5. Übungsblatt zu der Vorlesung "Grundwissen Geometrie"

Leipzig, den 13.12.2019

Beachten Sie auch die separate Information zur Weihnachtsvorlesung am 16.12.2019.

Abgabe: Postfach in A 514 bis Donnerstag, 9.1.2020, 13:00

In den Aufgaben 17.) – 20.) sei $(E, \mathcal{G})$ eine Ebene, die die Axiome $(A1)$ – $(A11)$ erfüllt.

17.) Es seien g, h zwei verschiedene, aber zueinander parallele Geraden in E sowie $k := \sigma_h(g)$. Weiter sei $A \in g$ beliebig, und $\tau : E \to E$ sei die eindeutig bestimmte Verschiebung mit $\tau(A) = \sigma_h(A)$. Zeigen Sie: $\tau = \sigma_h \circ \sigma_g$.

Hinweis: Zeigen Sie, dass $\varphi := \sigma_h \circ \tau$ von der identischen Abbildung verschieden ist und dass g eine Fixgerade von φ ist.

(6 Punkte)

18.) Beweisen Sie den *Hauptsatz über Kongruenzabbildungen:*
Jede Kongruenzabbildung $\varphi : E \to E$ ist Komposition von maximal drei Geradenspiegelungen – an geeigneten Geraden in E.

Hinweis: Es sei f_1 bzw. f_2 eine Fahne in E mit Anfangspunkt A_1 bzw. A_2 und Randstrahl s_1 bzw. s_2. Betrachten Sie im Falle $A_1 \neq A_2$ den Mittelpunkt M der Verbindungsstrecke $\overline{A_1A_2}$ sowie die Geradenspiegelung σ_1 an der Mittelsenkrechten zu der Strecke $\overline{A_1A_2}$; das ist die Gerade g durch M, die zu der Geraden $g(A_1, A_2)$ orthogonal – im Sinne von Aufgabe 16 – ist. Setze $s_3 := \sigma_1(s_2)$. Ist $s_1 \neq s_3$, so haben s_1 und s_3 zumindest den gemeinsamen Anfangspunkt A_1. Betrachten Sie dann weiter die Spiegelung σ_2 an der Winkelhalbierenden der beiden Strahlen s_1 und s_3.

(8 Punkte)

19.) Zeichnen Sie eine Strecke der Länge $12cm$ und teilen Sie diese – ohne zu messen, aber mit Konstruktionsbeschreibung – in 7 gleich lange Teilstrecken.

(6 Punkte)

20.) Für $Z \in E$ und $r > 0$ ist die *Zentrische Streckung* $\Delta = \Delta_{Z,r} : E \to E$ mit Zentrum Z und Streckungsfaktor r wie folgt definiert: Es ist $\Delta(Z) = Z$.
Für $P \in E \setminus \{Z\}$ ist $\Delta(P) = Q$ derjenige Punkt auf dem Strahl ZP^+, für den $l(\overline{ZQ}) = r \cdot l(\overline{ZP})$ ist. – Im Falle $r \neq 1$ ist Z also der einzige Fixpunkt von Δ.

i) Zeigen Sie die folgende Umkehrung des ersten Strahlensatzes:
Seien $A, B_1, B_2, C_1, C_2 \in E$ paarweise verschieden mit $Zw(A, B_1, B_2)$ und $Zw(A, C_1, C_2)$.
Ferner gebe es ein $r > 0$ mit $l(\overline{AB_2}) = r \cdot l(\overline{AB_1})$ und $l(\overline{AC_2}) = r \cdot l(\overline{AC_1})$.
Dann sind die Geraden $g(B_1, C_1)$ und $g(B_2, C_2)$ parallel.

ii) Beweisen Sie mittels i): Unter einer zentrischen Streckung wird jede Gerade g auf eine zu g parallele Gerade abgebildet.

iii) Es seien $Z, Z' \in E$ sowie $r, r' > 0$ mit $r \cdot r' = 1$. Zeigen Sie, dass die Komposition $\tau := \Delta_{Z,r} \circ \Delta_{Z',r'}$ eine Verschiebung ist.

Hinweise: Führen Sie i) auf den ersten Strahlensatz selbst zurück.
In iii) ist nur der Fall $Z \neq Z'$ nicht trivial. Dann bleibt zu zeigen, dass τ im Falle $r \neq 1 \neq r'$ keinen Fixpunkt besitzt.

(10 Punkte)