Abgabe des Blattes in der Vorlesung am Dienstag, den 5.11.

Aufgabe 1: 3 Punkte

Seien $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. Poisson-verteilte Zufallsvariablen mit Erwartungswert λ. Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood Schätzer für λ.

Aufgabe 2: 4 Punkte

Seien $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. $\mathcal{U}_{[-\theta,\theta]}$-verteilte Zufallsvariablen, mit $\theta > 0$ unbekannt. Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood Schätzer $\widehat{\theta}$ für θ. Geben Sie die Verteilung von $\widehat{\theta}$.

Aufgabe 3: 4 Punkte

Wir beobachten eine Eigenschaft X einer Bevölkerung, die die folgende Verteilung verfolgt:

$$f_\theta(x) = \frac{\theta+1}{2}(1-|x|)^\theta \, \mathbb{1}_{\{x\in(-1,1)\}}.$$

Der Parameter $\theta \in (-1, +\infty)$ ist unbekannt. Sei $X_1, \ldots, X_n$ eine Stichprobe von dieser Bevölkerung. Geben Sie ein statistisches Modell für dieses Problem. Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood Schätzer $\widehat{\theta}$ für θ.

Aufgabe 4: 2+2+2+1 Punkte

Sei $\mathcal{M}_1 = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), (\mathcal{N}_{\mu,7}, \mu \in \mathbb{R}))$, wobei $\mathcal{N}_{\mu,7}$ die Normalverteilung mit Erwartungswert μ und mit Varianz 7 darstellt.

Wir definieren die *Fisher-Information* des Modells $\mathcal{M}_1$ durch:

$$I_{\mathcal{M}_1}(\mu) := \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\partial}{\partial\mu} \log \rho(\mu, x) \right)^2 \rho(\mu, x) \mathrm{d}x,$$

wobei $x \mapsto \rho(\mu, x)$ die Dichtefunktion von $\mathcal{N}_{\mu,7}$ ist.

i) Beweisen, dass

$$I_{\mathcal{M}_1}(\mu) = \mathbb{E}_\mu \left[\left(\frac{\partial}{\partial\mu} \log \rho(\mu, X_1) \right)^2 \right],$$

und $I_{\mathcal{M}_1}(\mu)$ berechnen.

ii) Beweisen, dass die folgende Gleichung gilt:

$$\mathbb{E}_\mu \left[\left(\frac{\partial}{\partial\mu} \log \rho(\mu, X_1) \right)^2 \right] = -\mathbb{E}_\mu \left[\frac{\partial^2}{\partial\mu^2} \log \rho(\mu, X_1) \right].$$

Daraus eine andere Weise vorschlagen, $I_{\mathcal{M}_1}(\mu)$ zu berechnen.

iii) Sei M_2 nun das Modell einer zwei-fachen Wiederholung dieses Experiments. Wie lässt sich $I_{\mathcal{M}_2}(\mu)$ berechnen, bezüglich auf $I_{\mathcal{M}_1}(\mu)$?

iv) Daraus einen Zusammenhang zwischen $I_{\mathcal{M}_n}(\mu)$ und $I_{\mathcal{M}_1}(\mu)$ beweisen, wobei M_n das Modell einer n-fachen Wiederholung des Experiments darstellt.