Abgabe des Blattes in der Vorlesung am Dienstag, den 12.11.

Aufgabe 1: 5 Punkte

Gegeben sei eine Stichprobe $(X_1, \ldots, X_n)$ von i.i.d. Zufallsvariablen, mit folgender Verteilung: für jeden $k \in \mathbb{Z}_+$,

$$\mathbb{P}_\theta[X_1 = k] = \theta(1-\theta)^k.$$

Der unbekannte Parameter θ ist eine reelle Zahl inm Intervall $(0,1)$. Man möchte die Kenngröße $\frac{1-\theta}{\theta}$ schätzen. Berechnen Sie die Cramer-Rao Schranke für die Abschätzung dieser Kenngröße. Einen Cramer-Rao optimalen Schätzer für $\frac{1-\theta}{\theta}$ geben.

Aufgabe 2: 6 Punkte

Gegeben sei das folgende statistische Modell:

$$(\{0, \ldots, n\}, \mathcal{P}(\{0, \ldots, n\}), (\mathrm{Bin}(n,p); p \in [0,1])).$$

$\mathrm{Bin}(n,p)$ steht für die Binomial-Verteilung mit Parametern p und n.

i) Die Cramer-Rao Schranke für die Abschätzung von p berechnen.

ii) Zeigen, dass $T(X) = \frac{X}{n}$ ein Cramer-Rao optimaler Schätzer für p ist.

iii) Beweisen, dass dieses Modell eine exponentielle Familie ist (das dominierende Maß klarstellen). Daraus ein alternatives Argument dafür geben, dass T Cramer-Rao optimal ist.

Aufgabe 3: 3 Punkte

In einem statistischen Modell $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, (\mathbb{P}_\nu; \nu \in \Theta))$ seien S und T zwei beste erwartungstreue Schätzer für eine reelle Kenngröße $\tau(\nu)$. Zeigen Sie: Für alle ν gilt $\mathbb{P}_\nu[S = T] = 1$.

Hinweis: den Schätzer $\frac{S+T}{2}$ betrachten.

Aufgabe 4: 4 Punkte

Seien $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. mit der folgende Laplace-Dichtefunktion verteilt: ($\theta \in \mathbb{R}$ ist hier unbekannt)

$$\rho_\theta(x) = \frac{1}{2} e^{-|x-\theta|}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood Schätzer $\widehat{\theta}$ für θ.