

Seminar - Mathe für Physiker (III)

Robert Kirschstein

WiSe 19/20

Vorbemerkung

Das Ziel des Seminars ist es die Inhalte aus der Vorlesung zu vertiefen und deren konkrete Anwendung zu diskutieren. Die aufgegebenen Übungsaufgaben, welche in den Seminaren besprochen werden, haben daher vor allem die Aufgabe den Studierenden die Möglichkeit zu bieten das Gelernte zu wiederholen, Feedback zu sammeln und aus Fehlern zu lernen. Daher ist es sehr empfehlenswert die Übungsaufgaben **alle** möglichst **selbstständig** zu bearbeiten.

Außerdem ist die Bearbeitung der Aufgaben notwendig um die Klausurzulassung zu erlangen. Dies ist allerdings keineswegs eine böse gemeinte Einschränkung, sondern hat viel mehr den Hintergrund, dass Studierende welche Schwierigkeiten haben die 50% in den Übungen zu erlangen oft auch große Schwierigkeiten haben die Klausur zu bestehen. Deswegen ist davon abzuraten Ergebnisse anderer ohne eigenen Denkprozess abzugeben.

Die Lösungen der Aufgaben werden wieder in Zukunft hier ergänzt und online zur Verfügung gestellt. In den Seminaren soll dann auf Details der Lösungen und Fragen der Studierenden eingegangen werden. Es ist empfehlenswert alle Lösungen und deren Methoden nachzuvollziehen und diese gegebenenfalls nach dem Seminar nochmals nachzuarbeiten. Sollten an irgend einem Punkt Fragen oder Unklarheiten entstehen können diese gerne im Seminar angesprochen und geklärt werden.

Die Verantwortung die Inhalte zu verstehen liegt zu großen Teilen bei den Studierenden. Wir versuchen alles so verständlich wie möglich zu machen, aber wir sind darauf angewiesen, dass Fragen gestellt und Feedback gegeben wird. Es ist unmöglich ein Thema für alle gleichzeitig vollständig zugänglich zu machen, weshalb Kompromisse gemacht werden müssen. Das heißt nicht, dass wir es nicht versuchen. Ich bitte deshalb um eure Mithilfe und euer Feedback und Verständnis.

Inhaltsverzeichnis

Serie 01: Reelle Integrale über mehrere Variablen	1
Aufgabe 1. (Prinzip des Cavalieri)	1
Aufgabe 2. (Satz von Fubini)	2
Aufgabe 3. (Die Transformationsformel)	3
Aufgabe 4. (Anwendung)	5
Serie 02: Lösungsmethoden gewöhnlicher Differentialgleichungen	6
Aufgabe 1. (Allgemeine Lösung)	6
Aufgabe 2. (Anfangswertproblem mit getrennten Variablen)	7
Aufgabe 3. (Substitution)	8
Aufgabe 4. (Anwendung)	10
Aufgabe 5.	11
Serie 03: Exakte Differentialgleichungen und der Satz von Picard-Lindelöf	13
Aufgabe 1. (Exakte Differentialgleichungen)	13
Aufgabe 2. (Lokale Eindeutigkeit von Lösungen)	17
Aufgabe 3. (Picard-Iteration)	18
Serie 04: Lineare Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen	21
Aufgabe 1. (Linear unabhängige Lösungen)	21
Aufgabe 2. (Bernoullische Differentialgleichung)	23
Aufgabe 3. (Anwendung)	26
Serie 05: Lösungsmethoden linearer Differentialgleichungen	29
Aufgabe 1. (Variation der Konstanten)	29
Aufgabe 2. (Matrix-Exponentialfunktion)	31
Aufgabe 3. (Reell- und Komplexwertige Lösungen)	33
Aufgabe 4. (Konstante Koeffizienten)	34
Serie 06: Kurvenintegrale im \mathbb{R}^n	37
Aufgabe 1. (Kurvenintegrale und Bogenlänge)	37
Aufgabe 2. (Verknüpfung von Kurven)	38
Aufgabe 3. (Konservative Vektorfelder)	39
Aufgabe 4. (Anwendung)	40
Serie 07: Oberflächenintegrale I	43
Aufgabe 1. (Exakte DGL's und konservative Vektorfelder)	43
Aufgabe 2. (Oberflächenintegrale 1)	46
Aufgabe 3. (Oberflächenintegrale 2)	48

