Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Dr. Ulrich Hirth

Analysis für Informatik
Wintersemester 2019/20

Übungsblatt 4

Abgabe: Dienstag, 12.10.19, 11:15 Uhr, Hörsaal 10

Jede Abgabe ist in der **Kopfzeile des Deckblatts** mit
Name, Vorname, Matrikelnummer, Lehrkraft, Buchstabe der Übungsgruppe
zu versehen.

Alle Lösungen sind sorgfältig zu begründen bzw. zu beweisen!

Aufgabe 1 *(2+2 Punkte)*
Seien $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ und $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ reelle Nullfolgen. Zeigen Sie anhand des ϵ-Kriteriums für Konvergenz (siehe Übungsblatt 2), dass die reellen Zahlenfolgen $(a_n + b_n)_{n=0}^{\infty}$ und $(a_n \cdot b_n)_{n=0}^{\infty}$ ebenfalls Nullfolgen sind.

Aufgabe 2 *(2 + 2 + 4 Punkte)*
Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a, b \geq 0$.Beweisen Sie die folgenden Ungleichungen:

(a) $ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$.

(b) $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

(c) $\frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)} \leq \sqrt{ab}$.

Aufgabe 3 *(2 + 2 + 2 Punkte)*
Gegeben seien die reellen Zahlenfolgen $(a_n)_{n=0}^{\infty}$:

(a) $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

(b) $a_n = \frac{n^4 2^{-n} + n^6 - 9n + 7}{n^7 + 3n^6 5^{-n} - 3n^3 + 8}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

(c) $a_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

Untersuchen Sie die angegebenen Folgen auf Konvergenz und Divergenz. Begründen Sie dabei Ihre Antworten sorgfältig anhand bekannter Resultate aus den Vorlesungen und Übungen!