ALGEBRA I

Serie 1

Aufgabe 1.1. (a) Seien H_1, H_2 Untergruppen einer Gruppe G und sei $G = H_1 \cup H_2$. Zeigen Sie, dass entweder $H_1 = G$ oder $H_2 = G$.

(b) Geben Sie ein Beispiel einer Gruppe an, die eine Vereinigung von drei echten Untergruppen ist. (Eine Untergruppe H von G heißt *echt* falls $H \neq G$.)

Aufgabe 1.2. Sei G eine endliche Gruppe. Die *Ordnung* eines Elements g ist die kleinste Zahl $n > 0$ mit $g^n = 1$.

(a) Beweisen Sie, dass die Anzahl der Elemente x mit $x \neq x^{-1}$ gerade ist.

(b) Beweisen Sie (mit Lagrange aber ohne Sylow!), dass G ein Element der Ordnung 2 hat, dann und nur dann, wenn $|G|$ gerade ist.

Aufgabe 1.3. (a) Zeigen Sie, dass eine Gruppe G abelsch ist dann und nur dann, wenn $(gh)^2 = g^2h^2$ für alle $g, h \in G$.

(b) Geben Sie ein Beispiel einer nicht-abelschen Gruppe G an, mit $(gh)^6 = g^6h^6$ für alle $g, h \in G$.

Aufgabe 1.4. Beweisen Sie, unter Anwendung des Sylowschen Satzes, dass jede Gruppe G mit $|G| = 2015$ einen Normalteiler von Primzahlordnung hat.

Aufgabe 1.5. Sei G eine Gruppe. Man beweise einen Satz von Cayley, einem berühmten Cambridger Mathematiker des 19. Jahrhunderts.

Für jedes Element $g \in G$ sei ρ_g die Abbildung $G \to G$ definiert durch $\rho_g(x) = gx$ für alle $x \in G$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $\rho_{g_1} \circ \rho_{g_2} = \rho_{g_1g_2}$ für alle $g_1, g_2 \in G$.

(b) ρ_g ist eine Permutation von G (betrachtet als Menge).

(c) Die Abbildung $\theta\colon g \mapsto \rho_g$ ist ein Isomorphismus von G mit einer Gruppe von Permutationen (Cayleyscher Satz, 1854).

(d) Jede Gruppe der Ordnung n ist isomorph mit einer Untergruppe von S_n.

Abgabetermin. Bis zu Freitag 25.10.2019 um 12.00 Uhr in meinem Briefkasten **gekennzeichnet ÜA Algebra I** (Raum A 514). Bitte die Lösungen mit Namen, Matrikelnummer und **Übungsgruppe** versehen.

Aufgabe 2.1. (a) Sei K eine Untergruppe einer Gruppe G. Beweisen Sie, dass $K \triangleleft G$ dann und nur dann, wenn K eine Vereinigung von Konjugiertenklassen in G ist.

(b) Sei G endlich und $g \in G$. Geben Sie einen direkten Beweis, dass $|\mathrm{Ccl}_G(g)| = |G \colon \mathrm{C}_G(g)|$.

Aufgabe 2.2. (a) Sei $(a_1, \ldots, a_r)$ ein r-Zyklus in S_n und sei $\theta \in S_n$. Man berechne dass $\theta g \theta^{-1} = (\theta(a_1), \ldots, \theta(a_r))$.

(b) Zeigen Sie, dass alle 3-Zyklen in S_n konjugiert sind.

(c) Bestimmen Sie alle Konjugiertenklassen und alle Normalteiler der Gruppen S_3 und S_4.

(Der Normalteiler der Ordnung 4 in S_4 heißt die Kleinsche Vierergruppe. Sie wurde erst in Felix Kleins Vorlesung in Leipzig in 1884 untersucht.)

(d) Sei jetzt g ein 5-Zyklus in S_5. Zeigen Sie, dass $\mathrm{C}_G(g) = \langle g \rangle$. Wieviele Konjugierten hat g in S_5? (Hinweis: $c \in \mathrm{C}_G(g) \Leftrightarrow cgc^{-1} = g$.)

Aufgabe 2.3. Zeigen Sie, dass S_4 eine Untergruppe der Ordnung d hat, für jeden Teiler d von 24. Sind alle Untergruppen gleicher Ordnung zueinander isomorph?