Aufgabe 4. (Oberflächenintegrale 3)	50
Serie 08: Oberflächenintegrale II	51
Bemerkung zu Flächen im \mathbb{R}^3	51
Bemerkung zu Tangential-Ebenen und Normalenvektorfelder von Flächen	51
Aufgabe 1. (Integrierbarkeit über Flächen 1)	53
Aufgabe 2. (Integrierbarkeit über Flächen 2)	54
Aufgabe 3. (Orientierbare Flächen)	55
Serie 09: Komplexe Differenzierbarkeit und Wegintegrale . . .	57
Bemerkung zu Komplexen Zahlen	57
Aufgabe 1. (Komplexe Differenzierbarkeit)	58
Aufgabe 2. (Holomorphe Funktionen und Wegintegrale)	60
Aufgabe 3. (Komplexe Differenzierbarkeit und harmonische Funk- tionen)	62
Aufgabe 4. (Potenzreihen sind analytisch)	65
Serie 10: Komplexer Logarithmus, Cauchy-Integral und der Identitätssatz	68
Bemerkung zur komplexen Polardarstellung	68
Aufgabe 1. (Komplexer Logarithmus und komplexe Potenz)	68
Aufgabe 2. (Gauß-Integral)	70
Aufgabe 3. (Cauchy-Integralformel)	72
Aufgabe 4. (Anwendungen des Identitätssatzes)	73
Serie 11: Analytische Fortsetzungen, Pole und Laurent-Reihen 76	
Aufgabe 1. (Analytische Fortsetzung)	76
Aufgabe 2. (Nullstellen und Pole)	77
Aufgabe 3. (Laurent-Reihen)	79
Aufgabe 4. (Wiederholung: Integralsatz von Gauß)	82
Serie 12: Residuen und Anwendung für die Berechnung reel- ler Integrale	85
Aufgabe 1. (Residuen)	85
Aufgabe 2. (Berechnung reeller Integrale)	88
Aufgabe 3. (Satz von Casorati–Weierstraß)	90
Aufgabe 4. (Wiederholung: Satz von Stokes)	91
Serie 13: Fouriertransformation und partielle Differentialgleichungen	94
Aufgabe 1. (Faltung und Fouriertransformation auf $L^1(\mathbb{R}^d)$)	94
Aufgabe 2. (Dirichlet-Problem für die Kreisscheibe)	97
Aufgabe 3. (Lösung der Diffusionsgleichung)	100
Aufgabe 4. (Wiederholung: Teilchen im elektromagnetischen Feld)	101

Serie 01: Reelle Integrale über mehrere Variablen

Die erste Serie dieses Semester befasst sich mit der Integralrechnung mit mehr als einer Variablen. Dabei werden zunächst ein paar wichtige Ergebnisse, welche am Ende des letzten Semesters in der Vorlesung vorgestellt wurden, wiederholt. Anschließend werden wir eine für die Physik essentielle Formel kennen lernen, die s.g. *Transformationsformel*.

