

Partielle Differentialgleichungen I
 Blatt 9 Lösungen

Aufgabe 1

^a Sei u eine glatte Lösung der Wärmeleitungsgleichung in $C_1(0, 1)$ d.h.

$$u_t - \Delta u = 0 \text{ in } C_1(0, 1).$$

Zeigen Sie, dass eine nur von der Dimension abhängige Konstante $C > 0$ gibt mit

$$\sup_{C_{\frac{1}{2}}(0,1)} |Du| \leq C \sup_{C_1(0,1)} |u|. \quad (1)$$

Gehen Sie dazu wie folgt vor. Sei φ eine glatte Funktion mit $\varphi \equiv 1$ in $C_{\frac{1}{2}}(0, 1)$ und $\varphi(x, t) = 0$ falls $(x, t) \notin C_1(0, 1)$, $t < 1$ und betrachten Sie für $\mu > 0$ die Funktion

$$w(x, t) := \varphi(x, t)^2 |Du|^2(x, t) + \mu |u|^2$$

Zeigen Sie, dass w für genügend großes μ eine Sub-Lösung ist, d.h.

$$w_t - \Delta w \leq 0 \text{ in } C_1(0, 1)$$

und benutzen Sie dann das Maximumsprinzip um (1) zu folgern. *Hinweis: Die Ungleichung $ab \leq \frac{a^2}{4} + b^2$ für $a, b \geq 0$ könnte hilfreich sein.*

Solution: Wir bemerken zuerst, dass für eine Lösung v der Wärmeleitungsgleichung

$$\partial_t v^2 - \Delta v^2 = 2v(\partial_t v - \Delta v) - 2|Dv|^2 = -2|Dv|^2$$

gilt. Jede partielle Ableitung einer Lösung der Wärmeleitungsgleichung ist erneut eine Lösung, und deshalb gilt

$$\partial_t |Du|^2 - \Delta |Du|^2 = -2 \sum_{i=1}^n |D\partial_i u|^2 = -2|D^2 u|^2. \quad (2)$$

Mit dieser Vorbereitung können wir nun mit der Produktregel berechnen

$$\partial_t w = \partial_t \varphi^2 |Du|^2 + \varphi^2 \partial_t |Du|^2 + 2\mu u \partial_t u.$$

Um Δw auszurechnen, benutzen wir

$$\Delta(fg) = g\Delta f + f\Delta g + 2Df \cdot Dg$$

für $f, g \in C^2$. Es gilt demnach

$$\Delta w = |Du|^2 \Delta \varphi^2 + \varphi^2 \Delta |Du|^2 + 2D\varphi^2 \cdot D|Du|^2 + 2\mu u \Delta u + 2\mu |Du|^2.$$

Somit finden wir mit (2)

$$\begin{aligned} \partial_t w - \Delta w &= |Du|^2 (\partial_t \varphi^2 - \Delta \varphi^2 - 2\mu) + \varphi^2 (\partial_t |Du|^2 - \Delta |Du|^2) + 2\mu u (\partial_t u - \Delta u) - 2D\varphi^2 \cdot D|Du|^2 \\ &= |Du|^2 (\partial_t \varphi^2 - \Delta \varphi^2 - 2\mu) - 2\varphi^2 |D^2 u|^2 - 2D\varphi^2 \cdot D|Du|^2. \end{aligned}$$

^aDiese Aufgabe gibt einen alternativen Beweis zu den lokalen Abschätzungen für die Wärmeleitungsgleichung.

Um den letzten Term zu kontrollieren, schätzen wir mit Hilfe der Cauchy-Schwarz Ungleichung und der Ungleichung aus dem Hinweis folgendermassen ab

$$|-2D\varphi^2 \cdot D|Du|^2| = 8|\varphi D\varphi \cdot D^2u \cdot Du^\top| \leq 2\varphi^2|D^2u|^2 + 8|D\varphi|^2|Du|^2.$$

Wir finden deshalb

$$\partial_t w - \Delta w \leq |Du|^2 (\partial_t \varphi^2 - \Delta \varphi^2 + 8|D\varphi|^2 - 2\mu) \leq 0,$$

falls μ genügend groß gewählt ist. Das Maximumsprinzip gibt dann

$$\max_{C_1(0,1)} w = \max_{\partial_P C_1(0,1)} w = \mu \max_{\partial_P C_1(0,1)} |u|^2,$$

da $\varphi = 0$ auf $\partial_P C_1(0,1)$. Wir finden deshalb

$$\sup_{C_{\frac{1}{2}}(0,1)} |Du|^2 \leq \sup_{C_{\frac{1}{2}}(0,1)} w \leq \sup_{C_1(0,1)} w = \max_{\partial_P C_1(0,1)} |u|^2 \leq \sup_{C_1(0,1)} |u|^2.$$

