Universität Leipzig
Mathematisches Institut
Dr. Jonas Hirsch
Dr. Dominik Inauen

WS2019/20

Partielle Differentialgleichungen I
Blatt 14

Aufgabe 1
Lösen Sie die folgenden nichtlinearen Gleichungen.

1. $x_1 u_{x_1} + 2x_2 u_{x_2} + u_{x_3} = 3u$ in $\mathbb{R}^3$, mit $u(x_1, x_2, 0) = g(x_1, x_2)$, wobei $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$ gegeben ist.
2. $u_{x_1} u_{x_2} = u$ in $\mathbb{R}^2$, mit $u(0, x_2) = x_2^2$.

Aufgabe 2
Wir betrachten eine quasilineare PDE 1. Ordnung in zwei Dimensionen:

$$a(x,u)u_{x_1} + b(x,u)u_{x_2} = c(x,u) \tag{1}$$

für $a, b, c \in C(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$ gegeben mit $|a| + |b| > 0$. Sei γ eine charakteristische Kurve für (1). Zeigen Sie, dass unendlich viele unterschiedliche Lösungen zu (1) existieren, welche γ enthalten.

Aufgabe 3
Sei $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ eine eingebettete C^3-Hyperfläche. Zudem sei $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ eine lokale Karte d.h.

$$\phi : U \to \phi(U) \text{ ist ein } C^3\text{-Diffeomorphismus und } \phi(\Gamma \cap U) = \{x_n = 0\} \cap \phi(U)\,.$$

1. Zeigen Sie, dass $u \in C^1(U)$ genau dann eine Lösung von
$$\begin{cases} F(x,u,Du) = 0 \text{ in } U \\ \qquad\qquad u = g \text{ auf } U \cap \Gamma \end{cases}$$
für ein gegebenes $F \in C^2(U \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ und $g \in C^1(\Gamma)$ ist, wenn $v := u \circ \phi^{-1}$ eine Lösung von
$$\begin{cases} G(x,v,Dv) = 0 \text{ in } \phi(U) \\ \qquad\qquad v = h \text{ auf } \phi(U \cap \Gamma) \end{cases}$$
für ein passendes $G \in C^2(\phi(U) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ und $h \in C^1(\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})$ ist.
2. Zeigen Sie, dass ein zulässiges Tuple von Anfangsdaten $\Gamma \ni x \mapsto (x, g(x), P(x))$[a] für F genau dann existiert, wenn ein zulässiges Tuple für G existiert.
3. Übersetzen Sie die 'nicht-charakteristische' Bedingung für G in eine 'nicht-charakteristische' Bedingung für F.

[a] d.h. $P(x) \cdot \tau = D_\tau g(x) \forall x \in T\Gamma$ und $F(x, g(x), P(x)) = 0$ auf Γ