Analysis für Informatik
Wintersemester 2019/20

Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Dr. Ulrich Hirth

Übungsblatt 5

Abgabe: Dienstag, 19.10.19, 11:15 Uhr, Hörsaal 10

Jede Abgabe ist in der **Kopfzeile des Deckblatts** mit
Name, Vorname, Matrikelnummer, Lehrkraft, Buchstabe der Übungsgruppe
zu versehen.

Alle Lösungen sind sorgfältig zu begründen bzw. zu beweisen!

Aufgabe 1 (2+2+2 Punkte)
Untersuchen Sie die angegebenen Folgen auf Konvergenz bzw. Divergenz:

(a) $a_n = \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n}$, $n \in \mathbb{N}$

(b) $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$, $n \in \mathbb{N}$

(c) $a_n = \frac{n^n}{n!}$, $n \in \mathbb{N}$

Definition 1. *Eine Zahlenfolge $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ heißt* ***Cauchyfolge****, falls für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass*

$$|a_n - a_m| < \varepsilon, \quad \forall n, m \geq N.$$

Aufgabe 2 *(2 Punkte + 2 Bonuspunkte für (b))*
Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Die Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ gemäß $a_n := \frac{1}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ ist eine Cauchyfolge.

(b) Jede konvergente reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ist auch eine Cauchyfolge.

Aufgabe 3 *(1+1+1+1 Punkte)*
Sei $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ eine durch $a_0 = 0$ und durch $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{2}$ rekursiv definierte Folge. Untersuchen Sie die Folge auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. den Grenzwert.
Hinweis: Zeigen Sie induktiv (anhand der Definitionen):

(a) $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ist durch 0 nach unten beschränkt.

(b) $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ist durch 1 nach oben beschränkt.

(c) $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ist monoton.

Folgern Sie schließlich (mit Begründung) die Konvergenz der Folge. Berechnen Sie außerdem den Grenzwert (ebenfalls mit sorgfltiger Begründung).

Definition 2. *Sei $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ eine reelle Zahlenfolge. Eine Folge $(a_{n_k})_{k=0}^{\infty}$ heißt Teilfolge von $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, falls $(n_k)_{k=0}^{\infty}$ eine strikt monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen ist.*

Aufgabe 4 *(1+4 Punkte)*
Finden Sie für die untenstehenden Behauptungen entweder einen Beweis oder ein Gegenbeispiel.

(a) Sei $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ eine reelle Zahlenfolge derart, dass die beiden Teilfolgen $(a_{2k})_{k=0}^{\infty}$ und $(a_{2k-1})_{k=0}^{\infty}$ konvergieren. Dann konvergiert auch $(a_n)_{n=0}^{\infty}$.

(b) Sei $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ eine reelle Zahlenfolge, sodass die drei Teilfolgen $(b_{2k})_{k=0}^{\infty}$, $(b_{2k-1})_{k=0}^{\infty}$ und $(b_{3k})_{k=0}^{\infty}$ konvergieren. Dann ist auch $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergent.