3. Übungsblatt zu "Mathematik I für Wirtschaftswissenschaftler"

Leipzig, den 1.11.2019

9.) Gegeben seien die folgenden vier Relationen:

i) $R_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,|\, x < y\}$;

ii) $R_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,|\, x \leq y\}$;

iii) $R_3 := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,|\, x^2 + y^2 = 1\}$;

iv) $R_4 := \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,|\, n \cdot m \text{ ist durch 2 teilbar}\}$.

Untersuchen Sie bei jeder dieser Relationen, ob sie reflexiv, symmetrisch bzw. transitiv ist.

10.) Es sei a eine fixierte reelle Zahl mit $a \geq -1$.
Beweisen Sie durch *vollständige Induktion*, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die folgende **Bernoullische Ungleichung** gilt:

$$(1 + a)^n \geq 1 + n \cdot a.$$

11.) Für $n \in \mathbb{N}_0$ wird $n!$ – gesprochen: **n Fakultät** – definiert durch:

$$0! := 1,\ 1! := 1,\ n! := 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \text{ für } n \geq 2.$$

Für $k, n \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq k \leq n$ wird ferner $\binom{n}{k}$ – gesprochen: **n über k** – definiert durch:

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}\,.$$

i) Berechnen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ die Werte $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{n}$.

ii) Verifizieren Sie für $0 \leq k \leq n$:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

iii) Beweisen Sie für $0 \leq k \leq n - 1$:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

iv) Beweisen Sie durch *vollständige Induktion* den **Binomischen Lehrsatz:**

Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k}.$$

12.) Ordnen Sie – mit Begründung – die drei reellen Zahlen $\sqrt{2} + \frac{1}{3}$, $\sqrt{3}$ und $\sqrt{5} - \frac{1}{2}$ in aufsteigender Reihenfolge an – ohne einen Taschenrechner zu Hilfe zu nehmen.