Jun.-Prof. Felix Pogorzelski
Dr. Martin Petersen

Vorlesung Funktionalanalysis I, Uni Leipzig, WS 2019/20

Serie 9

Aufgabe 25 (schriftlich)**.** Es sei $\mathcal{P} = \mathcal{P}([0,1])$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Polynome auf $[0,1]$ mit reellen Koeffizienten. Zeigen Sie, dass es keine Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathcal{P}$ gibt, so dass $(\mathcal{P}, \|\cdot\|)$ vollständig ist.
Hinweis: Folgerung aus dem Satz von Baire.

Aufgabe 26 (schriftlich)**.** Zeigen Sie die folgenden Aussagen.
(a) Für $1 \leq p < q \leq \infty$ ist $\big(\ell^p(\mathbb{N}), \|\cdot\|_p\big)$ von 1. Kategorie in $\big(\ell^q(\mathbb{N}), \|\cdot\|_q\big)$.
(b) $\bigcup_{1\leq p<q} \ell^p(\mathbb{N})$ ist eine echte Teilmenge von $\ell^q(\mathbb{N})$.

Aufgabe 27 (mündlich)**.**
Für eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bezeichne

$$S(f) := \big\{x \in \mathbb{R} : \, f \text{ ist stetig in } x\big\}$$

die Menge ihrer Stetigkeitspunkte. Für $n \in \mathbb{N}$ definiere

$$O_n := \Big\{x \in \mathbb{R} : \text{ es gibt ein } \delta > 0 \text{ s.d. } \sup_{s,t\in[x-\delta,\, x+\delta]} \big|f(s) - f(t)\big| \leq 1/n\Big\}.$$

Zeigen Sie:
(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist die Menge O_n offen.
(b) $S(f) = \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$, d.h. $S(f)$ ist eine G_δ-Menge.
(c) Folgern Sie aus (b): Es gibt keine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so dass $S(f) = \mathbb{Q}$.

Abgabe der schriftlich zu bearbeitenden Aufgaben in der Vorlesung am
Montag, den 16.12.2019.

Hier noch eine Information des **Fachschaftsrates Mathematik**: *Der Fachschaftsrat Mathe lädt alle zur diesjährigen Weihnachtsvorlesung am 16. Dezember ab 18:30 Uhr im Hörsaal 3 ein (Beginn 18:45 Uhr). Prof. Sturmfels vom Max-Planck-Institut und Herr Deuker tragen zu einem weihnachtlich-mathematischen Thema vor. Der Chor und Herr Deuker stimmen uns zudem musikalisch auf die Feiertage ein. Dazu gibt es Glühwein und Gebäck.*