6.Übung zur Vorlesung Analysis
für Grund-, Mittel- und Förderschullehramt

Mathematisches Institut, Universität Leipzig

Dozent: Dr. Jan-David Hardtke

Ausgabe: Dienstag, 19.11.2019
Abgabe: Dienstag, 26.11.2019 in der Vorlesung oder bis spätestens 13:00 Uhr im Postfach Hardtke (die Postfächer befinden sich im Raum A 514).

**Wichtig:** Alle Abgaben sind mit Namen, Matrikelnummer, Übungstermin und Namen des Übungsleiters zu versehen. Die Übungen müssen selbstständig bearbeitet werden (keine Partnerabgabe).

**Aufgabe 1** (2 Punkte pro Implikationsrichtung)**.**
Eine Teilmenge $O \subseteq \mathbb{R}$ heißt *offen*, falls ihr Komplement $\mathbb{R} \setminus O$ abgeschlossen ist (zur Definition von abgeschlossenen Mengen siehe Übung 5, Aufgabe 4). Beweisen Sie, dass $O$ genau dann offen ist, wenn folgendes gilt:

$$\forall x \in O \; \exists \varepsilon > 0 \; (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq O. \tag{1}$$

**Aufgabe 2** (2+2 Punkte)**.**
1) Seien $O_1, O_2 \subseteq \mathbb{R}$ offen. Zeigen Sie, dass auch $O_1 \cup O_2$ und $O_1 \cap O_2$ offen sind.
2) Seien $A_1, A_2 \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossen. Zeigen Sie, dass auch $A_1 \cup A_2$ und $A_1 \cap A_2$ abgeschlossen sind.

**Aufgabe 3** (1+1+1+1 Punkte)**.** Bestimmen Sie folgende Funktionsgrenzwerte (mit Begründung):

$(a)\quad \lim_{x \to 2} \dfrac{\frac{1}{x-2} + x - 3}{\frac{2}{x-2} + 6}$ $\qquad (b)\quad \lim_{x \to 0} \left( \dfrac{1}{2x} - \dfrac{2x-1}{x(x-2)} \right)$

$(c)\quad \lim_{x \to 0} \left( \dfrac{(x+1)^2}{x} + \dfrac{1}{x(x-1)} \right)$ $\qquad (d)\quad \lim_{x \to 1} \dfrac{x^3 - x^2 - x + 1}{3x^2 - 6x + 3}$

**Aufgabe 4** (2+2 Punkte)**.** Wir definieren eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \begin{cases} x \text{ für } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Zeigen Sie:
1) $f$ ist stetig an der Stelle 0.
2) $f$ ist an jeder Stelle $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ unstetig.