Wintersemester 19/20 Prof. Dr. J.S. Wilson

ALGEBRA I

Serie 7

Aufgabe 7.1. (a) Seien $R = \{a+bi \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$, $S = \{a+bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. Zeigen Sie, dass R, S Unterringe von $\mathbb{C}$ sind. Bestimmen Sie die Einheitengruppen von R und S.

(b) Sei $\mathbb{H}$ die Menge aller Matrizen $\left(\begin{smallmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{smallmatrix}\right)$ mit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{H}$ ein Unterring des Rings $M_2(\mathbb{C})$ ist, sowie ein reeller Vektorraum der Dimension 4. Beweisen Sie, dass $\mathbb{H}$ ein Schiefkörper aber kein Körper ist. Bestimmen Sie die Einheitengruppe von $\mathbb{H} \cap M_2(\mathbb{Z})$. (Hinweis: was ist $\det \left(\begin{smallmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{smallmatrix}\right)$?)

(Der Ring $\mathbb{H}$ der *reellen Quaternionen* wurde in 1843 vom irischen Mathematiker Hamilton entdeckt. Falls D ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum ist, und auch ein Schiefkörper mit $(\lambda x)y = \lambda(xy) = x(\lambda y)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und x, y, dann ist D zu $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ oder $\mathbb{H}$ isomorph.)

Aufgabe 7.2. (a) Zeigen Sie anhand von Beispielen, dass der Endomorphismenring End (A) einer additiven Abelschen Gruppe A nicht notwendig kommutativ oder nullteilerfrei ist.

(b) Sei jetzt A zyklisch. Beweisen Sie, dass End (A) kommutativ ist. Wann ist End(A) (i) ein Integritätsbereich, (ii) ein Körper?

Aufgabe 7.3. (a) Die externe direkte Summe $R_1 \oplus R_1$ zweier Ringe R_1, R_2 ist das Cartesische Produkt $R_1 \times R_2$ mit den 'offensichtlichen' Definitionen von Addition, Multiplikation und Einselement. Was sind die 'offensichtlichen' Definitionen? Verifizieren Sie die Ringaxiome für die direkte Summe.

(b) Sei $S \neq 0$ ein homomorphes Bild von einem Ring R. Für jede Eigenschaft P in der Liste unten, beweisen oder widerlegen Sie die Aussagen

(i) R hat die Eigenschaft P $\Rightarrow$ S hat P; (ii) S hat P $\Rightarrow$ R hat P.

- Kommutativität,
- Existenz von Nullteilern,
- Schiefkörper sein,
- von der Charakteristik $n \geqslant 0$ sein.

Aufgabe 7.4. Sei p eine Primzahl und sei R die Menge aller rationalen Zahlen deren Nenner nicht durch p teilbar ist. Zeigen Sie, dass R ein Unterring von $\mathbb{Q}$ ist, und dass es keine Unterringe S von $\mathbb{Q}$ gibt mit $R < S < \mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass jedes nicht-triviale Ideal die Form $p^n R$ hat für eine ganze Zahl $n \geqslant 0$.

Abgabetermin. Bis zum 6.12.2019 um 13.00 Uhr in meinem **Übungsbriefkasten.**

In diesem Blatt werden wir den berühmten Satz von Jordan und Hölder für endliche Gruppen G beweisen. Zwei Kompositionsreihen (kurz KR)

$$1 = H_n \lhd H_{n-1} \lhd \cdots \lhd H_1 \lhd H_0 = G, \tag{1}$$
$$1 = K_m \lhd K_{m-1} \lhd \cdots \lhd K_1 \lhd K_0 = G \tag{2}$$

einer Gruppe G heissen kongruent, *falls $m = n$ und es ein $\varrho \in S_n$ gibt mit $K_{\varrho(r)-1}/K_{\varrho(r)} \cong H_{r-1}/H_r$ für jedes r.*

Aufgabe 8.1. Für jede der folgenden Gruppen, finden Sie alle Kompositionsreihen, und zeigen Sie, dass sie kongruent sind:
(a) D_{10}; (b) A_4; (c) S_5; (d) $\langle u\rangle \cong C_{12}$; (e) $\langle v\rangle \cong C_{30}$; (f) D_8.

Aufgabe 8.2. Seien H_1, K_1 maximale Normalteiler einer Gruppe G (d.h. $H_1 < G$ und $H_1 < L \lhd G \Rightarrow L = G$, und ähnlich für K_1) mit $H_1 \neq K_1$, und sei $X = H_1 \cap K_1$. Beweisen Sie, dass

(a) $X \lhd G$ und $H_1 K_1 = G$;
(b) $G/K_1 \cong H_1/X$ und $K_1/X \cong G/H_1$.

Der Satz besagt, dass alle KR von G kongruent sind. Für $G = 1$ und für G einfach ist das klar, also können wir Induktion für $|G|$ anwenden.

