

2. Übung zur Vorlesung Analysis
für Grund-, Mittel- und Förderschullehramt

Mathematisches Institut, Universität Leipzig

Dozent: Dr. Jan-David Hardtke

Ausgabe: Dienstag, 22.10.2019

Abgabe: Dienstag, 29.10.2019 in der Vorlesung oder bis spätestens 13:00 Uhr
im Postfach Hardtke (die Postfächer befinden sich im Raum A 514).

Wichtig: Alle Abgaben sind mit Namen, Matrikelnummer, Übungstermin
und Namen des Übungsleiters zu versehen. Die Übungen müssen selbstständig
bearbeitet werden (keine Partnerabgabe).

Aufgabe 1 (2+2 Punkte). Zeigen Sie die folgenden Aussagen durch vollständige
Induktion.

1) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

2) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}.$$

Aufgabe 2 (2+2 Punkte). Zeigen Sie die folgenden Aussagen durch vollständige
Induktion.

1) Sei $0 \leq x \leq 1$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$(1+x)^n \leq 1 + (2^n - 1)x.$$

2) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{4^n}{n+1} \leq \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

Aufgabe 3 (2+2 Punkte).

(a) Zeigen Sie

$$\max\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$$

und

$$\min\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

(b) Zeigen Sie

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \quad \text{für alle } a, b > 0.$$

Aufgabe 4 (2+2 Punkte). Es seien a und b positive reelle Zahlen. Wir setzen

$$A(a, b) := \frac{a + b}{2} \quad G(a, b) := \sqrt{ab} \quad H(a, b) := \frac{2}{a^{-1} + b^{-1}}.$$

$A(a, b)$ nennt man das arithmetische Mittel, $G(a, b)$ das geometrische Mittel und $H(a, b)$ das harmonische Mittel von a und b .

Beweisen Sie die folgenden Ungleichungen:

(a) $G(a, b) \leq A(a, b)$

(b) $H(a, b) \leq G(a, b)$