Aufgabe 1. (Prinzip des Cavalieri)

Wir berechnen zunächst die Fläche einer Menge $A \subset \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2 \text{ und } x \geq y^2\}.$$

D.h. wir wollen konkret $\lambda^2(A)$ berechnen. Da die Definition von λ sich in der Regel für konkrete Anwendungen nicht eignet verwenden wir den Zusammenhang zur Integralrechnung und das Prinzip von Cavalieri. Letzteres besagt kurz gefasst, dass das Maß einer solchen Menge sich durch Integration über die Maße der Schnitte bestimmen lässt. Wir definieren also zunächst die Schnitte von A in der Form

$$A_x = \{y \in \mathbb{R} \mid (x, y) \in A\} \subset \mathbb{R}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Nach dem Prinzip von Cavalieri gilt dann

$$\lambda^2(A) = \int_A 1 d\lambda^2 = \int \lambda(A_x) d\lambda(x)$$

Um $\lambda(A_x)$ zu bestimmen betrachten wir die Menge A genauer. Man sieht sofort, dass aus den Bedingungen für die x und y folgt, dass sowohl x als auch y positiv sein müssen. Der von den einzelnen Bedingungen jeweils ausgezeichnete Bereich wird dann von der Parabel $y = x^2$ und der Wurzel $y = \sqrt{x}$ begrenzt. Diese schneiden sich bei $(x, y) = (1, 1)$. Für ein festes x ist, dann

$$A_x = [x^2, \sqrt{x}]$$

wobei für $x \notin [0, 1]$ $A_x = \emptyset$ folgt. Das Maß der Schnitte ergibt sich entsprechend zu

$$\lambda(A_x) = \begin{cases} \sqrt{x} - x^2, & x \in [0, 1] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Damit ist

$$\lambda^2(A) = \int \lambda(A_x) d\lambda(x) = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \frac{2}{3}\sqrt{1^3} - \frac{1}{3}1^3 - 0 = \frac{1}{3}$$

Als nächstes betrachten wir zusätzlich eine Funktion auf A . Sei $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(x, y) \mapsto (x^2 + y^2)$. Wir können uns f als Höhe vorstellen. D.h. wir untersuchen eigentlich die dreidimensionale Menge

$$A_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in A, 0 \leq z \leq f(x, y)\} \subset \mathbb{R}^3$$

Wir wollen dazu das Integral

$$\int_A (x^2 + y^2) d\lambda^2(x, y)$$

berechnen, wobei wir, da $f(x, y) = x^2 + y^2$ positiv ist, das **Korollar 7.75.** verwenden können, um zu sehen, dass es sich dabei um das Volumen von A_f handelt. Wir zerschneiden dazu wieder A_f analog zu A und erhalten

$$A_{f,x} = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \in A, 0 \leq z \leq x^2 + y^2\}$$

was erneut nur für $x \in [0, 1]$ nichtleer ist. Für $y \in [x^2, \sqrt{x}]$ können wir analog zu davor einen weiteren Schnitt vornehmen, d.h. wir betrachten

$$A_{f,(x,y)} = \{z \in \mathbb{R} \mid (x, y) \in A, 0 \leq z \leq x^2 + y^2\}$$

was für $y \notin [\sqrt{x}, x^2]$ wieder leer ist. Für $(x, y) \in A$ lässt sich dies also zu

$$A_{f,(x,y)} = [0, x^2 + y^2]$$

vereinfachen. Für alle anderen (x, y) ist dieser Schnitt leer. Es folgt durch wiederholte Anwendung des Prinzips des Cavalieri

$$\begin{aligned} \lambda^3(A_f) &= \int_A (x^2 + y^2) d\lambda^2(x, y) \\ &= \int_0^1 \lambda^2(A_{f,x}) dx = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \lambda(A_{f,(x,y)}) dy dx = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2 + y^2) dy dx \end{aligned}$$

Letzteres lässt sich leicht explizit berechnen. Es ergibt sich

$$\int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2 + y^2) dy dx = \int_0^1 \left(x^2(\sqrt{x} - x^2) + \frac{1}{3}\sqrt{x^3} - \frac{1}{3}x^6 \right) dx = \frac{5}{36}$$

Aufgabe 2. (Satz von Fubini)

Als nächstes wollen wir uns mit der Integration von allgemeineren Funktionen beschäftigen.