Aufgabe 8.3. Seien (1), (2) KR für G mit $H_1 = K_1$. Beweisen Sie, unter Anwendung einer anzugebenden Induktionsannahme, dass (1), (2) kongruent sind.

Aufgabe 8.4 Jetzt seien (1), (2) KR mit $H_1 \neq K_1$, sei $X = H_1 \cap K_1$ und

$$1 = X_l \lhd X_{l-1} \lhd \cdots \lhd X_1 \lhd X_0 = X$$

eine beliebige KR für X. Zeigen Sie, dass jede der folgenden Reihen eine KR für G ist, und (unter Anwendung der Induktionsannahme) kongruent zur nachstehenden Reihe ist:

(1)
$X_l \lhd X_{l-1} \lhd \cdots \lhd X_1 \lhd X_0 \lhd H_1 \lhd G$
$X_l \lhd X_{l-1} \lhd \cdots \lhd X_1 \lhd X_0 \lhd K_1 \lhd G$
(2).

Also sind in beiden Fällen (1), (2) kongruent, und der Satz folgt.

Abgabetermin. Bis zum 13.12.2019.

Aufgabe 9.1. (a) Seien $I_1 \leqslant I_2 \leqslant I_3 \leqslant \cdots$ echte Ideale in einem Ring R. Beweisen Sie, dass auch $I = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ ein echtes Ideal ist.

(b) Sei S ein kommutativer Ring, $R \leqslant S$ ein Unterring, und $c \in S$. Beweisen Sie, dass die Abbildung $R[x] \to S, f \mapsto f(c)$ ein Ringhomomorphismus ist, und identifizieren Sie das Bild und den Kern.

Zeigen Sie, dass $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}[x]/(x^2+1)$ und $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}] \cong \mathbb{Q}[x]/(x^3-2)$.

Aufgabe 9.2. Ein Element r von einem Ring R heißt *nilpotent* falls gilt $r^n = 0$ für eine ganze Zahl n.

(a) Was sind die nilpotenten Elemente in $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/216\mathbb{Z}$?

(b) Zeigen Sie, dass für r nilpotent, $1+r$ und $1-r$ Einheiten sind.

(c) Sei jetzt R kommutativ. Zeigen Sie, dass die Menge N aller nilpotenten Elemente ein Ideal ist. Was sind die nilpotenten Elemente von R/N?

(d) Zeigen Sie, dass im Polynomring $R[x]$ das Element $1+rx$ genau dann eine Einheit ist, wenn r nilpotent ist.

Aufgabe 9.3. Ein Element r von R heißt *idempotent* falls $r^2 = r$.

(a) Was sind die idempotenten Elemente in $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$?

(b) Ein Boolescher Ring ist ein Ring in dem alle Elemente idempotent sind. Sei $R \neq 0$ ein Boolescher Ring. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(i) R ist kommutativ und $\operatorname{char} R = 2$.

(ii) Für jedes Primideal J von R ist $R/J \cong \mathbb{F}_2$.

(iii) Jedes Ideal, dass von endlich vielen Elementen erzeugt ist, ist ein Hauptideal.

Aufgabe 9.4. Sei jetzt R kommutativ mit einem Unterring isomorph zu $\mathbb{Q}$. Ein Element u von R heißt *unipotent* falls $1-u$ nilpotent ist.

(a) Zeigen Sie, dass die Menge der unipotenten Elementen eine Untergruppe der Einheitengruppe $U(R)$ von R ist.

(b) Schlagen Sie Definitionen für $\exp(x)$, $\sin(x)$, $\cos(x)$ vor, für x nilpotent. Beweisen Sie, dass $x \mapsto \exp(x)$ ein Isomorphismus von der additiven Gruppe N der nilpotenten Elemente in ein Untergruppe V von $U(R)$ ist. Was ist V und was ist die Inversenabbildung?

(c) (*Optionell*) Beweisen Sie weitere Aussagen über $\exp(x)$, $\sin(x)$, $\cos(x)$.

Abgabetermin. Bis zum 20.12.2019.

Aufgabe 10.1. (a) Geben Sie ein Primideal von $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ an, das nicht maximal ist. Warum sind alle Primideale in endlichen kommutativen Ringen maximal?

(b) Sei R ein Integritätsbereich derart, dass $R[x]$ ein Hauptidealring ist. Beweisen Sie, dass R ein Körper ist.

Aufgabe 10.2 Man zeige, dass die folgenden Bedingungen für einen kommutativen Ring R äquivalent sind:

(i) jedes Ideal hat eine endliche Erzeugendenmenge;

(ii) jede Reihe $I_1 \leqslant I_2 \leqslant \cdots \leqslant I_n \leqslant \cdots$ von Idealen wird stationär, d.h., es existiert ein n_0 mit $I_n = I_{n_0}$ für alle $n \geqslant n_0$;

(iii) jede nichtleere Menge M von Idealen hat ein maximales Element (d.h., ein $I_0 \in M$ mit der Eigenschaft dass $I \in M$, $I \geqslant I_0 \Rightarrow I = I_0$).