Aufgabe 2

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und sei $u \in L^1(U_T)$ eine distributionelle Lösung der Wärmeleitungsgleichung d.h.

$$(\partial_t - \Delta)u = 0 \in \mathcal{D}'(U_T) \Leftrightarrow - \int_{U_T} (\varphi_t + \Delta \varphi) u \, dx \, dt = 0 \, \forall \varphi \in C_c^\infty(U_T). \quad (3)$$

Zeigen Sie, dass u selbst eine glatte Funktion ist. Gehen Sie dazu z.B. wie folgt vor: Sei $\rho_\epsilon(x, t) := \epsilon^{-n-1} \rho_0(\frac{x}{\epsilon}, \frac{t}{\epsilon})$ ein Glättungskern in \mathbb{R}^{n+1} .

1. Zeigen Sie, dass $u^\epsilon(x, t) := (\rho_\epsilon * u)(x, t)$ für $\epsilon > 0$ genügend klein auf $V \Subset U$ wohl-definiert ist.
2. Löst u^ϵ eine PDG?
3. Zeigen Sie, dass $\epsilon \mapsto u^\epsilon$ für jedes $V \Subset U$ und alle $k, l \in \mathbb{N}$ eine Cauchyfolge in $C_k^l(V)$ ist.
Hinweis: Nutzen Sie die lokalen Regularitätsabschätzungen.
4. Schließen Sie die Behauptung.

Solution: 1. Da $\text{spt}(\rho_\epsilon) \subset B_\epsilon(0)$ ist die Faltung mit $u \in L^1(U_T)$ eine wohldefinierte Funktion auf der Menge

$$U_T^\epsilon = \{(x, t) \in U_T : \text{dist}((x, t), \partial U_T) > \epsilon\}.$$

Falls nun $V \Subset U$ wählen wir $\epsilon = \frac{1}{2} \text{dist}(V, \partial U_T)$, womit $V \subset U_T^\epsilon$ und u^ϵ auf V wohldefiniert ist.

2. Nach Aufgabe 2 des 3. Übungsblattes gilt

$$\begin{aligned} \partial_t u^\epsilon(x, t) - \Delta u^\epsilon(x, t) &= (\partial_t \rho_\epsilon - \Delta \rho_\epsilon) * u(x, t) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_t \rho_\epsilon(x-y, t-s) - \Delta \rho_\epsilon(x-y, t-s)) u(y, s) \, dy \, ds \\ &= - \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_s \rho_\epsilon(x-y, t-s) + \Delta_y \rho_\epsilon(x-y, t-s)) u(y, s) \, dy \, ds = 0, \end{aligned}$$

da $\rho_\epsilon(x-\cdot, t-\cdot) \in C_c^\infty(U_T)$ für alle $(x, t) \in V$ und u eine distributionelle Lösung der Wärmeleitungsgleichung ist.

3. Es gibt also zu jedem $V \Subset U$ ein $\epsilon_0 > 0$, sodass u^ϵ für alle $\epsilon < \epsilon_0$ die Wärmeleitungsgleichung auf V löst. Insbesondere löst für $0 < \epsilon' < \epsilon < \epsilon_0$ auch $u^\epsilon - u^{\epsilon'}$ die Gleichung auf V und damit gilt für alle $C_r(x_0, t_0) \subset V$ mit den Regularitätsabschätzungen

$$\max_{C_{\frac{r}{2}}(x_0, t_0)} \left| \partial_t^k D^\alpha (u^\epsilon - u^{\epsilon'}) \right| \leq \frac{C_{k, |\alpha|}}{r^{2k+|\alpha|+n+2}} \int_{C_r(x_0, t_0)} |u^\epsilon - u^{\epsilon'}|.$$

Nun konvergiert aber $u^\epsilon \rightarrow u$ in $L^1(V)$, und da $V \in U$ folgt somit, dass $\{u^\epsilon\}$ eine Cauchyfolge in $C_k^l(V)$ ist für $k, l \in \mathbb{N}$ beliebig.

4. Da die Räume $C_k^l(V)$ vollständig sind, gilt $u \in C_k^l(V)$ für alle $k, l \in \mathbb{N}$ und für alle $V \in U$. Mit $V \uparrow U$ folgt $u \in C^\infty(U_T)$.

