \partial_1 E_2(x, y) dx dy - \int_0^b \int_{f(x)}^0 \partial_2 E_1(x, y) dy dx \\ &= \int_0^a (E_2(g(y), y) - E_2(0, y)) dx - \int_0^b (E_1(x, 0) - E_1(x, f(x))) dx \\ &= - \int_0^b E_1(t, 0) dt + \int_0^a E_2(0, t) dt + \int_0^b (E_1(t, f(t)) + E_2(t, f(t)) f'(t)) dt \\ &= \int_{C_1} \langle E | ds \rangle + \int_{C_2} \langle E | ds \rangle + \int_{C_3} \langle E | ds \rangle \end{aligned}$$

Dabei haben wir die Substitution $y = f(t)$ verwendet.

Durch entsprechende Symmetrieüberlegungen findet man nun, dass der Satz auch für solche Situationen gilt, die aus der obigen durch Spiegelung an einer der Koordinatenachsen, am Koordinatenursprung oder durch Verschiebung im \mathbb{R}^2 hervorgehen.

Ist γ nun eine kompliziertere Kurve, dann können wir diese häufig so zerlegen, dass die einzelnen Teile wie oben geformt sind und die Integrale für die Teilstücken aufsummieren. Dabei ist zu beachten, dass die Randstücken, die nicht Teil der ursprünglichen Kurve sind zum Rand von genau zwei Teilflächen gehören, also jeweils zwei mal in unterschiedlicher Richtung durchlaufen werden. Sie tragen also nicht zum Integral auf der rechten Seite bei. \square

Korollar 9.34 (Satz von Gauß in 2D). Sei $E \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ ein Vektorfeld und $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine einfach geschlossene Kurve. Wir setzen

$$\sigma(t) = (\gamma'_2(t), -\gamma'_1(t)).$$

Man überzeugt sich leicht, dass σ der aus U herauszeigende Normalenvektor zur Kurve γ ist, die niedrigdimensionale Entsprechung des Oberflächenelements. Dann gilt

$$\int_U \operatorname{div} E d\lambda^2 = \int_0^1 \langle E(\gamma(t)) | \sigma(t) \rangle dt.$$

Beweis. Wir wenden den Satz von Green auf das Vektorfeld $\tilde{E} = (-E_2, E_1)$ an und erhalten

$$\begin{aligned} \int_U \operatorname{div} E d\lambda^2 &= \int_U \partial_1 \tilde{E}_1 - \partial_2 \tilde{E}_1 d\lambda^2 = \int_0^1 \langle E(\gamma(t)) | \gamma'(t) \rangle dt \\ &= \int_0^1 (-E_2(\gamma(t))\gamma'_1(t) + E_1(\gamma(t))\gamma'_2(t)) dt = \int_0^1 \langle E(\gamma(t)) | \sigma(t) \rangle dt. \quad \square \end{aligned}$$

Korollar 9.35 (Satz von Stokes in der x - y -Ebene). Sei $\tilde{E} \in \mathbf{C}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ ein Vektorfeld und $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine einfach geschlossene Kurve. Setze $\tilde{\gamma}(t) = (\gamma(t), 0) \in \mathbb{R}^3$ und $\tilde{U} = U \times \{0\}$. Dann gilt

$$\int_{\tilde{U}} \langle \operatorname{rot} E | d\sigma \rangle = \int_{\tilde{\gamma}} \langle E | ds \rangle.$$

Beweis. Die Abbildung $(x, y) \mapsto (x, y, 0)$ ist eine Parametrisierung der Fläche \tilde{U} mit Flächenelement $(0, 0, 1)$. Wir setzen $E(x, y) = (E_1(x, y, 0), E_2(x, y, 0))$ und erhalten

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{U}} \langle \operatorname{rot} \tilde{E} | d\sigma \rangle &= \int_U \langle \operatorname{rot} \tilde{E}(x, y, 0) | \sigma(x, y) \rangle d\lambda^2(x, y) = \int_U (\partial_1 E_2 - \partial_2 E_1) d\lambda^2 \\ &= \int_{\tilde{\gamma}} \langle E | ds \rangle = \int_{\tilde{\gamma}} \langle \tilde{E} | ds \rangle. \quad \square \end{aligned}$$

Bemerkung 9.36. Will man den allgemeinen Satz von Stokes aufschreiben, so muss man voraussetzen, dass die Fläche „keine Löcher hat“. Wir schreiben die präzise Definition dieses Begriffs auf, wir werden sie jedoch im Weiteren nicht benötigen.

Eine Menge U heißt einfach zusammenhängend, wenn es zu jeder geschlossenen Kurve $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$ (die Kurven hier müssen lediglich stetig sein) eine stetige Abbildung $\theta : [0, 1]^2 \rightarrow U$ gibt so, dass für alle $t \in [0, 1]$ gilt

$$\theta(1, t) = \gamma(t) \text{ und } \theta(0, t) = \gamma(0).$$

Anschaulich bedeutet diese Definition, dass sich jede Kurve stetig auf einen Punkt zusammenziehen lässt ohne dabei die Menge U zu verlassen.

