Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Prof. Dr. B. Kirchheim

WS 2019/2020
07.02.2020

(Probe)Klausur zu Analysis I

Deckblatt bitte sorgfältig ausfüllen und mit den Lösungen abgeben!!

Erlaubte Hilfsmittel: Schreibmaterialien (ohne Kommunikations- oder andere intelligente Feature) sowie ein A4-Blatt (also beide Seiten) mit *handschriftlichen* (!!) Notizen.

Wir werden alles benötigte Papier (bis auf die oben erwähnten Notizen) zur Verfügung stellen.

Am Donnerstag, dem 6. Februar 2020, findet von 17.15-18.45 in den Hörsälen 3 und 9 die **Klausur** für die Vorlesung Analysis I statt. Ich bitte die zugelassenen Lehramtstudenten sich vor Hörsaal 9 und alle anderen zugelassenen Studenten sich **vor** Hörsaal 3, jeweils bis spätestens **17.05** Uhr, einzufinden.

Name: Vorname:

Matrikelnummer:

Geburtsort: Geburtsdatum:

Fachsemesterzahl: Übungsgruppenleiter:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Summe

In den folgenden Aufgaben 1 – 2 entscheiden Sie bei jeder mathematischen Aussage, nach *sorgfältigem Lesen*, über deren Wahrheitswert. Sie müssen Ihre Behauptungen nicht begründen. Sie erhalten 2 Punkte für jede richtige und 0 Punkte fr jede falsche Antwort, unbeantwortete Teilaufgaben werden mit einem Punkt bewertet.

Aufgabe 1)

i) Wenn $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ und $y \in \mathbb{Q}$, dann $xy \notin \mathbb{Q}$. ....

ii) Jede Folge reeller Zahlen hat eine konvergente Teilfolge. ....

iii) Wenn die komplexe Reihe $\sum_n z_n$ absolut konvergiert, dann konvergiert auch $\sum_n z_n^2$. ....

iv) Wenn $a_n \in \mathbb{R}$ und $-2020 < a_n \leq a_{n+1} + \frac{1}{n} < 2020$, dann ist $(a_n)_n$ konvergent. ....

v) $\lim\limits_{n\to\infty} e^{-\sqrt[2020]{n}} n^{2020} = 0$. ....

Aufgabe 2)

i) Ist $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\exp(x^2) + 1 - \exp(x) - \exp(-x)}{1 - \cos(x\sqrt{2014 + x})} > 0$? ....

ii) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex. Wenn $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$, dann ist f strikt mononton wachsend. ....

iii) Wenn $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und monoton wachsend ist, dann $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. ....

iv) Die Funktion $\cos(x) - \exp(x^2)$ nimmt auf $\mathbb{R}$ ihr Maximum an. ....

v) Wenn $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beschränkt und stetig ist, dann hat f einen Fixpunkt $x \in \mathbb{R}$ (d.h. $f(x) = x$). ....

Aufgabe 3) Eine reelle Folge sei rekursiv durch $a_1 = a \in (0,1)$ und $a_{n+1} = \frac{6}{1+a_n}$ gegeben

i) Zeigen Sie: $(a_n)_n$ ist wohldefiniert und positiv für alle $n \in \mathbb{N}$. (1 P)

ii) Beweisen Sie: $a_{2n-1} < a_{2n+1}$ und $a_{2n} > a_{2n+2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (5 P)

iii) Beweisen Sie nun: für jedes $a \in (0,1)$ ist $(a_n)_n$ konvergent und bestimmen Sie $\lim_{n\to\infty} a_n$. (2 P)

iv) Was können Sie für den Fall eines allgemeinen Startwertes $a > 0$ sagen? (2 P)

Aufgabe 4) Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{wenn } x \neq 0 \\ 1 & \text{wenn } x = 0 \end{cases}.$$

i) Erklären Sie, warum für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ die Funktion f in x differenzierbar ist, und berechnen Sie $f'(x)$ sowie $f''(x)$. (5 P)

ii) Ist f im Punkt $x = 0$ stetig ? (2 P)

iii) Bestimmen Sie $f'(0)$ und $f''(0)$, falls diese existieren. (5 P)

Aufgabe 5 Formulieren Sie den Satz von Bolzano-Weierstrass (1 P)
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine (nicht notwendigerweise stetige) Funktion, so dass für jedes $x \in [a, b]$ ein $C \in (0, \infty)$ und ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass

$$y \in [a, b] \text{ und } |x - y| < \varepsilon \Rightarrow |f(y)| \leq C.$$

Zeigen Sie, dass f beschränkt ist. (5 P)

Aufgabe 6)

i) Zeigen Sie: für alle $x \in [0,1]$ gilt $\exp(x) \leq 1 + (e-1) \cdot x$. (1 P)

ii) Berechnen Sie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n)}{2^n}$.

Hinweis: Was sagt die Eulersche Formel? Stellen Sie das Ergebniss aber als reelle Zahl dar! (3 P)

iii) Finden Sie die Taylorreihenentwicklung $T_{f,6}$ bis zur sechsten Ordung (also einschliesslich des Termes mit der 6.Potenz) der Funktion $f(x) = \sin(\sin(x^2))$ im Entwicklungspunkt 0. (4 P)

iv) Zeigen Sie für Ihr Ergebniss aus iii), dass für alle $x \in (-\frac{1}{10}, \frac{1}{10})$ die Ungleichung $|f(x) - T_{f,6}(x)| < 10^{-8}$ gilt. (4 P)