Jun.-Prof. Felix Pogorzelski
Dr. Martin Petersen

Vorlesung Funktionalanalysis I, Uni Leipzig, WS 2019/20

Serie 4

Aufgabe 10 (schriflich).

(a) Zeigen Sie, dass der Satz von Arzelà-Ascoli für stetige Funktionen auf nicht-kompakten Räumen i.A. nicht gilt. Finden Sie dazu eine abgeschlossene, beschränkte und gleichgradig stetige Teilmenge M des Banachraumes $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f \text{ stetig und beschränkt}\}$ (mit $\|\cdot\|_\infty$-Norm), die nicht kompakt ist.

(b) Es sei $L \subseteq C([0,1])$ eine relativ-kompakte Menge (d.h. der Abschluss von L ist kompakt bezgl. der $\|\cdot\|_\infty$-Norm). Zeigen Sie, dass L gleichgradig stetig ist.

Aufgabe 11 (schriftlich).

Ein metrischer Raum heißt Y *separabel*, wenn es eine abzählbare dichte Teilmenge von Y gibt. Es sei $X = (X, d)$ ein metrischer Raum. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Falls X kompakt ist, so ist X separabel.

(b) Der Banachraum $\ell^\infty(X) = \big\{f : X \to \mathbb{K} :\ f \text{ beschränkt}\big\}$ (mit $\|\cdot\|_\infty$-Norm) ist separabel genau dann wenn X endlich ist.

Aufgabe 12 (mündlich).

Es bezeichne $S^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ den Einheitskreis in der komplexen Zahlenebene. Zeigen Sie, dass es für jede stetige Funktion $f : S^1 \to \mathbb{C}$ und jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, sowie Zahlen $c_j \in \mathbb{C}$ $(-N \le j \le N)$ gibt, so dass

$$\sup_{z \in S^1} \left| f(z) - \sum_{j=-N}^{N} c_j \cdot z^j \right| < \varepsilon.$$

Schließen Sie hieraus, dass jede 2π-periodische stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (f ist stetig und es gilt $f(x + 2\pi) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$) gleichmäßig durch trigonometrische Polynome aus der Menge

$$\mathcal{TP} = \Big\{p : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ p(x) = a_0 + \sum_{j=1}^{N} a_j \cdot \cos(j \cdot x) + \sum_{j=1}^{N} b_j \cdot \sin(j \cdot x) :\ N \in \mathbb{N},\ a_0, a_j, b_j \in \mathbb{R}\Big\}$$

approximiert werden können.

Abgabe der schriftlich zu bearbeitenden Aufgaben in der Vorlesung am
Montag, den 11.11.2019.