Aufgabe 3

Sei $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ der eindimensionale Torus und $T > 0$. Wie üblich setzen wir $\mathbb{T}_T := \mathbb{T} \times (0, T]$ und definieren für $k, l \in \mathbb{N}$ den Raum

$$C_l^k(\mathbb{T}_T) := \{v \in C_l^k(\mathbb{R} \times (0, T]) : \partial_t^i \partial_x^j v(x+1, t) = \partial_t^i \partial_x^j v(x, t) \forall x \in \mathbb{R}, t \in (0, T], 0 \leq i \leq l, 0 \leq j \leq k\}.$$

Sei $F : (0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, sodass $z \mapsto F(t, z)$ für jedes t lokal Lipschitz stetig ist mit einer von t unabhängigen Lipschitzkonstante. Seien nun $u, v \in C_1^2(\mathbb{T}_T) \cap C(\overline{\mathbb{T}_T})$ mit

$$u_t - \Delta u \leq F(t, u), \quad v_t - \Delta v \geq F(t, v) \quad \text{in } \mathbb{T}_T.$$

Zeigen Sie, dass

$$u \leq v \text{ auf } \mathbb{T} \times \{0\} \Rightarrow u \leq v \text{ in } \mathbb{T}_T.$$

Solution: Der Beweis ist komplett analog zum Beweis von Korollar 3.6 in der Vorlesung. Hierbei benützt man Lemma 3.5, welches auch analog zur Vorlesung gezeigt wird. Der springende Punkt im Beweis von Lemma 3.5 ist, dass das Maximum $\max_{x \in \bar{U}} u(x, t)$ für jedes t im Inneren \dot{U} des Gebietes U angenommen wird. Dies ist für den Torus der Fall, da er keinen Rand besitzt.

Aufgabe 4* (Maximumprinzip in Geometrischer Analysis/ Ricci Fluss)

Sei M eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit. Eine C^1 Familie $t \mapsto g(t)$ von glatten Metriken auf M ist eine Lösung des Ricci Flusses, falls

$$\partial_t g(t) = -2 \text{Ric}(t) \text{ auf } M.$$

Diese Gleichung impliziert für die Skalarkrümmung $R(t)$

$$\partial_t R(t) = \Delta_{g(t)} R(t) + 2|\text{Ric}(t)|^2 \geq \Delta_{g(t)} R(t) + \frac{2}{n} R^2(t).$$

Dies wiederum gibt uns folgende Abschätzung: $R(t) \geq \frac{R_{\min}}{1 - \frac{2}{n} R_{\min} t}$ wobei $R_{\min} = \min_M R(0)$.

Motiviert von diesem Zusammenhang betrachten Sie $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ und eine Lösung $u \in C_1^2(\mathbb{T}_T) \cap C(\overline{\mathbb{T}_T})$ von

$$\begin{cases} \partial_t u \geq \Delta u + \frac{2}{n} u^2 & \text{in } \mathbb{T}_T \\ u = g & \text{auf } \mathbb{T} \times \{0\}. \end{cases} \quad (4)$$

1. Zeigen Sie, dass für alle $(x, t) \in \mathbb{T}_T$

$$u(x, t) \geq \frac{g_{\min}}{1 - \frac{2}{n} g_{\min} t},$$

wobei $g_{\min} = \min_{\mathbb{T} \times \{0\}} g$.

Hinweis: Vergleichen Sie $u(x, t)$ mit einer Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung in t und benützen Sie Aufgabe 3.

2. Kann die Lösung von (4) für alle Zeiten existieren, falls $g_{\min} > 0$?

Solution: 1. Sei $\eta_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und betrachte die Funktion

$$\eta(t) = \frac{\eta_0}{1 - \frac{2}{n}\eta_0 t}$$

für $t \in (-\frac{n}{2|\eta_0|}, \frac{n}{2|\eta_0|})$. Fixiere nun ein $T \in (0, \frac{n}{2|\eta_0|})$ und definiere für $(x, t) \in \mathbb{T}_T$ die Funktion $\eta(x, t) = \eta(t)$. Dann löst η das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \eta' = \Delta\eta + \frac{2}{n}\eta^2 & \text{in } \mathbb{T}_T \\ \eta = \eta_0 & \text{auf } \mathbb{T} \times \{0\} \end{cases}$$

Die Funktion $F(t, z) = \frac{2}{n}z^2$ ist lokal Lipschitz stetig und hängt nicht von t ab. Es gilt per Annahme

$$u_t - \Delta u \geq F(t, u), \quad \eta_t - \Delta\eta \leq F(t, \eta) \text{ in } \mathbb{T}_T.$$

Setzen wir nun $\eta_0 = g_{\min}$ so gilt $u = g \geq g_{\min} = \eta$ auf $\mathbb{T} \times \{0\}$. Es folgt somit mit Aufgabe 3

$$u(x, t) \geq \eta(x, t) = \frac{g_{\min}}{1 - \frac{2}{n}g_{\min}t}$$

für alle $(x, t) \in \mathbb{T}_T$.

2. Falls $g_{\min} > 0$ so gilt

$$\lim_{t \uparrow \frac{n}{2g_{\min}}} u(x, t) \geq \lim_{t \uparrow \frac{n}{2g_{\min}}} \eta(x, t) = \infty.$$

Die Funktion u existiert also nur auf $(0, T]$ für jedes $T \in (0, \frac{n}{2g_{\min}})$.