Voraussetzung.

Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ messbar. Seien dazu $g, h : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ integrierbar und es gelte $|f(x, y)| \leq g(x)h(y)$ für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ (fast überall).

Behauptung.

$$\int f(x, y) d\lambda^2(x, y) = \int \int f(x, y) d\lambda(x) d\lambda(y) =: \int \int f(x, y) dx dy$$

Beweis. Wir wollen den Satz von Fubini benutzen um die Aussage zu zeigen, dazu muss allerdings bereits bekannt sein, dass f bzgl. λ^2 integrierbar ist. Um dies zu überprüfen verwenden wir den Satz von Tonelli zusammen mit den Voraussetzungen.

Wir betrachten also zunächst

$$\int |f| d\lambda^2$$

Da es sich bei $|f|$ automatisch um eine positive Funktion handelt können wir den Satz von Tonelli verwenden und erhalten

$$\int |f(x, y)| d\lambda^2(x, y) = \int \int |f(x, y)| d\lambda(x) d\lambda(y)$$

Aus der Monotonie des Integrals folgt damit aus $|f| \leq g h$ (fast) überall auf \mathbb{R}^2 , dass

$$\int \int |f(x, y)| d\lambda(x) d\lambda(y) \leq \int \int g(x) h(y) d\lambda(x) d\lambda(y) = \int g(x) d\lambda(x) \int h(y) d\lambda(y)$$

ist. Da g und h nach Voraussetzung integrierbar sind, ist der Ausdruck ganz rechts endlich (also $< \infty$) und damit ist f bzgl. λ^2 integrierbar. Dadurch können wir den Satz von Fubini verwenden und erhalten

$$\int f(x, y) d\lambda^2(x, y) = \int \int f(x, y) d\lambda(x) d\lambda(y) = \int \int f(x, y) d\lambda(y) d\lambda(x)$$

q. e. d.

Aufgabe 3. (Die Transformationsformel)

In der 3. Aufgabe wollen wir eine einfache Anwendung der Transformationsformel betrachten. Diese besagt wie Integrale transformiert werden müssen, wenn man das Koordinatensystem wechselt. Für Integrale mit einer Variablen haben wir dafür die Substitutionsregel. In dieser Hinsicht ist die Transformationsformel also eine Erweiterung der Substitutionsregel.

Wichtig ist sie für uns, da Probleme in der Physik sich in manchen Koordinatensystemen leichter lösen lassen als in anderen, weshalb man immer versucht ein Koordinatensystem zu finden und zu wählen, welches besonders gut zu der Problemstellung passt. Das die so gefundenen Lösungen auch in anderen Koordinaten gültig sind, z.B. im kartesischen Raum in dem sich unser Alltag abspielt, ermöglicht uns u.a. die Transformationsformel.

Wir betrachten dazu das Ellipsoid mit den Halbachsen $a, b, c > 0$

$$A = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}$$

Man erinnere sich daran, dass eine Kugel mit Radius $R > 0$ durch

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$$

gegeben ist. Bei A handelt es sich also um eine Kugel mit Radius $R = 1$, die in Richtung der Koordinatenachsen gestreckt oder gestaucht wurde. Für eine solche Kugel kennen wir das Volumen bereits. Es gilt

$$\lambda^3(B_1(0)) = \int_{B_1(0)} d\lambda^3 = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi$$