Aufgabe 2.4. Die Gruppe A_n ist ein Normalteiler von S_n vom Index 2; für $n \geq 3$ enthält sie alle 3-Zyklen, und für $n = 5$ enthält sie die Permutationen $(1\,2\,3\,4\,5)$ und $(1\,2)(3\,4)$ (und alle Konjugierten dieser Elemente).

(a) Wieviele Konjugierten hat ein 5-Zyklus in A_5?

(b) Zeigen Sie, dass alle 3-Zyklen in A_5 sind in A_5 konjugiert.

(c) Beschreiben Sie die Elemente der Ordnung 2 in A_5, und zeigen Sie, dass sie in A_5 konjugiert sind.

(d) Geben Sie die Längen (Kardinalzahlen) aller Konjugiertenklassen in A_n an.

(e) Beweisen Sie, dass A_5 einfach ist.

Abgabetermin. Bis zu Freitag 1.11.2019 um 12.00 Uhr in meinem **Übungs-briefkasten** (Raum A 514). Bitte die Lösungen mit Namen, Matrikelnummer und **Übungsgruppe** versehen.

Aufgabe 3.1. (a) Sei $H \leqslant G$ mit $|G\colon H| = 2$. Beweisen Sie, dass $H \lhd G$.

(b) Sei $H_i \leqslant G$ für alle i in einer Indexmenge I. Zeigen Sie, dass $\bigcap H_i \leqslant G$. Gilt die entsprechende Aussage für Normalteiler?

(c) Beschreiben Sie die Untergruppen von A_5 mit ungerader Ordnung.

Aufgabe 3.2. Seien H, K Untergruppen von G. Beweisen Sie:

(a) $|H\colon H \cap K| \leqslant |G\colon K|$, mit Geichheit dann und nur dann, wenn $G = HK$. (Betrachten Sie die Abbildung $\varphi\colon h \mapsto hK$.)

(b) $|G\colon H \cap K| \leqslant |G\colon H|\,|G\colon K|$. (Betrachten Sie die durch $g \mapsto (gH, gK)$ definierte Abbildung $\psi\colon G \to (G\colon H) \times (G\colon K)$.)

(c) Falls $|G\colon H|, |G\colon K|$ teilerfremd sind, dann gilt $|G\colon H \cap K| = |G\colon H|\,|G\colon K|$ und $G = HK$.

Aufgabe 3.3. (a) Sei $H \leqslant G$ und $X = (G\colon H)$. Für $g \in G$, sei ρ_g die Permutation $xH \mapsto gxH$. Zeigen Sie:

(i) $\rho_{g_1 g_2} = \rho_{g_1}\rho_{g_2}$ für alle $g_1, g_2 \in G$;

(ii) $\theta\colon g \mapsto \rho_g$ ist ein Homomorphismus $G \to \Sigma_X$;

(iii) $\ker\theta \leqslant H$.

(b) Sei H eine Untergruppe von G mit Index n. Beweisen Sie, dass G einen Normalteiler K hat, mit $K \leqslant H$ und $|G/K| \leqslant n!$.

Aufgabe 3.4. Sei S eine nicht-abelsche einfache Gruppe mit einer echten Untergruppe H vom Index n. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $n \geqslant 5$;

(Hinweis: einfache Untergruppen von S_4 sind abelsch.)

(b) falls $n = 5$, dann ist $S \cong A_5$;

(c) falls $n = 6$, dann ist entweder (i) $S \cong A_6$ oder (ii) $|S| \leqslant 60$.

(Hinweis: A_6 ist einfach.)

(d) (Optionell, schwieriger). Im Falle (ii) ist $S \cong A_5$.

Aufgabe 3.5. Sei G eine endliche Gruppe mit ungerader Ordnung und H eine Untergruppe ss $H \lhd G$.

Abgabetermin. Bis zum 8.11.2019 um 12.00 Uhr in meinem **Übungs**briefkasten (Raum A 514). Bitte die Lösungen mit Namen, Matrikelnummer und **Übungsgruppe** versehen.

Aufgabe 4.1. Sei G eine Gruppe mit $|G| = p^3q$ für Primzahlen p, q, $p \neq q$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Falls G genau p^3 Untergruppen der Ordnung q hat, dann hat G einen Normalteiler der Ordnung p^3.

(b) Falls G keinen Normalteiler der Ordnung q hat, dann ist q ein Teiler von $p^2 - 1$ oder $p^3 - 1$.

(c) Falls $|G| = p^3q \neq 24$, dann hat G ein Normalteiler der Ordnung p^3 oder q.

