(2) Und nun wollen wir diese per unendl. Reihe dgf. Fkt. exp natürlich ganz systematisch mit dieser „Schul-Fkt." e^x vergleichen:

- $\exp(0) = 1$ geht schon mal klar ✓.
- $\exp(x) \cdot \exp(y) = \exp(x+y)$: per Reihenumordn.satz und $(x+y)^k = \ldots$ (binom. Lehrsatz)
- Nicht nur das, sondern auch: exp ist stetige Funktion. „Stetigkeit" heißt: überführt konv. Folgen in konv. Folgen, also konkret $\forall x_n \to x$ ist $\exp(x_n) \to \exp(x)$.

Hintergrund dazu ist der allgemeine Satz, dass, falls $f_k \to f$ lokal gleichmäßig konvergiert und jedes f_k dabei stetig ist, dann auch f stetig ist.
Beweisführung dazu: $|f(x_n) - f(x)|$

$$\leq \underbrace{|f(x_n) - f_k(x_n)|}_{1./2.:\ < \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_k(x_n) - f_k(x)|}_{3.\ < \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_k(x) - f(x)|}_{1./2.\ < \frac{\varepsilon}{3}}$$

- exp ist darüberhinaus sogar eine diffbare Funktion (genau diesen Begriff nehmen wir daher folgl. als nächsten durch!) mit tatsächlich der schulbekannten Eigenschaft, dass die Ableitung der exp-Funktion die exp-Fkt. selber ist.

Also

Next: $\boxed{\text{Zum Differenzierbarkeitsbegriff}}$.

Definition 1: Wir sagen, dass eine über einen Parameter $h > 0$ indizierte Familie von Funktionen $f_h(x)$ gegen eine Grenzfunktion g konvergiert (für $h \to 0$), falls $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon)$, so dass $\forall h$ mit $|h| < \delta$ gilt:

$$|f_h(x) - g(x)| < \varepsilon.$$