Um die Transformationsformel verwenden zu können müssen wir zeigen, dass das oben erwähnte Streckung bzw. Stauchung das betrachtete Gebiet nicht 'zu stark' deformiert. Mathematisch bedeutet dies, dass wir zwischen dem Ellipsoid A und der Kugel $B = B_1(0)$ einen Diffeomorphismus finden müssen. D.h. eine Abbildung $\Phi : A \rightarrow B$ bijektiv, wobei sowohl Φ , als auch Φ^{-1} stetig differenzierbar sein sollen. Dann gilt

$$\frac{4}{3}\pi = \int_B d\lambda^3 = \int_A |\det(D\Phi(x))| d\lambda^3(x)$$

Wir müssen also einen solchen Diffeomorphismus aufstellen, wobei wir diese Eigenschaft auch nachweisen werden, anschließend die Jakobi-Matrix berechnen und deren Absolutbetrag integrieren. Aus den Definitionen von A und B sieht man leicht, dass sich dieser Übergang durch $x \mapsto x/a, \dots, z \mapsto z/c$ realisieren lässt, d.h. wir haben

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x/a \\ y/b \\ z/c \end{pmatrix}$$

Alternativ können wir Φ als Matrix

$$T = \begin{pmatrix} 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 1/b & 0 \\ 0 & 0 & 1/c \end{pmatrix}$$

darstellen. Man überprüfe leicht, dass die Matrix

$$\tilde{T} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

die Inverse zu T definiert. Die entsprechende Abbildung $\tilde{\Phi}$ ist dann invers zu Φ , womit Φ bijektiv ist. Des Weiteren sieht man leicht, dass diese Abbildungen stetig differenzierbar sind und, dass $D\Phi(x, y, z) = T$ ist. Demnach ist Φ ein Diffeomorphismus und es folgt

$$\det(D\Phi(x, y, z)) = \det T = \frac{1}{abc}$$

und damit

$$\frac{4}{3}\pi = \int_B d\lambda^3 = \int_A |\det(D\Phi(x))| d\lambda^3(x) = \frac{1}{abc} \int_A d\lambda^3(x) = \frac{\lambda^3(A)}{abc}$$

Das gesuchte Volumen folgt zu $\lambda^3(A) = \frac{4}{3}\pi abc$.

Aufgabe 4. (Anwendung)

Zum Schluss wollen wir noch das Volumen eines Rotationskörpers bestimmen. D.h. eines Zylinders, dessen Radius entlang seiner Achse variieren kann. Sei also $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ und

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq f(z)^2\}$$

Das genaue Volumen hängt natürlich vom Verlauf der Funktion f ab, aber wir können eine allgemeine Formel zur Berechnung herleiten. Wir betrachten wieder die Schnitte

$$K_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y, z) \in K\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq f(z)^2\}$$

Bei den K_z handelt es sich offensichtlich um Kreisscheiben um die z-Achse, deren Radien von der Funktion $f(z)$ vorgegeben werden. Damit ergibt sich für jedes $z \in \mathbb{R}$

$$\lambda^2(K_z) = \pi f(z)^2$$

Nach dem Prinzip von Cavalieri ergibt sich daraus das Volumen zu

$$\lambda^3(K) = \int \lambda^2(K_z) d\lambda(z) = \pi \int f(z)^2 dz$$

Für einen Zylinder wäre $f(z) \equiv R > 0$ auf einem Intervall $[a, a + h]$ und 0 sonst. Daraus ergibt sich das gewohnte Volumen eines Zylinders

$$\lambda^3(K) = \pi R^2 \cdot h$$

Serie 02: Lösungsmethoden gewöhnlicher Differentialgleichungen

Im Folgendem wollen wir anfangen uns mit Differentialgleichungen zu beschäftigen, welche eine essentielle Rolle bei der Formulierung der Physik spielen. In dieser Serie betrachten wir dazu den, vom Prinzip her, einfachsten Fall einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung. D.h. wir wollen Differentialgleichungen betrachten, in denen nur eine unabhängige Variable x und nur Ableitungen erster Ordnung vorkommen, also Differentialgleichungen der Form

$$F(x, y, y') = 0$$

mit $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, Lösungen $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ und $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall.

Aufgabe 1. (Allgemeine Lösung)

Wir wollen zunächst sehen, wie man prinzipiell überprüft ob eine Funktion y eine Lösung darstellt und inwiefern andere Lösungen 'ähnlich' aussehen.