Beispiele für nicht einfach zusammenhängende Mengen: Einheitskreis, $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, Oberfläche eines Doughnuts oder einer Brezel.

Beispiele für zusammenhängende Mengen: \mathbb{R}^n , $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$, die Oberfläche von $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ für $n > 2$, $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ für $n > 2$.

Satz 9.37. Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ eine einfach zusammenhängende, orientierbare Fläche deren Rand eine geschlossene Kurve γ ist. Für die Fläche sei eine Orientierung (also ein stetiges Normalenvektorfeld) gewählt und die Kurve γ sei so orientiert, dass die Fläche entgegen der Normalenrichtung betrachtet links von der Kurve liegt. Sei $E \in \mathbf{C}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ ein Vektorfeld. Dann gilt

$$\int_U \langle \operatorname{rot} E | d\sigma \rangle = \int_\gamma \langle E | ds \rangle$$

Ohne Beweis.

Beispiel 9.38. Die Bedingung einfach zusammenhängend ist dabei notwendig. Die Rotation des Vektorfeldes

$$(x, y, z) \mapsto \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right)$$

verschwindet. Kurvenintegrale über Kurven die die z -Achse umlaufen können jedoch von 0 verschieden sein. Vergleiche dazu Beispiel 9.13.

Der Satz von Stokes kann aber auch in diesem Fall nützlich sein. So kann man zum Beispiel schlussfolgern, dass das Kurvenintegral einer einmal um die z -Achse umlaufenden Kurve unabhängig vom genauen Verlauf der Kurve ist (Wie?).

Bemerkung 9.39. Der Satz von Stokes gibt uns nun ein einfach zu handhabendes Kriterium dafür, wann ein Vektorfeld konservativ ist. Für offene $U \subset \mathbb{R}^3$ einfach zusammenhängend ist das Vektorfeld $E : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ genau dann konservativ, wenn $\operatorname{rot} E$ verschwindet. In diesem Falle lässt sich zu jeder geschlossenen Kurve γ in U eine orientierbare, einfach zusammenhängende Fläche finden die von γ berandet wird und daher gilt nach dem Satz von Stokes

$$\int_\gamma \langle E | ds \rangle = 0.$$

Da das für beliebige Kurven gilt folgt aus Satz 9.14, dass E konservativ ist.

Als Übung suche man nach einer analogen differentiellen Bedingung im \mathbb{R}^2 .

Analog zur geschlossenen Kurve nennen wir eine Fläche geschlossen, wenn sie den \mathbb{R}^3 in einen beschränkten und einen unbeschränkten Teil teilt. Wir nennen den beschränkten Teil U und nehmen an, dass die Fläche so orientiert ist, dass die Normalenvektoren aus U herauszeigen.

Satz 9.40 (Satz von Gauß 3D). Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine geschlossene Fläche und $E \in \mathbf{C}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ ein Vektorfeld. Dann gilt

$$\int_U \operatorname{div} E d\lambda^3 = \int_M \langle E | d\sigma \rangle.$$

Ohne Beweis.

Korollar 9.41 (Greensche Formeln). Sei M eine geschlossene Fläche und $f, g \in \mathbf{C}^2(U, \mathbb{R})$ Funktionen. Sei n die gewählte Orientierung (also ein stetiges Einheitsnormalenfeld auf M). Dann gelten

$$\int_U (f\Delta g + \langle \text{grad } f | \text{grad } g \rangle) d\lambda^3 = \int_M \langle f \text{grad } g | d\sigma \rangle \text{ und}$$

$$\int_U (f\Delta g - g\Delta f) = \int_M (f \text{grad } g - g \text{grad } f) d\sigma = \int_M (f \partial_n g - g \partial_n f) d\sigma$$

wobei ∂_n die Richtungsableitung in Richtung n bezeichnet.

Beweis. Wir wenden Satz 9.40 auf das Vektorfeld $f \text{grad } g$ an. Dann gilt mit Bemerkung 9.31

$$\int_U \text{div}(f \text{grad } g) d\lambda^3 = \int_U (f\Delta g + \langle \text{grad } f | \text{grad } g \rangle) d\lambda^3 = \int_M \langle f \text{grad } g | d\sigma \rangle.$$

Vertauschen wir f und g und subtrahieren das Ergebnis von dieser Gleichung, so erhalten wir

$$\int_U (f\Delta g - g\Delta f) = \int_M \langle f \text{grad } g - g \text{grad } f | d\sigma \rangle.$$

Für die letzte Umformung sei $\varphi : V \rightarrow M$ eine orientierte Parametrisierung eines Teils von M . Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_M \langle f \text{grad } g | d\sigma \rangle &= \int_V \langle f(\varphi(t)) \text{grad } g(\varphi(t)) | \sigma_\varphi(t) \rangle d\lambda^2(t) \\ &= \int_V f(\varphi(t)) \langle \text{grad } g(\varphi(t)) | n(\varphi(t)) \rangle \|\sigma_\varphi(t)\| d\lambda^2(t) = \int_\varphi f \partial_n g d\sigma. \quad \square \end{aligned}$$