

Abgabe des Blattes in der Vorlesung am Dienstag, den 22.10.

Ref: Hans-Otto Georgii, *Stochastik, Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik*, 4. Auflage, de Gruyter.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Betrachtet sei ein Zufallsgenerator, welcher bei jeder Ziehung zwischen zwei Mechanismen (mit unbekannter Wahrscheinlichkeit p bzw $1-p$) zufällig auswählt. Hierbei erzeugt der eine Mechanismus eine auf dem Intervall $[0, L]$ gleichverteilte Zufallsvariable, der zweite Mechanismus eine normalverteilte Zufallsvariable mit Varianz $\sigma^2 = 1$ und Erwartungswert μ . Die Parameter p, L, μ sind unbekannt. Stellen Sie ein statistisches Modell für die wiederholte Betätigung dieses Zufallsgenerators an und geben Sie Schätzer (mit Begründung) für alle relevanten Kenngrößen an.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei X_1, \dots, X_n i.i.d. (unabhängige und identisch verteilte, auf Englisch *independent and identically distributed*) Zufallsvariablen. Sei $\sigma^2 := \text{Var}(X_1) < +\infty$.

Sei $\bar{X} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ das Stichprobenmittel der Beobachtungen.

Beweisen Sie dass $S = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ ein erwartungstreuer Schätzer für σ^2 ist, d.h. dass für alle σ gilt $\mathbb{E}_\sigma[S] = \sigma^2$.

Aufgabe 3 (2+2+2+2 Punkte)

Ein Importeur erhält eine Lieferung von $N = 10000$ Orangen. Er möchte wissen, wieviel davon faul sind. Er nimmt eine Stichprobe von $n = 200$ Orangen: von diesen ist eine Anzahl X faul.

i) Beweisen Sie, dass

$$\sum_{k=0}^n \binom{a}{k} \binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}.$$

Hinweis: $(1+x)^{a+b}$ auf zwei verschiedenen Arten berechnen.

ii) Sei $n \leq \min(\nu, N - \nu)$ fest. Die hypergeometrische Verteilung $\mathcal{H}_{n;\nu,N-\nu}$ ist definiert durch:

$$\mathcal{H}_{n;\nu,N-\nu}(\{k\}) = \frac{\binom{\nu}{k} \binom{N-\nu}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \quad k \in \{0, \dots, n\}.$$

Beweisen Sie, dass $\mathcal{H}_{n;\nu,N-\nu}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\{0, \dots, n\}, \mathcal{P}(\{0, \dots, n\}))$ ist.

iii) Schlagen Sie ein statistisches Modell für das Problem des Orangen-Importeurs vor.

iv) Sei ein Schätzer T durch $T(X) = \frac{NX}{n}$ definiert. Berechnen Sie $\mathbb{E}_\nu[T]$. Ist T ein erwartungstreuer Schätzer für ν , d.h. dass für alle ν gilt $\mathbb{E}_\nu[T] = \nu$?