Universität Leipzig
Mathematisches Institut
Dr. Jonas Hirsch
Dr. Dominik Inauen

WS2019/20

Partielle Differentialgleichungen I
Blatt 5 Lösungen

Aufgabe 1

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in C^2(U)$. Zeigen Sie, dass die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind:

(i) $-\Delta u \leq 0$ in U;

(ii) für jeden Ball $B_r(x) \subset U$ und jede harmonische Funktion h in $B_r(x)$ gilt

$$u \leq h \text{ auf } \partial B_r(x) \Rightarrow u \leq h \text{ in } B_r(x)\,.$$

Bemerkung: Punkt (ii) begründet die Bezeichnung *subharmonisch.*

Lösung:

(i)⇒(ii). Fixiere $B_r(x) \subset U$ und eine harmonische Funktion h mit $u \leq h$ auf $\partial B_r(x)$. Wir wenden das Maximumsprinzip auf die subharmonische Funktion $v := u - h$ an. Damit finden wir für jedes $y \in B_r(x)$

$$u(y) - h(y) \leq \max_{B_r(x)} v = \max_{\partial B_r(x)} v \leq 0\,.$$

(ii)⇒(i). Sei $\overline{B_r}(x) \subset U$. Wir lösen das Randwertproblem

$$\begin{cases} -\Delta h = 0 \text{ in } B_r(x) \\ h = u \text{ auf } \partial B_r(x)\,. \end{cases}$$

Nach Voraussetzung gilt $u \leq h$ in ganz $B_r(x)$. Deshalb haben wir

$$u(x) \leq h(x) = \fint_{\partial B_r(x)} h\, dS(y) = \fint_{\partial B_r(x)} u\, dS(y)$$

Die Funktion u erfüllt somit die Mittelwerteigenschaft von subharmonischen Funktionen und ist deshalb subharmonisch.

Aufgabe 2

Zeigen Sie die folgende 'schärfere' Version des Theorems von Liouville:

Theorem 0.1. *Eine nach oben beschränkte harmonische Funktion auf $\mathbb{R}^n$ ist konstant.*

Nutzen Sie dafür das Argument im Beweis von Theorem 12 für den Fall $k = 1$, um die folgende innere Gradientenabschätzung zu zeigen:

$$|Du(x_0)| \leq \frac{n}{d} \left(\sup_{x \in U} u - u(x_0) \right)\,,$$

wobei u eine harmonische Funktion auf dem offenen Gebiet U ist und $d := \operatorname{dist}(x_0, \partial U)$. Schlussfolgern Sie das Theorem.

Lösung:

Seien $x_0 \in U$ und $r < \operatorname{dist}(x_0, \partial U)$ fixiert. Wir definieren die nichtnegative, harmonische Funktion

$$v = \sup_U u - u\,.$$

Für jedes i ist auch $\partial_i v$ harmonisch und erfüllt deshalb

$$\begin{aligned}|\partial_i v(x_0)| &= \left| \fint_{B_r(x_0)} \partial_i v(y)\, dy \right| = \left| \frac{n}{r} \fint_{\partial B_r(x_0)} v(y) \nu_i(y)\, dS(y) \right| \le \frac{n}{r} \fint_{\partial B_r(x_0)} |v|\, dS(y) \\ &= \frac{n}{r} \left(\sup_{x \in U} u - u(x_0) \right)\,,\end{aligned}$$

wobei wir in der letzten Gleichheit die Nichtnegativität von v und die Mittelwerteigenschaft für u benützt haben. Wenn wir nun $r \to \operatorname{dist}(x_0, \partial U)$ gehen lassen und bemerken, dass $|\partial_i v(x_0)| = |\partial_i u(x_0)|$ schließen wir die innere Gradientenabschätzung.

Sei nun u eine nach oben beschränkte harmonische Funktion auf $\mathbb{R}^n$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Es gilt dann $\sup_{B_R(x_0)} u - u(x_0) \le C$ für jeden Ball mit Radius $R > 0$, wobei C eine von R unabhängige Konstante ist. Aus der Gradientenabschätzung folgt dann

$$|Du(x_0)| \le \frac{n}{R} \left(\sup_{x \in B_R(x_0)} u - u(x_0) \right) \le C \frac{n}{R}\,,$$

für alle $R > 0$, d.h. $Du(x_0) = 0$. Da x_0 beliebig war folgt das Theorem.

Aufgabe 3*

Das Ziel der Aufgabe ist es, folgendes Theorem zu beweisen.

Theorem 0.2. *Sei p ein Polynom in $\mathbb{R}^n$ vom Grad d. Dann existiert genau ein Polynom q mit Grad $\le d - 2$, so dass*

$$P := (1 - |x|^2)q + p$$

harmonisch in B_1 ist. Insbesondere löst P das Dirichlet Problem für Polynome, es gilt nämlich

$$\begin{aligned} -\Delta P &= 0 \text{ in } B_1 \\ P &= p \text{ auf } \partial B_1\,. \end{aligned}$$

Gehen Sie dazu wie folgt vor:

1. Zeigen Sie, dass der Operator $Tq := \Delta((1 - |x|^2)q)$ ein Polynom vom Grad $\le d - 2$ auf ein Polynom vom Grad $\le d - 2$ abbildet.
2. Zeigen Sie, dass der Operator T injektiv ist und folgern Sie, dass er surjektiv ist.
3. Folgern Sie nun das Theorem.

