Übungsblatt 7

1) Berechnen Sie folgende Grenzwerte unter Benutzung der "Algebra für Grenzwerte" und mit ausreichender Begründung.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+7}{n^3+3n-5},\ \lim_{n\to\infty}\frac{n^4+n^2}{2n^4-100n-5},\ \lim_{n\to\infty}\frac{(n+5)^7}{(n+2)^4(n+3)^3},\ \lim_{n\to\infty}\frac{2^n n^2+5^n n}{5^n(n+1)+n^7}.$$

5 Punkte

2) *Bestimmte Divergenz* Sei $(a_n)_{n=1}^\infty$ eine Folge reeller Zahlen. Wir sagen $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ (oder nur $=\infty$) wenn $\forall T\in\mathbb{R}\,\exists N\in\mathbb{N}\,\forall n\geq N : T < a_n$. Analog ist $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ wenn $\forall T\in\mathbb{R}\,\exists N\in\mathbb{N}\,\forall n\geq N : a_n < T$.
   a) Zeigen Sie $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}(-a_n) = -\infty$.
   b) Sei $a_n\to+\infty$ und $b_n\to b\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ für $n\to\infty$. Beweisen Sie $a_n+b_n\to+\infty$ und wenn $b>0$ oder $b=+\infty$ dann $a_nb_n\to+\infty$.
   c) Sei $(z_n)_{n=1}^\infty$ eine Folge komplexer Zahlen, die keine konvergente Teilfolge besitzt. Zeigen Sie $|z_n|\to\infty$ wenn $n\to\infty$.

5 Punkte

3) a) Sei $(z_n)_{n=1}^\infty$ eine konvergente Folge in $\mathbb{C}$. Zeigen Sie $\lim_{n\to\infty}|z_n| = |\lim_{n\to\infty} z_n|$.
   b) Seien $(z_n)_{n=1}^\infty$ bzw $(a_n)_{n=1}^\infty$ Folgen in $\mathbb{C}$ bzw. $(0,\infty)$ und mögen die Grenzwerte $\delta = \lim_{n\to\infty} z_{n+1}-z_n\in\mathbb{C}$ und $q=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}\in[0,+\infty]$ existieren. Zeigen Sie, dass

$$\frac{z_n}{n}\to\delta \text{ und } \sqrt[n]{a_n}\to q \text{ wenn } n\to\infty.$$

10 Punkte

4) Berechnen Sie folgende Grenzwerte
   a) $\lim_{n\to\infty}(n!)^2/(2n)!$
   b) $\lim_{n\to\infty}(n^n/n!)^{1/n}$ [*Was sagt 3.b)?*]
   c) $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ [*2. Binom. Formel könnte wieder mal helfen.*] 5 Punkte

Abgabe: am 5.12.2019, 17.10 Uhr Hörsaal 9

Die (Übungsschein-)Klausur findet am 6.2.2020 von 17-19 Uhr statt.