Voraussetzung. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und betrachte die gewöhnliche Differentialgleichung

$$F(x, y, y') := y' + 2xy = 0$$

Behauptung. Jede Lösung $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ der Differentialgleichung hat die Form $x \mapsto y_c(x) := c \exp(-x^2)$ mit $c \in \mathbb{R}$.

Beweis. Wir haben bereits einen Kandidaten für eine Lösung vorgegeben, von dem wir lediglich überprüfen müssen ob er die Differentialgleichung wirklich löst. Offensichtlich ist y überall differenzierbar (sogar beliebig) und es gilt für alle x (in I)

$$y'_c(x) = c \exp(-x^2)(-2x) = -2xy_c(x)$$

womit y_c für beliebige $c \in \mathbb{R}$ Lösung ist. Nun müssen wir noch zeigen, dass **jede** Lösung der Differentialgleichung diese Form hat. Genauer, für jede Lösung $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ existiert ein $c \in \mathbb{R}$ s.d. $y \equiv y_c$.

Um dies zu sehen betrachte also eine beliebige Lösung y und betrachte die Funktion $\tilde{c} : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\tilde{c}(x) = y(x) \exp(x^2)$. Dann ist nämlich $y(x) = \tilde{c}(x) \exp(-x^2)$. Da y nach Annahme differenzierbar ist, gilt dies auch für \tilde{c} und es gilt für jedes $x \in I$

$$\tilde{c}'(x) = y'(x) \exp(x^2) + y(x) \exp(x^2)2x$$

Da y Lösung der Differentialgleichung sein soll folgt damit

$$\tilde{c}'(x) = (-2xy(x)) \exp(x^2) + y(x) \exp(x^2)2x = 0$$

auf ganz I , womit $\tilde{c}(x) \equiv c$ für ein $c \in \mathbb{R}$ sein muss. Demnach ist

$$y(x) = c \exp(-x^2) \equiv y_c(x)$$

q. e. d.

Aufgabe 2. (Anfangswertproblem mit getrennten Variablen)

Als nächstes wollen wir eine sehr bequeme Lösungsmethode für Anfangswertprobleme kennenlernen. In Aufgabe 1 haben wir bereits gesehen, dass Lösungen in dem Sinne eindeutig sein können, dass jede Lösung auf einem Intervall die selbe Form hat. Allerdings beinhaltet diese Lösung immer noch eine unbestimmte Konstante, wodurch es insgesamt unendlich viele verschiedene Lösungen gibt.

Bei einem Anfangswertproblem wird hingegen zusätzlich eine (oder mehrere) Bedingungen vorgegeben, die eine Lösung zu erfüllen hat. Im Idealfall führt diese zusätzliche Bedingung dazu, dass nur noch eine Lösung in Frage kommt. In diesem Zusammenhang ist eine weitere wichtige Frage, die nach dem maximalen Definitionsbereich, auf dem eine Lösung existiert. In vielen Fällen lassen sich Lösungen zu Anfangswertproblemen für fast beliebige Anfangswerte finden. Allerdings sind wir nur an zusammenhängenden und differenzierbaren Lösungen interessiert, wodurch eine Lösung für ein bestimmtes Problem ggf. nur auf einem sehr kleinen Intervall sinnvoll ist.

