Universität Leipzig,
Mathematisches Institut,
Dr. Walter Wenzel

Probeaufgaben zu "Mathematik I für Wirtschaftswissenschaftler"

Leipzig, den 29. Januar 2020

Erlaubte Hilfsmittel: Alle schriftlichen Unterlagen, aber keine elektronischen Hilfsmittel.

Bitte lesen Sie alle Aufgaben und das Deckblatt gründlich!

Für jede Aufgabe ist ein neues Blatt zu verwenden.

Auf jeder Seite ist ein Rand von $4cm$ Breite zu lassen.

In den Endergebnissen sind etwaige Brüche entweder in Dezimalzahlen zu verwandeln oder vollständig zu kürzen.
Ferner sind alle Wurzeln zu berechnen, wenn die Ergebnisse rationale Zahlen sind.

Alle Ausführungen sind zu begründen!

1.) Ein Sparer hat an einer Bank folgende zwei Möglichkeiten, einen Betrag von 20.000 Euro für drei Jahre festzulegen:

(I) Er erhält nach den drei Jahren einmalig $6,1\%$ Zinsen.

(II) Er bekommt nach Ablauf jedes der drei Jahre jeweils Zinsen in Höhe von 2%, wobei Zinsen, die während der ersten zwei Jahre anfallen, künftig auch verzinst werden.

Entscheiden Sie – mit genauer Begründung, welches Angebot für den Sparer besser ist.

(6 Punkte)

2a) Entscheiden Sie – mit Begründung, welche der folgenden unendlichen Reihen konvergieren; dabei können alle in der Vorlesung und den Übungen hergeleiteten Ergebnisse unter Verweis verwendet werden:

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-9}{n^3+14n+5}$,

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{n^n}$.

b) Bestimmen Sie – mit Begründung – alle $x \in \mathbb{R}$, für die die folgenden unendlichen Reihen konvergieren:

iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2n-3} \cdot x^n$,

iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos(x \cdot n)}{n^2}$.

(2 + 2 Punkte +4 + 4 Punkte)

b.w.

3.) Auf dem unbeschränkten Intervall $I :=]0, \infty[$ sei $f : I \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := x^2 - 10x + 9 + 12 \cdot ln(x).$$

i) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von f, indem Sie diejenigen Intervalle angeben, auf denen f streng monoton steigend bzw. streng monoton fallend ist.

ii) Verifizieren Sie, dass f genau eine lokale Maximalstelle x_H, genau eine lokale Minimalstelle x_T und genau eine Wendestelle x_W besitzt. – Dabei sind diese drei Zahlen x_H, x_T, x_W zu berechnen; deren Funktionswerte brauchen nicht berechnet zu werden.

Verifizieren Sie jedoch die folgenden Ungleichungen:

iii) $x_H < x_W < x_T$;

iv) $0 < f(x_T) < f(x_W) < f(x_H)$.

v) Zeigen Sie, dass 1 die *einzige* Nullstelle von f ist.

(12 Punkte)

4.) Berechnen Sie – etwa mit der *L' Hospitalschen Regel* – die folgenden Grenzwerte:

i) $lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x^2-5x+6}$;

ii) $lim_{x\to 1} \frac{ln(x)}{x^5-9x+8}$;

iii) $\lim_{x\to 0} \frac{sin(3x)-3\cdot sin(x)}{x^3}$.

(3 + 3 + 4 Punkte)

5.) Beweisen Sie die folgenden Formeln durch vollständige Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$:

i) $\sum_{k=0}^{n} (2k-1)^3 = 2 \cdot n^4 - n^2 - 1$.

ii) $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$.

(4 + 4 Punkte)

6.) Ermitteln Sie – durch Angabe eines Rechenweges oder sonstige Begründung – die folgenden bestimmten Integrale:

i) $\int_0^5 (3x-6) \cdot (x^2-4x-3)^4 \, dx$,

ii) $\int_0^1 e^{\pi \cdot x} \cdot sin(2\pi \cdot x) \, dx$,

iii) $\int_{-3}^{3} \frac{sin(x)}{e^{(x^2)}-x^2} \, dx$.

In iii) ist dabei zusätzlich zu begründen, dass das angegebene Integral überhaupt definiert ist.

(4 + 4 + 4 Punkte)