12.Übung zur Vorlesung Analysis
für Grund-, Mittel- und Förderschullehramt

Mathematisches Institut, Universität Leipzig

Dozent: Dr. Jan-David Hardtke

Ausgabe: Dienstag, 21.1.2020
Abgabe: Dienstag, 28.1.2020 in der Vorlesung oder bis spätestens 13:00 Uhr im Postfach Hardtke (die Postfächer befinden sich im Raum A 514).

Wichtig: Alle Abgaben sind mit Namen, Matrikelnummer, Übungstermin und Namen des Übungsleiters zu versehen. Die Übungen müssen selbstständig bearbeitet werden (keine Partnerabgabe).

Aufgabe 1 (2+2 Punkte)**.**
1) Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$. Angenommen die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erfüllt die Differentialgleichung

$$af + (b - c)f' + cf'' = 0.$$

Wir setzen $y(x) := f(\log(x))$ für $x > 0$. Zeigen Sie, dass dann

$$ay(x) + bxy'(x) + cx^2y''(x) = 0 \quad \text{für } x > 0$$

gilt (das ist eine sogenannte homogene Euler-Differentialgleichung zweiter Ordnung).
2) Bestimmen Sie eine Lösung der Differentialgleichung

$$y(x) + \frac{x}{3}y'(x) + \frac{x^2}{3}y''(x) = 0 \quad \text{für } x > 0$$

mit $y(1) = 2$ und $y'(1) = 0$.

Aufgabe 2 (2+2 Punkte)**.**
Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte mit Hilfe der l'Hospitalschen Regeln (begründen Sie insbesondere, warum diese angewendet werden dürfen).

(a) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\cos(x^2) - 1}{\sin(\sqrt{x})}$ $\qquad$ (b) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sqrt{x}}{e^{2\sqrt{x}} - 1}$

Aufgabe 3 (2 Punkte)**.**
Zeigen Sie

$$\arctan(x) + \arctan(1/x) = \begin{cases} \pi/2 \text{ für } x > 0, \\ -\pi/2 \text{ für } x < 0. \end{cases}$$

Aufgabe 4 (3 Punkte)**.**
Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit beschränkter Ableitung f' und es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Wir setzen $f_n(x) := f(x + a_n)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$.
Zeigen Sie, dass die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f konvergiert.

Aufgabe 5 (3 Punkte)**.**
Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetiger Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, die gleichmäßig gegen eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvergiert. Ferner sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen mit Grenzwert $x \in \mathbb{R}$.
Zeigen Sie, dass dann auch $\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x)$ gilt.