Betrachte dazu die Differentialgleichung

$$F(x, y, y') := y' - (1 + y^2)x = 0$$

mit zwei verschiedenen Anfangsbedingungen

$$y(x_1) = 0 =: y_0 \text{ bzw. } y(x_2) = 0 = y_0$$

mit $x_1 := 0$ und $x_2 := \sqrt{\pi}$. Wir verwenden im Folgendem die praktischere Schreibweise der Differentialgleichung

$$y' = (1 + y^2)x$$

Man sieht, dass es sich hierbei um eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen handelt. Da der Ausdruck auf der rechten Seite überall stetig in sowohl x , als auch y ist, und $(1 + y^2)$ niemals 0 werden kann, können wir eine Lösung des Anfangswertproblems direkt durch Integration erhalten. Wir berechnen zunächst

$$G(y) := \int_{y_0}^y \frac{1}{1 + t^2} dt = \int_0^y \frac{1}{1 + t^2} dt$$

Mit der Substitution $t = \tan(u)$ mit $t' = 1 + \tan^2(u)$ findet man die Stammfunktion des Integrals zu $\arctan(y) + c$. Damit ist

$$G(y) = \arctan(y) - 0$$

Nach dem Satz über die Trennung der Variablen existiert dann für beide Anfangsbedingungen ein offenes Intervall, bezeichne diese mit $I_1, I_2 \subset \mathbb{R}$, s.d. die Lösungen der beiden Anfangswertprobleme $y_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}$ bzw. $y_2 : I_2 \rightarrow \mathbb{R}$ **eindeutig** durch

$$G(y_i(x)) = \int_{x_i}^x x \, dx = \frac{1}{2}(x^2 - x_i^2)$$

für $i \in \{1, 2\}$ bestimmt sind. Verwenden wir unser Ergebnis für $G(y)$ ergibt sich also

$$\arctan(y_i(x)) = \frac{1}{2}(x^2 - x_i^2)$$

Allerdings müssen wir darauf aufpassen, dass die obige Gleichung, aufgrund der Eigenschaften des Tangens, nicht für alle $x \in \mathbb{R}$ wohldefiniert ist.

Für $x_1 = 0$ folgt daher die notwendige Bedingung $\frac{1}{2}x^2 < \frac{\pi}{2}$. Der maximale Definitionsbereich der Lösung y_1 zum Anfangswertproblem $y_1(0) = 0$ ist daher durch $I_1 = (-\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi})$ gegeben. Die entsprechende Lösung lautet

$$y_1 : (-\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \tan\left(\frac{1}{2}x^2\right)$$

Für y_2 erhalten wir die Bedingung $|\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\pi| < \frac{\pi}{2}$. Die Lösung dieser Ungleichung ist die Schnittmenge aus $(-\sqrt{2\pi}, \sqrt{2\pi})$ und $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Das größte zusammenhängende Intervall, welches die Anfangsbedingung $x_2 = \sqrt{\pi}$ enthält ist demnach $I_2 = (0, \sqrt{2\pi})$ womit sich die maximale Lösung zu

$$y_2 : (0, \sqrt{2\pi}) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \tan\left(\frac{1}{2}(x^2 - \pi)\right)$$

ergibt.

Aufgabe 3. (Substitution)

Leider lässt sich die Trennung der Variablen nicht bei allen gewöhnlichen Differentialgleichungen anwenden. Bei bestimmten Differentialgleichungen ist es allerdings möglich diese Form durch eine Substitution zu erreichen. Ein allgemeines Beispiel dafür ist die eulerhomogene Differentialgleichung. Diese zeichnet sich dadurch aus, dass sie die Form

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

für irgendeine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ hat. In diesem Fall lässt sich die Differentialgleichung durch die Substitution $u = y/x$ auf eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen zurückführen. Das genaue Vorgehen sehen wir an dem Folgenden Beweis.

Voraussetzung. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall s.d. $0 \notin I$. Für eine Funktion $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ definiere

$$u_y : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } u_y(x) := \frac{y(x)}{x}$$

Behauptung. Eine Funktion $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ ist Lösung der Differentialgleichung $y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \iff u_y$ Lösung der Differentialgleichung

$$u' = \frac{f(u) - u}{x}$$

ist. Insbesondere hat letztere Differentialgleichung getrennte Variablen.

