

Partielle Differentialgleichungen I
Blatt 7

Aufgabe 1

Sei U ein beschränktes, zusammenhängendes, C^2 -reguläres Gebiet und $x_0 \in \partial U$. Zeigen Sie, dass U in x_0 die äußere Sphärenbedingung erfüllt. Folgern Sie, dass das Dirichlet Problem

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{in } U \\ u = g & \text{auf } \partial U \end{cases}$$

für jedes $g \in C(\partial U)$ eine eindeutige, klassische Lösung (also $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$) hat.

Aufgabe 2

Sei U ein beschränktes, zusammenhängendes, C^2 -reguläres Gebiet. Zeigen Sie, dass das Problem

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } U \\ u = g & \text{auf } \partial U \end{cases}$$

für alle $f \in C^1(\bar{U})$, $g \in C(\partial U)$ eine eindeutige klassische Lösung besitzt.

Aufgabe 3*

Sei $b \in \mathbb{R}^n$ fixiert, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, und $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$ eine Funktion mit

$$-\Delta u + b \cdot Du = 0 \quad \text{in } U. \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass u das starke Maximumsprinzip erfüllt, d.h. falls U zusätzlich zusammenhängend ist und $x_0 \in U$ existiert mit $x_0 = \max_{\bar{U}} u$, dann ist u konstant. Zeigen Sie dafür zuerst, dass nichtnegative Lösungen von (1) die Harnack-Ungleichung erfüllen, d.h. dass es für jedes $V \Subset U$ eine Konstante $C \equiv C(U, V, n, b) > 0$ gibt, sodass

$$\sup_V u \leq C \inf_V u \tag{2}$$

für alle nichtnegativen Lösungen u von (1).

Hinweis: Betrachten Sie, für eine nichtnegative Lösung u und ein $x_0 \in U$, die Funktion $g(t) := \int_{\partial B_t(x_0)} u \, dS$ und zeigen Sie, dass es eine nur von b abhängige Konstante $C > 0$ gibt, so dass für alle $0 < r < s < \text{dist}(x_0, \partial U)$

$$e^{-Cs} g(s) \leq g(r) \leq e^{Cs} g(s). \tag{3}$$

Schließen Sie daraus, dass für alle $0 < r < s < \text{dist}(x_0, \partial U)$

$$e^{-Cs} \int_{B_s(x_0)} u \, dx \leq \int_{B_r(x_0)} u \, dx \leq e^{Cs} \int_{B_s(x_0)} u \, dx \tag{4}$$

und folgern Sie damit die Harnack-Ungleichung.