Seiten 53–55 (59–61) von https://optimierung.math.uni-goettingen.de/skripte/bioskript.pdf

3 Folgen und Reihen

Problem 1 In der Medizin verwendet man für einige bildgebende Verfahren radioaktive Substanzen. Diese werden zum Beispiel in eine Vene gespritzt. Dabei sind sie so gewählt, dass sie vom zu untersuchenden Organ besonders gut aufgenommen werden. Dort sammeln sie sich an; mittels einer Strahlenkamera wird ihre Verteilung im Organ dargestellt. Das erlaubt dann Rückschlüsse auf mögliche Erkrankungen. Dabei ist die Strahlung der radioaktiven Substanzen sehr gering und für den Menschen ungefährlich. Ein Beispiel für eine solche Substanz ist ein Isotop von Technetium, welches eine Halbwertszeit von ungefähr sechs Stunden hat. Das bedeutet, dass nach sechs Stunden die Hälfte des Technetiums zerfallen ist. Nach weiteren sechs Stunden zerfällt dann natürlich wiederum die Hälfte des verbliebenen Technetiums, so dass nach der zweiten Halbwertszeit nur noch $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ der Ausgangsatome vorhanden sind. Nach drei Halbwertszeiten gibt es nur noch $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$ der anfangs vorhandenen Atome usw. Wieviel radioaktive Substanz bleibt langfristig im Körper?

Problem 2 Nach dem vorangeganenen Beispiel zerfallen innerhalb von einer Halbwertzeit, also innerhalb von sechs Stunden, die Hälfte aller Technetiumatome. Innerhalb der zweiten Halbwertzeit zerfällt von den verbliebenen Atomen wieder die Hälfte. Insgesamt sind somit innerhalb von 12 Stunden $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ der anfänglich im Körper vorhandenen Atome zerfallen. Innerhalb von drei Halbwertzeiten sind dann $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$, innerhalb von vier Halbwertszeiten $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$ der Ausgangsatome zerfallen. Wie sieht die langfristige Prognose aus?

Das erste Problem definiert eine *Folge*, nämlich die Zahlenfolge $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$, das zweite eine *Reihe*, nämlich $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$ Wir wollen in diesem Kapitel das Verhalten von Folgen und Reihen untersuchen.

Ziel: Einführung von Folgen und Reihen. Konvergenzkriterien. Bestimmung von Grenzwerten

3.1 Folgen

Definition. Eine *Folge reeller Zahlen* ist eine Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Da man sich bei Folgen eigentlich nur für die Bilder $\varphi(n)$ interessiert, bezeichnet man eine solche Folge oft mit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $a_n = \varphi(n)$ ist. Ein einzelnes a_n nennt man das *n-te Folgenglied*.

Bemerkung. Aus rein rechnerischen Gründen ist es manchmal vorteilhafter, in dieser Definition anstelle von $\mathbb{N}$ die Menge $\mathbb{N} \cup \{0\}$ zu verwenden, also ein *nulltes Folgenglied* a_0

zuzulassen. Für das weitere Vorgehen spielt es keine Rolle, mit welcher dieser Definitionen wir arbeiten.

Beispiele.
Beispiele für Folgen sind

1. $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$
2. $\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}} = 0, \frac{3}{4}, \frac{8}{9}, \frac{15}{16}, \ldots$
3. $(n)_{n\in\mathbb{N}} = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$
4. $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}} = -1, 1, -1, 1, -1 \ldots$
5. $\left(\frac{3n+4n^2}{2n+2n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \frac{7}{4}, \frac{11}{6}, \frac{15}{8}, \frac{19}{10}, \ldots$

Die Beispielfolgen sind alle *explizit*. Das bedeutet, dass wir für jede dieser Folge eine genaue Abbildungsvorschrift $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ kennen, die jeder natürlichen Zahl ein Folgenglied zuordnen. Zum Beispiel wissen wir für die Folge $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sofort, dass das 157. Folgenglied gleich $(-1)^{157} = -1$ ist.

3.1.1 Wachstum und Zerfall

Viele Wachstums- und Zerfallsvorgänge lassen sich durch Folgen ausdrücken. Hier unterscheidet man zwischen *linearem Wachstum* und *exponentiellem Wachstum* bzw. zwischen *linearem Zerfall* und *exponentiellem Zerfall*:
Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, für die gilt $a_{n+1} = a_n + c$ mit einer konstanten reellen Zahl c, so spricht man von *linearem Wachstum* für $c > 0$ und von *linearem Zerfall* für $c < 0$. Zum Beispiel wachsen die Folgenglieder der Folge $(a_n) = n$ linear mit der Konstanten $c = 1$.
Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, für die gilt $a_{n+1} = a_n \cdot c$ mit einer konstanten reellen Zahl $c > 0$, so spricht man von *exponentiellem Wachstum* für $c > 0$ und von *exponentiellem Zerfall* für $c < 1$. Zum Beispiel wachsen die Folgenglieder der Folge $(a_n) = 2^n$ exponentiell mit einer Konstanten $c = 2$.
Beide Arten von Wachstum und Zerfall treten in der Natur auf.

Beispiele.

1. Der Durchmesser eines Baumstammes wächst ungefähr linear. Dies kann man zum Beispiel daran erkennen, dass die Jahresringe im Stamm ungefähr den gleichen Abstand zueinander haben.
2. Menschliche Kopfhaare wachsen ungefähr linear, nämlich ungefähr einen Zentimeter pro Monat.
3. Bakterien vermehren sich exponentiell.
4. Radioaktiver Zerfall wie in Problem 1 ist exponentiell.