

Partielle Differentialgleichungen I
Blatt 12

Aufgabe 1

Finden Sie eine explizite Integraldarstellung der Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{in } (0, \infty) \times (0, \infty) \\ u_t = 0 & \text{auf } \{0\} \times (0, \infty) \\ u = g, u_t = h & \text{auf } (0, \infty) \times \{0\} \end{cases}$$

für $g \in C^2(\mathbb{R}), h \in C^1(\mathbb{R})$ mit $h(0) = 0$.

Hinweis: Finden Sie eine entsprechende Reflexion.

Aufgabe 2

Sei u die in der Vorlesung gefundene Lösung für das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^3 \times (0, \infty) \\ u = g, u_t = h & \text{auf } \mathbb{R}^3 \times \{0\}, \end{cases}$$

wobei g, h glatte Funktionen mit kompaktem Träger sind. Zeigen Sie, dass eine (von h und g abhängige) Konstante $C > 0$ existiert, so dass

$$|u(x, t)| \leq \frac{C}{t} \text{ für } (x, t) \in \mathbb{R}^3 \times (0, \infty).$$

Aufgabe 3

Sei $W \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in C^2(W \times (0, \infty))$ eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{in } W \times (0, \infty) \\ u = g, u_t = h & \text{auf } W \times \{0\}. \end{cases}$$

Wir definieren für $x \in W, 0 < r < \text{dist}(x, \partial W)$ die Funktionen

$$U(x; r, t) := \int_{\partial B_r(x)} u(y, t) dS(y),$$

und genauso

$$G(x; r) := \int_{\partial B_r(x)} g(y) dS(y); \quad H(x; r) := \int_{\partial B_r(x)} h(y) dS(y).$$

Zeigen Sie, dass $(r, t) \mapsto U(x; r, t)$ das folgende Anfangswertproblem löst:

$$\begin{cases} U_{tt} - (U_{rr} + \frac{n-1}{r}U_r) = 0 & \text{in } (0, \text{dist}(x, \partial W)) \times (0, \infty) \\ U = G, U_t = H & \text{auf } (0, \text{dist}(x, \partial W)) \times \{0\}. \end{cases}$$

Aufgabe 4* (Ein paar Rechnungen zur Wellengleichung in Dimension $n = 2m + 1 > 3$.)

Wie in der Vorlesung eingeführt, definieren wir die Funktion

$$f(\xi) := \frac{\sin(2\pi|\xi|)}{(2\pi|\xi|)^n}. \tag{1}$$

(1)** Berechnen Sie die Fouriertransformation von f und zeigen Sie, dass

$$F(x) := \hat{f}(x) = \frac{(n-1)\omega_{n-1}\pi}{(2\pi)^n} \sum_{l=0}^{m-1} (-1)^l \binom{m-1}{l} \frac{1}{2l+1} \min\left(1, \frac{1}{|x|^{2l+1}}\right). \quad (2)$$

Hinweis: Zeigen Sie, dass man $x = ae_1$ mit $a > 0$ annehmen kann und benützen Sie dann Kugelkoordinaten $\xi = \Phi(r, \theta, \omega)$ mit $(r, \theta, \omega) \in \mathbb{R}^+ \times [0, \pi) \times \mathbb{S}^{n-2}$ im Integral.

(2)** Argumentieren Sie, wieso die Funktion

$$u(x, t) := (-1)^m \frac{d^n}{dt^n} \left\{ \frac{d}{dt} (F(\frac{\cdot}{t}) * g)(x) + (F(\frac{\cdot}{t}) * h)(x) \right\}$$

für $g, h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ eine Lösung der Wellengleichung ist.

Hinweis: Nehmen Sie Fouriertransformation im distributionellen Sinne.

(3) Argumentieren Sie, wieso für $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$(-1)^m \frac{d^n}{dt^n} (F(\frac{\cdot}{t}) * h)(x)$$

nur von den Werten h in $B_t(x)$ abhängt.