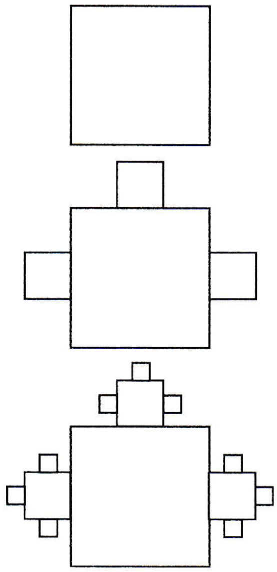
www.poenitz-net.de/Mathematik/5.Analysis/5.7.A.Folgen.pdf

5.7. Aufgaben zu Folgen und Reihen

Aufgabe 1: Lineares und beschränktes Wachstum



Aus einem Quadrat mit der Seitenlänge 1 dm gehen auf die rechts angedeutete Weise neue Figuren hervor. Die im n-ten Schritt angefügten Quadrate sind jeweils nur $\frac{1}{3}$ so breit wie die im (n − 1)-ten Schritt angefügten Quadrate.

a) Berechne den Umfang U_n nach n = 0, 1, 2, 3 und 4 Schritten.
b) Wie groß ist der Zuwachs $U_{n+1} - U_n$ des Umfangs im n+1-ten Schritt?
c) Stelle eine Formel auf, mit der sich U_{n+1} aus U_n berechnen lässt.
d) Stelle eine Formel auf, mit der sich U_n direkt aus n berechnen lässt.
e) Berechne den Flächeninhalt A_n der Figur nach n = 1, 2, 3 und 4 Schritten
f) Wie groß ist der Zuwachs $A_{n+1} - A_n$ der Fläche im n+1-ten Schritt?
g) Stelle eine Formel auf, mit der sich A_{n+1} aus A_n berechnen lässt.
h) Stelle eine Formel auf, mit der sich A_n direkt aus n berechnen lässt.

Hinweis: $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$.

i) Berechne A_{100} und U_{100} und vergleiche. Welche Aussage lässt sich aus diesem Beispiel über den Umfang und die Fläche natürlicher Gebilde wie z. B. des Landes Baden-Württemberg ableiten?
j) Berechne den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$.

Aufgabe 2: Berechnung von Folgengliedern aus gegebenen expliziten und rekursiven Formeln

Berechne die ersten 5 Folgenglieder a_0, ..., a_4:

a) $a_n = 100\cdot 2^{-n}$
b) $a_n = 100 - 50\cdot 2^{-n}$
c) $a_n = \frac{1}{n+1}$
d) $a_n = (n + 1)(n + 2)$
e) $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}$ mit $a_0 = 3$
f) $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}a_n$ mit $a_0 = 3$
g) $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}(5 - a_n)$ mit $a_0 = 3$
h) $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{20}a_n\cdot(5 - a_n)$ mit $a_0 = 3$

Aufgabe 3: Bestimmung von expliziten und rekursiven Formeln aus gegebenen Folgengliedern

Stelle die explizite und die rekursive Formel für die gegebenen Folgenglieder auf:

a) $a_0 = 1;\ a_1 = 3;\ a_2 = 5;\ a_3 = 7;\ a_4 = 9$
b) $a_0 = 3;\ a_1 = 6;\ a_2 = 12;\ a_3 = 24;\ a_4 = 48$
c) $a_0 = 2;\ a_1 = 6;\ a_2 = 18;\ a_3 = 54;\ a_4 = 162$
d) $a_0 = 2;\ a_1 = 5;\ a_2 = 10;\ a_3 = 17;\ a_4 = 26$
e) $a_0 = 0;\ a_1 = \frac{1}{2};\ a_2 = \frac{2}{3};\ a_3 = \frac{3}{4};\ a_4 = \frac{4}{5}$
f) $a_0 = 1;\ a_1 = \frac{2}{3};\ a_2 = \frac{4}{9};\ a_3 = \frac{8}{27};\ a_4 = \frac{16}{81}$
g) $a_0 = -1;\ a_1 = 1;\ a_2 = \frac{7}{5};\ a_3 = \frac{11}{7};\ a_4 = \frac{5}{3}$
h) $a_0 = 0;\ a_1 = \frac{1}{3};\ a_2 = \frac{4}{9};\ a_3 = \frac{1}{3};\ a_4 = \frac{16}{81}$

Aufgabe 4: Bestimmung von rekursiven Darstellungen aus expliziten Formeln

Gib eine rekursive Beschreibung für die folgenden Folgen an:

a) $a_n = 3n + 2$
b) $a_n = n^2 - 2n$
c) $a_n = 3^{-n}$
d) $a_n = \frac{n}{n+1}$

Aufgabe 5: Bestimmung von expliziten Formeln aus rekursiven Darstellungen

Gib eine explizite Beschreibung für die folgenden Folgen an:

a) $a_{n+1} = a_n - 3$ mit $a_0 = 2$
b) $a_{n+1} = 0{,}8\cdot a_n$ mit $a_0 = 20$
c) $a_{n+1} = a_n + 2n + 2$ mit $a_0 = 0$
d) $a_{n+1} = a_n + 2n + 1$ mit $a_0 = 0$

Aufgabe 6: Monotonie einer Folge
Untersuche die folgenden Folgen auf Monotonie und begründe anhand der Definition.

a) $a_n = \frac{n-1}{n+1}$ b) $a_n = \sqrt{n^2 - n}$ c) $a_n = n^3 - 3n^2$ d) $a_n = n^2 \cdot 2^{-n}$