Lösung:

1. Für ein Polynom Q mit $\operatorname{grad}(Q) \le l$ sind die partiellen Ableitungen $\partial_i Q$, $\partial^2_{ij} Q$ ebenfalls Polynome mit $\operatorname{grad}(\partial_i Q) \le l - 1$ und $\operatorname{grad}(\partial^2_{ij} Q) \le l - 2$. Falls nun q ein Polynom mit $\operatorname{grad}(q) \le d - 2$ ist, dann ist $Q := (1 - |x|^2)q$ erneut ein Polynom mit $l = \operatorname{grad}(Q) \le d$. Demnach ist $Tq = \Delta Q$ ein Polynom mit $\operatorname{grad}(Tq) \le d - 2$.

2. Seien q_1, q_2 Polynome von Grad $\le d - 2$ mit $Tq_1 = Tq_2$. Dann ist $Q := (1 - |x|^2)(q_1 - q_2)$ eine harmonische Funktion mit $Q \equiv 0$ auf ∂B_1. Das Maximumsprinzip impliziert dann $Q \equiv 0$ auf ganz $\mathbb{R}^n$. Da $1 - |x|^2 \neq 0$ für $x \notin \partial B_1$ folgt $q_1 = q_2$ auf $\mathbb{R}^n \setminus \partial B_1$. Aufgrund der Stetigkeit gilt dann $q_1 = q_2$ überall und T ist somit injektiv.

Für die Surjektivität bemerken wir, dass der Raum der Polynome mit Grad $\leq d-2$ ein endlichdimensionaler Vektorraum V ist und T eine injektive lineare Abbildung $T : V \to V$. Lineare Abbildungen zwischen endlichdimensionalen Vektorräumen derselben Dimension sind genau dann injektiv, wenn sie surjektiv sind. Deshalb ist T auch surjektiv.

3. Sei nun p ein Polynom mit $\mathrm{grad}(p) = d$. Dann ist $-\Delta p$ ein Polynom vom Grad $d-2$ und nach 2. gibt es genau ein Polynom q mit $\mathrm{grad}(q) \leq d-2$ so dass $Tq = -\Delta p$. Wenn wir nun $P = (1-|x|^2)q + p$ definieren, folgt leicht

$$-\Delta P = -Tq - \Delta p = 0\,.$$

Aufgabe 4*

Nutzen Sie Theorem 0.2, um einen alternativen Beweis für die Existenz einer Lösung des Dirichlet Problems zu geben, d.h. beweisen Sie, dass es für jede Funktion $g \in C^0(\partial B_1)$ genau eine harmonische Funktion $u \in C^2(B_1) \cap C^0(\bar{B}_1)$ gibt mit $u = g$ auf ∂B_1.

Hinweis: Nutzen Sie das Maximumsprinzip und Korollar 10.

Lösung:
Wir setzen g stetig auf $\mathbb{R}^n$ fort, indem wir

$$\tilde{g}(x) = \eta(|x|)g\left(\frac{x}{|x|}\right)$$

setzen. Hierbei ist $\eta \in C_c^\infty([0,2])$ mit $\eta = 0$ auf $[0,\frac{1}{2}] \cup [\frac{7}{4},2]$ und $\eta = 1$ auf $[\frac{3}{4},\frac{3}{2}]$. Da $\overline{B_2}$ kompakt ist, gibt der Approximationssatz von Weierstraß eine Folge $\{p_n\}$ von Polynomen, die auf B_2 gleichmässig gegen $\tilde{g}$ konvergieren. Sei P_n das zu p_n gehörige harmonische Polynom aus Aufgabe 3. Wir behaupten, dass $\{P_n\}$ gleichmäßig gegen die Lösung des Dirichlet Problems konvergiert. Da $\{p_n\}$ gleichmäßig gegen $\tilde{g}$ konvergiert, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\|p_n - p_m\|_{L^\infty(\partial B_1)} < \varepsilon \text{ für} n, m \geq N\,.$$

Nun ist die Funktion $P_n - P_m$ für alle m, n harmonisch auf B_1 und hat Randwert $p_n - p_m$. Das Maximumsprinzip gibt dann für alle $x \in \overline{B_1}$:

$$|P_n(x) - P_m(x)| \leq \|p_n - p_m\|_{L^\infty(\partial B_1)} < \varepsilon \text{ für } m, n \geq N\,.$$

Die Folge $\{P_n\}$ konvergiert somit auf $\overline{B_1}$ gleichmäßig gegen eine Funktion u, die nach Korollar 10 ebenfalls harmonisch ist. Ausserdem gilt für $x \in \partial B_1$, dass

$$u(x) = \lim_n P_n(x) = \lim_n p_n(x) = \tilde{g}(x) = g(x)\,.$$

Dies schließt den Beweis.