(d) Die Beschränkung $|G| \neq 24$ in (c) ist nötig.

Aufgabe 4.2. (a) Seien h, k Elemente einer endlichen Gruppe die teilerfremde Ordnungen a, b haben und die miteinander kommutieren, d.h., $hk = kh$. Beweisen Sie, dass hk die Ordnung ab hat.

(b) Sei $\rho \in \Sigma_X$ ein Produkt $\rho_1 \dots \rho_r$ von disjunkten Zyklen. Zeigen Sie, dass die Ordnung von ρ gleich dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen der Längen der Zyklen ρ_i ist.

Aufgabe 4.3. (a) Seien H, K Normalteiler von G mit $H \cap K = 1$, und seien $h \in H$, $k \in K$. Zeigen Sie, dass $hkh^{-1}k^{-1} = 1$, und dass $K \leqslant \mathrm{C}_G(H)$.

(b) Zeigen Sie, dass jede Gruppe der Ordnung 15 zyklisch ist.

(c) Zeigen Sie, dass eine nicht-zyklische Gruppe der Ordnung 21 genau 7 Untergruppen der Ordnung 3 hat.

Aufgabe 4.4. Die Gruppe G ist einfach und hat die Ordnung 168; beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) G hat genau 8 Sylow 7-Untergruppen, deren Normalisatoren die Ordnung 21 haben.

(b) G ist isomorph zu einer Untergruppe von S_8. (Hinweis: G wirkt durch Konjugation auf der Menge der Sylow 7-Untergruppen.)

(c) G hat keine Elemente der Ordnung 14 oder 21.

(d) Der Normalisator von jeder Sylow 7-Untergruppe enthält genau 7 Sylow 3-Untergruppen.

(e) G hat genau 28 Sylow 3-Untergruppen, deren Normalisatoren die Ordnung 6 haben.

Abgabetermin. Bis zum 15.11.2019 um 12.00 Uhr in meinem Briefkasten (Raum A 514). Bitte die Lösungen mit Namen, Matrikelnummer und **Übungsgruppe** versehen.

Serie 5

Aufgabe 5.1. Ein *Automorphismus* einer Gruppe G ist ein Isomorphismus $G \to G$.

(a) Zeigen Sie, dass die Menge $\mathrm{Aut}(G)$ aller Automorphismen von G eine Untergruppe von Σ_G ist.

(b) Sei G endlich und sei $K \triangleleft G$. Zeigen Sie, dass für alle $x \in G$ die Ordnung von $xK \in G/K$ die Ordnung von x teilt. Folgern Sie, dass falls $|K|$ und $|G/K|$ teilerfremd sind, dann gilt $\alpha(K) = K$ für jedes $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$.

(c) Beweisen Sie, dass für endliche Gruppen G und H von teilerfremden Ordnungen gilt $\mathrm{Aut}\,(G \times H) \cong \mathrm{Aut}\,(G) \times \mathrm{Aut}\,(H)$.

(d) Geben Sie ein Beispiel einer Gruppe an, mit einem Normalteiler der nicht für jeden Automorphismus invariant ist.

Aufgabe 5.2. (a) Listen Sie alle Untergruppen der Gruppe D_8 auf, und deuten an, welche dieser Untergruppen isomorph sind.

(b) Zeigen Sie dass für n ungerade die Gruppe D_{2n} nur eine Untergruppe vom Index 2 hat, aber dass für n gerade sie drei Untergruppen vom Index 2 hat, eine zyklische Gruppe, und zwei Diedergruppen.

(c) Beweisen Sie, dass $D_{4n} \cong D_{2n} \times C_2$ für n ungerade. (Z.B., zeigen Sie dass D_{4n} ein internes direktes Produkt ist.)

Aufgabe 5.3. (a) Für $g \in G$, sei $g^*\colon G \to G$ durch $x \mapsto gxg^{-1}$ definiert. Zeigen Sie, dass $g^* \in \mathrm{Aut}(G)$.

(b) Sei $\theta\colon G \to \mathrm{Aut}(G)$ durch $g \mapsto g^*$ definiert. Zeigen Sie, dass θ ein Homomorphismus ist. Was ist $\ker\theta$?

(c) Für $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$, $g \in G$, $x \in G$, was ist das Verhältnis zwischen $(\alpha(g))^*(x)$ und $\alpha g^* \alpha^{-1}(x)$? Zeigen Sie, dass $\mathrm{bild}\,\theta \triangleleft \mathrm{Aut}(G)$.

