Zur Analysis-für-Inf. 22.10. — ...: (1)

Auf sehr sinnvolle Anregung zweier Kommilitonen hin erstmal kleine Gangrückschaltung zunächst auf S. 32/35 des Skutella-Skripts, hier von mir handschriftlich aufgearbeitet:

„Lemma 2.1.3" zur Geometrischen Summe:

Für alle $x \neq 1$ und $n \in \mathbb{N}$ ist $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n$

$$= \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}.$$

Beweis 1 für diesen Sachverhalt:

Das x-fache dieser Summe ist $x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{n+1}$,
das 1-fache dieser Summe ist $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n$,
also ist das $(x-1)$-fache der Summe $-1 + 0 + 0 + 0 + \ldots + 0 + x^{n+1}$,
quod est demonstrandum (q.e.d.).

Beweis 2 (alternativ zu Beweis 1, um Vollst. Induktion nochmal zu zeigen):

Induktionsverankerung für $n = 1$ ist durch die 3. binom. Formel $x^2 - 1 = (x-1) \cdot (x+1)$ klar.

Induktionsschluss: Unter der hypothet. Annahme, dass die behauptete Aussage für die eine oder andere natürliche Zahl stimme, argumentieren wir so: $(1 + x + x^2 + \ldots + x^n) + x^{n+1}$

$$\underset{(IA)}{=} \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} + x^{n+1}$$

$$\underset{\text{(Bruchrechng.)}}{=} \frac{x^{n+1} - 1 + x^{n+2} - x^{n+1}}{x - 1}$$

$$\underset{\text{(oben zusammenf.)}}{=} \frac{x^{n+2} - 1}{x - 1}.$$

Damit ist der IS (d.h. dass $A(n) \Rightarrow A(n+1)$) nachgewiesen — q.e.d.!