4. Übungsblatt zu der Vorlesung "Grundwissen Geometrie"

Leipzig, den 29.11.2019

Abgabe: Postfach in A 514 bis Donnerstag, 12.12.2019, 13:00

In den Aufgaben 13.) – 16.) sei $(E, \mathcal{G})$ eine Ebene, die die neun Axiome $(A1)$ – $(A9)$ erfüllt.

13.) Es seien A, B, C drei nicht kollineare Punkte in E. Geben Sie – mit Begründung – explizit drei Fahnen f_1, f_2, f_3 in E an, so dass deren Durchschnitt das in Aufgabe 11 eingeführte Dreieck $\Delta(A, B, C)$ ist.

(6 Punkte)

14.) Es seien $A, B, C \in E$ nicht kollinear, und $\varphi : E \to E$ sei eine Kongruenzabbildung mit:

$$\varphi(A) = A,\ \varphi(B) = B,\ \varphi(C) = C.$$

Zeigen Sie: $\varphi = id_E$.

Hinweis: Wenden Sie Bemerkung 4.6 auf eine geeignete Fahne an.

(8 Punkte)

15.) Es sei $\varphi : E \to E$ irgendeine Kongruenzabbildung in E, und σ_g sei die Geradenspiegelung an einer Geraden $g \in \mathcal{G}$. Zeigen Sie, dass $\varphi \circ \sigma_g \circ \varphi^{-1}$ die Geradenspiegelung an der Geraden $\varphi(g)$ ist.

Hinweis: $\varphi \circ \sigma_g \circ \varphi^{-1}$ kann nicht die Identität auf E sein.

(8 Punkte)

16.) Es seien g, h Geraden in E, die nicht parallel sind. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden drei Aussagen:

(I) $\sigma_g(h) = h$.

(II) $\sigma_g \circ \sigma_h = \sigma_h \circ \sigma_g$.

(III) $\sigma_h(g) = g$.

Hinweis: Aus Symmetriegründen reicht es natürlich, die Äquivalenz von (I) und (II) zu zeigen. Dazu können Sie – auch ohne Aufgabe 15 bearbeitet zu haben – diese anwenden auf die Kongruenzabbildung $\varphi := \sigma_g$.

Anmerkung: Die beiden verschiedenen Geraden g, h stehen aufeinander senkrecht bzw. sind zueinander orthogonal, wenn eine und damit jede der obigen Aussagen (I), (II), (III) gilt.

(8 Punkte)