(d) (*Optionell*) Sei jetzt $G = S_3$. Beweisen Sie, dass jeder Automorphismus durch seine Wirkung auf den drei Transpositionen völlig bestimmt ist. Folgern Sie, dass $|\mathrm{Aut}(S_3)| \leqslant 6$. Beweisen Sie, dass $\mathrm{Aut}(S_3) \cong S_3$.

Aufgabe 5.4. (a) Seien P, Q Sylow p-Untergruppen einer endlichen Gruppe G. Beweisen Sie, dass $\mathrm{N}_G(P)$, $\mathrm{N}_G(Q)$ in G konjugiert sind.

(b) Beweisen Sie, dass eine einfache Gruppe der Ordnung 1092 genau eine Konjugiertenklasse von Untergruppen vom Index 14, aber keine Untergruppen vom Index 13 hat.

Abgabetermin. Bis zum 22.11.2019 in meinem Briefkasten (Raum A 514). Bitte die Lösungen mit Namen, Matrikelnummer und **Übungsgruppe** versehen.

Serie 6

Aufgabe 6.1. (a) Beschreiben Sie die Gruppen $\mathrm{Z}_r(D)$ der aufsteigenden Zentralreihe für die Diedergruppe $D = \langle a, b \mid a^{2^n} = b^2 = 1, bab = a^{-1} \rangle$ der Ordnung 2^{n+1}.

(b) Sei G nilpotent und $1 < K \lhd G$. Zeigen Sie, dass $K \cap \mathrm{Z}(G) \neq 1$. (Hinweis: betrachten Sie die kleinste Zahl r mit $K \cap \mathrm{Z}_r(G) \neq 1$.)

Aufgabe 6.2 (a) Beweisen Sie, dass $[uv, w] = u[v, w]u^{-1}[u, w]$ für alle Elemente u, v, w einer Gruppe G.

(b) Wir nehmen jetzt an, dass G ein Element $y \in \mathrm{Z}_2(G) \setminus \mathrm{Z}(G)$ hat. Beweisen Sie, dass die Abbildung $g \mapsto [g, y]$ ein Homomorphismus $G \to \mathrm{Z}(G)$ ist, und dass $[G, G] \neq G$.

Aufgabe 6.3. (a) Sei $K \lhd G$ und $U \lhd G/K$. Zeigen Sie, dass es einen Normalteiler $L \lhd G$ gibt mit $K \leqslant L$ und $U = L/K$.

(b) Beweisen Sie mittels des ersten Isomorphiensatzes den dritten Isomorphiensatz: Seien M, N Normalteiler von G mit $N \leqslant M$; dann gilt $M/N \lhd G/N$ und $(G/N)/(M/N) \cong G/M$.

(c) Eine (nicht notwendig endliche) Gruppe heißt *hyperabelsch*, falls jede nicht-triviale Quotientengruppe von G einen nicht-trivialen abelschen Normalteiler hat. Beweisen Sie, dass jede Quotientengruppe G/K einer hyperabelschen Gruppe G auch hyperabelsch ist.

Aufgabe 6.4. Sei $G = \langle b, d \rangle$ mit $b^2 = d^2 = 1$ und sei $a = bd$. Beweisen Sie:

(a) $A = \langle a \rangle$ ist einen Normalteiler vom Index $\leqslant 2$, und $bab = a^{-1}$.

(b) Jedes Element g von G hat die Form $b^\varepsilon a^n$ mit $\varepsilon \in \{0, 1\}$ und $n \in \mathbb{Z}$.

(c) Falls G unendlich ist, ist die obige Darstellung von g eindeutig.

(d) Falls G unendlich ist, ist $G \cong \langle \beta, \delta \rangle$, wo β, δ die Permutationen $x \mapsto -x$ und $x \mapsto 1 - x$ von $\mathbb{Z}$ sind.

(e) Falls G endlich von Ordnung $2n$ ist, ist $G \cong D_{2n}$.

Aufgabe 6.5. (Optionell). Sei K ein Körper, z.B. $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{C}$ oder der Körper $\mathbb{F}_2$ mit zwei Elementen 0,1. Zeigen Sie, dass die Menge aller invertierbaren $n \times n$ Matrizen mit Matrixmultiplikation eine Gruppe ist.

Abgabetermin. Bis zum 29.11.2019 in meinem Briefkasten (Raum A 514). Bitte die Lösungen mit Namen, Matrikelnummer und **Übungsgruppe** versehen.