

Vorlesung Funktionalanalysis I, Uni Leipzig, WS 2019/20

Serie 12

**Aufgabe 34** (schriftlich).

Eine lineare Abbildung  $L : \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R}) = \ell^\infty(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *Banachlimes*, falls sie folgende Eigenschaften besitzt:

- $L(Sx) = L(x)$  für alle  $x = (x_n)_n \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ ,  
wobei  $S : \ell^\infty(\mathbb{N}) \rightarrow \ell^\infty(\mathbb{N})$ ,  $(S(x_n))_n = (x_{n+1})_n$  der Shift-Operator ist;
- $L(x) \geq 0$  für alle  $(x_n)_n \in \ell^\infty(\mathbb{N})$  mit  $x_n \geq 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ ;
- $L(e) = 1$ , wobei  $e = (1)_n = (1, 1, \dots)$  der 1-Vektor ist.

Zeigen Sie:

- (a) Es gibt einen Banachlimes.

*Hinweis:* Man verwende die reelle algebraische Version des Satzes von Hahn-Banach mit  $X = \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ ,  $U = \{x - Sx : x \in \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})\}$ ,  $\ell(u) = 0$  für alle  $u \in U$  und  $p(x) = \sup_n x_n$  für  $x = (x_n)_n \in \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ .

- (b) Jeder Banachlimes  $L$  ist stetig mit  $\|L\|_{\text{op}} = 1$  und für alle  $x \in \ell^\infty(\mathbb{N})$  gilt

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \leq L(x) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

- (c) Kein Banachlimes kann von der Form  $L(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$  ( $a_k \in \mathbb{R}$ ) sein.

**Aufgabe 35** (schriftlich).

Sei  $(X, \|\cdot\|)$  ein normierter Raum. Es seien  $K, L$  abgeschlossene konvexe Teilmengen von  $X$  mit  $K \cap L = \emptyset$ .

Zeigen Sie: Falls mindestens eine der Mengen  $K$  oder  $L$  zusätzlich kompakt ist, dann gibt es ein stetiges Funktional  $x' \in X'$ , so dass

$$\sup_{x \in K} \operatorname{Re} x'(x) < \inf_{x \in L} \operatorname{Re} x'(x).$$

**Aufgabe 36** (mündlich).

- (a) Zu einem Banachraum  $X$  definieren wir  $X'' := (X')'$ . In Aufgabe 16 b) haben Sie gezeigt, dass die Abbildung  $I : X \rightarrow X''$ , definiert durch die Gleichung

$$I(x)(x') = x'(x) \quad \text{für alle } x' \in X',$$

ein Element in  $\mathcal{L}(X, X'')$  ist.

- a1) Zeigen Sie, dass  $I$  sogar eine Isometrie ist.

- a2) Zeigen Sie dass für  $X = \ell^1(\mathbb{N})$  die Abbildung  $I$  nicht surjektiv ist.

*Hinweis:* Zwei Möglichkeiten:

1) Verwenden Sie die Darstellung von  $\ell^1(\mathbb{N})'$  aus der Vorlesung ( $\ell^1(\mathbb{N})' \cong \ell^\infty(\mathbb{N})$ , wie sieht der isometrische Isomorphismus aus?), sowie die Aufgabe 34.

2) Oder: Arbeiten Sie mit den Separabilitätseigenschaften der beteiligten Räume.

(b) Wiederholen Sie sorgfältig den bisherigen Stoff der Vorlesung.

Hier ein Lernvorschlag: Bereiten Sie zu den untenstehenden Themen jeweils einen genau 5 - minütigen Vortrag vor, den Sie Ihren Kommilitonen (oder Ihren Großeltern) auswendig (!!!) präsentieren können. Beachten Sie dabei,

- (a) alle verwendeten Begriffe sauber zu definieren,
- (b) die Voraussetzungen der Sätze genau zu benennen,
- (c) und jeweils aussagekräftige Beispiele bzw. Gegenbeispiele zu geben.

Ein in der Übung sorgfältig vorgetragener, zeitlich abgestimmter, und inhaltlich korrekter Kurzvortrag an der Tafel wird als Vorrechnen anerkannt.

Themen:

- Normierte Räume und ihre Eigenschaften (Vollständigkeit, Separabilität).
- Das Lemma von Riesz und eine Folgerung.
- Der Satz von Stone-Weierstraß.
- Der Raum  $\mathcal{L}(X, Y)$  und seine Eigenschaften.
- Die von Neumann-Reihe.
- Funktionale und Dualräume.
- Der Darstellungssatz von Riesz.
- Kompakte Operatoren und der Raum  $\mathcal{K}(X, Y)$ .
- Der Kategoriensatz von Baire.
- Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit.
- Der Satz von Banach-Steinhaus.
- Der Satz von der offenen Abbildung.
- Der Satz von der stetigen Inversen.
- Der Satz vom abgeschlossenen Graphen.
- Der Satz von Hahn-Banach für normierte Räume.
- Eine Trennungsversion des Satzes von Hahn-Banach.

Abgabe der schriftlich zu bearbeitenden Aufgaben in der Vorlesung am **Montag, den 20.1.2020.**

Die Klausur zur FA I findet am **10.02.2020, 10:00-12:00** im Felix-Klein-HS statt.