(i) Die Folge $(a_n \pm b_n)$ *ist konvergent mit* $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b$.

(ii) Die Folge $(a_n \cdot b_n)$ *ist konvergent mit* $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$.

(iii) Ist $c \in \mathbb{C}$, *so ist die Folge* $(c \cdot a_n)$ *konvergent mit* $\lim_{n\to\infty}(c \cdot a_n) = c \cdot a$.

(iv) Ist $b \neq 0$, *so gibt es ein* $n_0 \in \mathbb{N}$, *so dass* $b_n \neq 0$ *für alle* $n \geq n_0$. *Dann sind auch die Folgen* $\left(\frac{1}{b_n}\right)$ *und* $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ *konvergent mit* $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{b_n}\right) = \frac{1}{b}$ *und* $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}$.

(v) Die Folge $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ *ist konvergent mit* $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$.

(vi) Die komplexe Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ist genau dann konvergent, wenn die beiden reellen Zahlenfolgen* $\big(\mathrm{Re}(a_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $\big(\mathrm{Im}(a_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergieren. In diesem Fall gilt* $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}(a_n) + i \cdot \lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}(a_n)$.

Beweis. Wir beweisen beispielhaft den ersten Teil des Satzes. Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Dann gibt es zu $\varepsilon' := \varepsilon/2 > 0$ Zahlen $n_0, n_0' \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a| < \varepsilon' \qquad \text{für alle } n \geq n_0$$

und

$$|b_n - b| < \varepsilon' \qquad \text{für alle } n \geq n_0'.$$

Folglich gilt für alle $n \geq \max\{n_0, n_0'\}$:

$$\begin{aligned} |(a_n \pm b_n) - (a \pm b)| &= |(a_n - a) \pm (b_n - b)| \\ &\leq |a_n - a| + |b_n - b| \\ &< \varepsilon' + \varepsilon' = \varepsilon . \end{aligned}$$

Die weiteren Teile des Satzes beweist man ähnlich. □

Beispiel. Wir betrachten die Folge $\left(\frac{5n^2-2n+1}{3n^2+88n+1001}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Da

$$\frac{5n^2 - 2n + 1}{3n^2 + 88n + 1001} = \frac{5 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{3 + \frac{88}{n} + \frac{1001}{n^2}} ,$$

liefert Satz 4.1.17

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{5n^2 - 2n + 1}{3n^2 + 88n + 1001} &= \frac{\lim_{n\to\infty}(5) - \lim_{n\to\infty}(\frac{2}{n}) + \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2})}{\lim_{n\to\infty}(3) + \lim_{n\to\infty}(\frac{88}{n}) + \lim_{n\to\infty}(\frac{1001}{n^2})} \\ &= \frac{5\lim_{n\to\infty}(1) - 2\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}) + \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2})}{3\lim_{n\to\infty}(1) + 88\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}) + 1001\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2})} \\ &= \frac{5 - 2 \cdot 0 + 0}{3 + 88 \cdot 0 + 1001 \cdot 0} \\ &= \frac{5}{3} . \end{aligned}$$

Wir geben schließlich ohne Beweis ein berühmtes Konvergenzkriterium von Cauchy an.

Satz 4.1.18 (Konvergenzkriterium von Cauchy). *Eine Folge komplexer Zahlen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist genau dann konvergent, wenn*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall p, q \geq n_0 : \quad |a_p - a_q| < \varepsilon \ .$$

Definition 4.1.19 (Teilfolgen, Häufungswerte). Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen.

(i) Ist $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen, so heißt die Folge $(a_{m_n})_{n\in\mathbb{N}}$ *Teilfolge* von (a_n).

(ii) Eine Zahl $a \in \mathbb{C}$ heißt *Häufungswert* von (a_n), falls es eine Teilfolge von (a_n) gibt, die gegen a konvergiert.

Beispiele.

(i) Jede Folge ist Teilfolge von sich selbst. Insbesondere ist der Grenzwert einer konvergenten Folge auch Häufungswert der Folge.

(ii) Die Folge komplexer Zahlen $(i^n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt unter anderem die vier Teilfolgen $(i^{4n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, $(i^{4n+2})_{n\in\mathbb{N}}$, $(i^{4n+3})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(i^{4n+4})_{n\in\mathbb{N}}$, die alle vier konstant sind und insbesondere gegen die Grenzwerte i, -1, $-i$ und 1 konvergieren. Diese vier Zahlen sind also Häufungswerte der Folge $(i^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Wir stellen zum Schluss dieses Abschnitts über Folgen einen berühmten Satz vor (ohne Beweis).

Satz 4.1.20 (Satz von Bolzano & Weierstraß). *Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge. Insbesondere besitzt also jede beschränkte Folge einen Häufungswert.*

4.1.3 Reihen

Reihen sind spezielle Folgen, die durch Aufsummieren von Folgen entstehen.

Definition 4.1.21 (Reihen). Es sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen. Dann bezeichnet die *Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ die Folge

$$(s_n)_{n\in\mathbb{N}} := \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}} .$$

Konvergiert diese Folge (s_n) gegen den Grenzwert a, so *konvergiert* die Reihe und der Grenzwert a wird mit $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ bezeichnet. Divergiert die Folge (s_n), so sagt man auch, dass die Reihe *divergiert*. Das n-te Folgenglied $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ wird *n-te Partialsumme* genannt und die Folge (s_n) wird auch *Folge der Partialsummen* genannt.