Abgabe des Blattes während der Übung am Freitag, den 22.11, oder im Fach von Victor Marx bis Freitag, den 22.11, 11 Uhr.

Aufgabe 1: 1+2+1+3+2 Punkte

Wir betrachten das folgende statistische Modell:

$$(\mathbb{N}^n, \mathcal{P}(\mathbb{N}^n), \mathbb{P}_N^{\otimes n} : N \in \mathbb{N}),$$

wobei $\mathbb{P}_N$ die Gleichverteilung auf $\{1, \ldots, N\}$ ist. Sei $X = (X_1, \ldots, X_n)$ eine Stichprobe für dieses Modell.

i) Zeigen Sie, dass $S(X) := \max(X_1, \ldots, X_n)$ der Maximum-Likelihood Schätzer für die Kenngröße N ist. Ist S für N erwartungstreu?

ii) Seien $N \in \mathbb{N}$ und $m, k_1, \ldots, k_n \in \{1, \ldots, N\}$ fest. Berechnen Sie die folgende bedingte Wahrscheinlichkeit:

$$\mathbb{P}_N[X_1 = k_1, \ldots, X_n = k_n \mid S(X) = m].$$

Hängt es von N ab? Ist die Statistik S suffizient?

iii) Ist $T(X) := 2\,\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} - 1$ ein erwartungstreuer Schätzer für N?

iv) Sei $T' := \mathbb{E}_N[T|\sigma(S)]$. Sind die folgende Eigenschaften richtig oder falsch?

a) T' ist erwartungstreu für N.

b) $\mathbb{F}_N[T'] \leqslant \mathbb{F}_N[T]$, wobei $\mathbb{F}_N[\cdot]$ der mittlere quadratische Fehler ist.

c) $T = T'$.

v) $\mathbb{E}_N[T|S = m]$ für $N = 4$, $n = 2$ und $m = 1, 2, 3, 4$ berechnen.

vi) *(Bonus 2 Punkte)* Im Fall $n = 2$ beweisen, dass

$$T' = \frac{3S(S-1)+1}{2S-1}.$$

Aufgabe 2: 2+2+2+4 Punkte

Seien $(X_1, \ldots, X_n)$ i.i.d. Zufallsvariablen mit Normalverteilung $\mathcal{N}(0, 1)$.

Sei $\phi(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-s^2/2} \mathrm{d}s$ die Verteilungsfunktion der Variable X_1.

Sei $M_n := \max(X_1, \ldots, X_n)$.

i) Zeigen Sie die folgende Gleichung für jede $n \geqslant 2$:

$$\mathbb{E}[M_n] = \frac{n}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} t e^{-t^2/2} (\phi(t))^{n-1} \mathrm{d}t.$$

ii) Zeigen Sie die folgende Gleichung für jede $n \geqslant 2$:

$$\mathbb{E}[M_n] = \frac{n(n-1)}{\sqrt{2}(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-\frac{s^2}{2}} e^{-\frac{(s_1)^2}{2}} \dots e^{-\frac{(s_{n-2})^2}{2}} \mathbb{1}_{\{s \geqslant \sqrt{2} s_1\}} \dots \mathbb{1}_{\{s \geqslant \sqrt{2} s_{n-2}\}} \mathrm{d}s \mathrm{d}s_1 \dots \mathrm{d}s_{n-2}.$$

iii) $\mathbb{E}[M_2]$ und $\mathbb{E}[M_3]$ explizit berechnen.

iv) $\mathbb{V}\mathrm{ar}[M_2]$ explizit berechnen.