Aufgabe 7: Beschränktheit einer Folge
Untersuche die folgenden Folgen auf Beschränktheit und begründe anhand der Definition.

a) $a_n = \frac{n}{n+1}$ b) $a_n = \sqrt{n^2 + n}$ c) $a_n = n^2 - n^3$ d) $a_n = n^2 \cdot 3^{-n}$

Aufgabe 8: Grenzwert einer Folge
Gib den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ an und begründe anhand der Definition.

a) $a_n = \frac{n+2}{n+1}$ b) $a_n = \frac{1}{n}\sqrt{n^2 + n}$ c) $a_n = \frac{1}{n}\sin(n)$ d) $a_n = n^3 \cdot 2^{-n}$

Aufgabe 9: Konvergenz einer Folge
Untersuche die Folge (a_n) für $n \geq 1$ mit Hilfe von Beschränktheit und Monotonie auf Konvergenz

a) $a_n = \frac{1-4n}{1+2n}$ b) $a_n = \frac{n-1}{2n}$ c) $a_n = \frac{2^n + 3^n}{2^n \cdot 3^n}$ d) $a_n = \frac{n\sqrt{n} + 10}{n^2}$

Aufgabe 10: Reihen und Summenschreibweise
Ergänze die Tabelle:

erzeugende Folge a_n	Reihe $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k$	entsprechende Funktion f(x)	Integral $\int\limits_1^{n+1} f(x)dx$
$\frac{1}{n}$			
	$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots$		
	$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots$		
		$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$	

Aufgabe 11: Arithmetische Reihe

a) Bestimme $\sum\limits_{k=0}^{20} a_k$ und $\sum\limits_{k=60}^{100} a_k$ für die Folge $a_n = 2 + \frac{n}{10}$.

b) Bestimme $\sum\limits_{k=0}^{16} a_k$ und $\sum\limits_{k=40}^{80} a_k$ für die Folge a_n mit $a_0 = 3$ und $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}$

c) Bestimme Startwert a_0 und Zuwachs d für die arithmetische Folge a_n mit $\sum\limits_{k=0}^{10} a_k = 22$ und $\sum\limits_{k=0}^{6} a_k = 7$.

d) Bestimme den Zuwachs d für die arithmetische Folge a_n mit $\sum\limits_{k=10}^{90} a_k = 31$ und Startwert $a_0 = 1$.

Aufgabe 12: Geometrische Reihe

a) Bestimme $\sum\limits_{k=0}^{20} a_k$ und $\sum\limits_{k=70}^{100} a_k$ für die Folge $a_n = 100 \cdot 0{,}9^n$.

b) Bestimme $\sum\limits_{k=0}^{10} a_k$ und $\sum\limits_{k=40}^{50} a_k$ für die Folge a_n mit $a_0 = 3$ und $a_{n+1} = 1{,}2 \cdot a_n$.

c) Bestimme Startwert a_0 und Wachstumsfaktor q für die geometrische Folge a_n mit $\sum\limits_{k=0}^{7} a_k = 641$ und $\sum\limits_{k=0}^{3} a_k = 625$.

d) Bestimme Startwert a_0 und Faktor q für die geometrische Folge a_n mit $\sum\limits_{k=0}^{4} a_k = 336{,}16$ und Grenzwert $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k = 500$

Aufgabe 13: Grenzwert einer Reihe

Untersuche die Reihe $\sum_{k=1}^{n} a_k$ mit Hilfe von Beschränktheit und Monotonie auf Konvergenz

a) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$

b) $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{(2n+1)^2}$

c) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{3^1} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{3^n}$

d) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{2n}$

Aufgabe 14: Vollständige Induktion

Beweise mit Hilfe der vollständigen Induktion:

a) $2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n(n+1)$ für $n \geq 1$

b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$ für $n \geq 1$

c) $6 + 24 + 60 + 120 + \ldots + n(n+1)(n+2) = \frac{1}{4} n(n+1)(n+2)(n+3)$

d) $x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + \ldots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ für $n \geq 0$.

e) $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots + nx^{n-1} = \frac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}$ für $n \geq 1$

f) Die Folge (a_n) mit $a_1 = 2$ und $a_{n+1} = a_n + (n+1)(n+2)$ hat die explizite Formel $a_n = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)$.

g) Die Folge (a_n) mit $a_1 = \frac{3}{4}$ und $a_{n+1} = a_n - \frac{a_n}{(3n+4)(2n+1)}$ hat die explizite Formel $a_n = \frac{2n+1}{3n+1}$.

h) 7 teilt $8^n - 1$ für $n \geq 1$

i) 6 teilt $n^3 - n$ für $n \geq 2$

j) $(1+x)^n > 1 + nx$ für $n \geq 2$, $x > -1$ und $x \neq 0$ (**Bernoulli-Ungleichung**)

Aufgabe 15: Monotonie und Beschränktheit

a) Zeige durch vollständige Induktion, dass die Folge (a_n) mit $a_0 = 3$ und $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{3}{a_n}\right)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ positiv ist

b) Zeige durch Lösen der Ungleichung $\frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{x}\right) > \sqrt{3}$, dass die Folge aus a) sogar durch $\sqrt{3}$ nach unten beschränkt ist.

c) Zeige, dass die Folge aus a) außerdem monoton fällt.

d) Bestimme den Grenzwert $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ der Folge aus a).

Hinweis: Für $n \to \infty$ gilt $a_n = a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n = a$. Man kann daher in der Rekursionsformel $a_n = a_{n+1} = a$ setzen und nach a auflösen.