

Übungsblatt 11

- 1) Seien $(a_n)_n, (b_n)_n$ Folgen positiver Zahlen und c_n für $n \in \mathbb{N}$ definiert als

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k.$$

Kann man aus der Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ auf die Konvergenz der Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ schliessen?

Geben Sie einen Beweis oder Gegenbeispiel.

Was passiert, wenn wir die Voraussetzung der Positivität der a_n und b_n weglassen?

4+1 Punkte

- 2) a) i) Wieviele stetige Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gibt es, so dass
 $\forall x \in \mathbb{R} : (f(x))^2 = x^2$? Begründen Sie Ihre Aussage! 2 Punkte
 ii)* Wieviele stetige Funktionen $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ gibt es, so dass
 $\forall z \in \mathbb{C} : (g(z))^2 = z^2$? Begründen Sie Ihre Aussage! 3* Punkte
 b) Die Funktion $h : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ sei durch

$$h(x) = \frac{x}{1 - |x|}$$

definiert. Zeigen Sie, dass h injektiv ist und bestimmen Sie $h((-1, 1))$. Finden Sie h^{-1} ! Sind h und h^{-1} stetig? Begründen Sie Ihre Aussagen! 3 Punkte

- c) Die Funktion $\phi : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{C}$ sei durch $\phi(t) = \exp(it)$ definiert. Erklären Sie, wieso ϕ injektiv und stetig ist.
 Nun betrachten wir $\psi = \phi^{-1}$, was ist der Definitionsbereich dieser Funktion? Ist ψ stetig, falls nicht bestimmen Sie alle Punkte, in denen ψ unstetig ist. Begründen Sie Ihre Aussage sorgfältig. 3 Punkte

- 3) a) Finden Sie $\lim_{x \rightarrow 0} \exp(-1/x^4)$. Existiert $\lim_{x \rightarrow 0} \exp(-1/x)$?
 b) Finden Sie $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \left[\frac{1}{x} \right]$. [Hinweis: Vergleichen Sie $1/x$ und $[1/x]$.]
 c) Beweisen Sie: $\forall n \in \mathbb{N} \forall y > 0 : \exp(-1/y) < n! y^n$ und leiten Sie daraus her:

$$\forall a > 0 : \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^{-a} \exp\left(\frac{-1}{x}\right) = 0, \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^a = 0 \text{ und } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^a \log(x) = 0.$$

- d) Berechnen Sie $A = \pi^a$ wenn $a = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{x \log 2} + \log \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x/e)}{x} \right)$. 5 Punkte

- 4) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Wir definieren

$$\lim_{a+} f = \lim_{x \searrow a} f(x) = \ell \quad \text{wenn } \ell = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in (a, \infty)}} f(x),$$

den rechten GW von f im Punkt $a \in \mathbb{R}$. Analog ist $\lim_{a-} f = \lim_{x \nearrow a} f(x)$ der linke GW von f in a . Geben Sie hierfür eine entsprechende Definition! (0 Punkte)

- a) Zeigen Sie: $\lim_a f$ existiert genau dann wenn $\lim_{a+} f = \lim_{a-} f$ und in diesem Falle sind alle drei Zahlen gleich. 2 Punkte
- b) Sei nun f überdies monoton wachsend. Zeigen Sie: für jedes $a \in \mathbb{R}$ existieren

$$\lim_{a-} f \leq \lim_{a+} f,$$

gibt es eine andere Darstellung dieser einseitigen Grenzwerte? 2* Punkte

- c) Beweisen Sie: die Menge M der Unstetigkeitspunkte von f (monoton wachsend!) ist abzählbar. 3* Punkte
- d) Sei $M \subset \mathbb{R}$ eine beliebige abzählbare Menge. Beweisen Sie, dass es eine monoton wachsende Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, so dass M genau die Menge aller Punkte ist, in denen f unstetig ist. 5* Punkte

Abgabe: am 16.1.2020, 17.10 Uhr Hörsaal 9

Die (Übungsschein-)Klausur findet am 6.2.2020 von 17-19 Uhr statt.