Geben Sie zwei verschiedene Beispiele von Ringen an, die (a) die obigen Bedingungen erfüllen, und gleichzeitig (b) die eine Menge M von Idealen besitzen, die unendlich viele maximalen Elemente von M enthält.

Aufgabe 10.3.

Sei R ein kommutativer Ring.

(a) Sei $a \in R$ und $I = \{x \in R \mid ax = 0\}$. Zeigen Sie, dass $I \lhd R$, und dass aR, R/I isomorphe additive Gruppen sind.

(b) Sei R unendlich mit der Eigenschaft dass R/I endlich ist für jedes Ideal $I \neq \{0\}$. Zeigen Sie, dass R ein Integritätsbereich ist.

(c) Sei R wieder beliebig. Sei $J \lhd R$ und $\overline{J}$ das von J erzeugte Ideal von $R[x]$; also besteht $\overline{J}$ aus allen Polynomen mit Koeffizienten aus J. Zeigen Sie, dass (i) J prim in $R \Rightarrow \overline{J}$ prim in $R[x]$ aber (ii) $\overline{J}$ ist nie in $R[x]$ maximal.

Aufgabe 10.4. Beweisen Sie die wahren Aussagen und widerlegen Sie mit Beispielen die falschen Aussagen.

(a) $R[x]$ noethersch $\Rightarrow$ R noethersch.

(b) R noethersch $\Rightarrow$ jedes homomorphe Bild von R ist noethersch.

(c) R noethersch $\Rightarrow$ jeder Unterring von R ist noethersch.

(d) Falls S ein noetherscher Unterring von R ist und F eine endliche Untermenge von R, dann ist der von $S \cup F$ erzeugte Unterring T von R noethersch.

Abgabetermin. Bis zu **Montag** 05.01.2020 um 13 Uhr (aber am besten schon in 2019).

Aufgabe 11.1. Bestimmen Sie (mit Beweisen), welche der folgenden fünf Ringe Körper, Hauptidealringe, faktorielle Ringe, Integritätsringe sind:

$$\mathbb{Z}[x],\ \mathbb{Z}[x]/(x^2+1),\ \mathbb{F}_2[x]/(x^2+1),\ \mathbb{F}_2[x]/(x^2+x+1),\ \mathbb{F}_3[x]/(x^2+x+1).$$

Aufgabe 11.2. Geben Sie Beispiele an, von

(a) einem quadratischen Polynom über $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, das mehr als zwei Nullstellen hat;

(b) einem Element von $\mathbb{Z}[\sqrt{-17}]$, das ein Produkt von zwei Irreduziblen sowie auch ein Produkt von drei Irreduziblen ist;

(c) einem Integritätsring mit Irreduziblen, in dem alle Irreduziblen assoziiert sind;

(e) einem Integritätsring J, der ein Element $a \notin \{0\} \cup U(J)$ besitzt, das kein Produkt von Irreduziblen ist. [Es gibt Unterringe von $\mathbb{R}$ mit dieser Eigenschaft.]

Aufgabe 11.3. (a) Sei $\omega = \frac{1}{2}(1+\sqrt{-3})$, und sei $R = \{a + b\omega \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. Zeigen Sie, dass R ein Ring ist. Was ist $U(R)$?

Beweisen Sie, dass R Euklidisch ist.

(b) Man kann einen ‘Euklidischen Algorithmus’ in einem Euklidischen Ring zum berechnen von ggT verwenden. Zeigen Sie wie der Vorgang verläuft, in dem Sie alle ggT von $11 + 7i$ und $18 - i$ in $\mathbb{Z}[i]$ bestimmen.

Aufgabe 11.4. (a) Bestimmen Sie die Primelementzerlegungen von:

(i) $21 - i$ in $\mathbb{Z}[i]$; (ii) $4 + 7\sqrt{2}$ in $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$; (iii) $4 - \sqrt{-3}$ in $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$.

(b) Zeigen Sie, dass $(3, 2+\sqrt{-5})$ kein Hauptideal in $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ ist.

Aufgabe 11.5. Sei p eine ungerade Primzahl. Unter Betrachtung des Ringes $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ und anderer Ringe, beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) $(p-1)! \equiv -1 \bmod p$ (‘Wilson’s Theorem’, kein Verwandter).

(b) $\exists\, k \in \mathbb{Z}$ mit $k^2 + 1 \equiv 0 \bmod p \Leftrightarrow p \equiv 1 \bmod 4$.

(c) (*Optionell*) pR ist ein Primideal in $R = \mathbb{Z} + i\mathbb{Z} \Leftrightarrow p \equiv 3 \bmod 4$.

Abgabetermin. Bis zum 10.01.2020.