Beweis. Wir zeigen beide Richtungen der Äquivalenz. Sei also $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ Lösung von $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$. Insbesondere ist damit y differenzierbar, womit auch u_y differenzierbar ist mit $(\forall x \in I)$

$$u'_y(x) = \frac{y'(x)x - y(x)}{x^2} = \frac{y'(x) - u_y(x)}{x}$$

Da y nach Voraussetzung Lösung von $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ ist, folgt

$$u'_y(x) = \frac{y'(x) - u_y(x)}{x} = \frac{f\left(\frac{y(x)}{x}\right) - u_y(x)}{x} = \frac{f(u_y(x)) - u_y}{x}$$

womit u_y Lösung der entsprechenden Differentialgleichung ist.

Sei nun $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung von $u' = \frac{f(u) - u}{x}$. Wir definieren $y_u : I \rightarrow \mathbb{R}$ durch $y_u(x) := u(x)x$. Da u differenzierbar sein muss, folgt dies auch für y_u und es gilt für alle $x \in I$

$$y'_u(x) = u'(x)x + u(x) = \frac{f(u(x)) - u(x)}{x}x + u(x) = f(u(x)) = f\left(\frac{y_u(x)}{x}\right)$$

womit y_u ebenfalls Lösung der entsprechenden Differentialgleichung ist. *q.e.d.*

Bei der Substitution ist es wichtig zu beachten, dass man bei der Betrachtung eines Anfangswertproblems die Anfangsbedingungen entsprechend der Substitution ebenfalls transformieren muss.

Aufgabe 4. (Anwendung)

Das Ergebnis der vorherigen Aufgabe wollen wir nun Konkret anwenden. Betrachte die Differentialgleichung

$$y' = \left| \frac{y}{x} \right|$$

D.h. die zuvor betrachtete Funktion f ist durch $x \mapsto |x|$ gegeben. Dazu betrachten wir die beiden verschiedenen Anfangswerte

$$y(x_0) = 1 =: y_+ \text{ und } y(x_0) = -1 =: y_-$$

mit $x_0 = 1$. Wir können auf Intervallen, die die 0 nicht enthalten, nach Aufgabe 3, stattdessen die Differentialgleichung

$$u' = \frac{|u| - u}{x}$$

betrachten, welche getrennte Variablen hat. Aus $u = \frac{y}{x}$ ergeben sich dabei die neuen Anfangsbedingungen

$$u(x_0) = u(1) = \frac{y_+}{x_0} = 1 =: u_+ \text{ und } u(x_0) = u(1) = \frac{y_-}{x_0} = -1 =: u_-$$

Da wir den Betrag von u berücksichtigen müssen, machen wir eine Fallunterscheidung. Betrachten wir die Differentialgleichung für $u > 0$ ergibt sich $u' = 0$. Hier ist schon zu erkennen, dass dies nur für den Anfangswert u_+ eine Lösung ergeben kann, da sonst die Annahme verletzt werden muss.

Für $u < 0$ ist hingegen $u' = -2u/x$, was nur für die Behandlung des Anfangswertes u_- geeignet ist. Für ersteres folgt aus $u' = 0$, dass u die Form $u(x) = c$ mit $c \in \mathbb{R}$ haben muss. Aus der Anfangsbedingung folgt dann $u(x) = u_+ = 1$ und schließlich $y(x) = u(x)x = x$. Man überprüfe leicht, dass dies eine Lösung auf ganz \mathbb{R} ist. Damit ist die maximale eindeutige Lösung des ersten Anfangswertproblems

$$y_1 : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x$$

Für die zweite Anfangsbedingung können wir eine Lösung durch Integration erhalten. Analog zu Aufgabe 2 ergibt sich

$$G(u) := - \int_{u_-}^u \frac{1}{2t} dt = - \int_{-1}^u \frac{1}{2u} du = - \int_1^{-u} \frac{1}{2u} du = -\frac{1}{2} \log(-u)$$

für $u < 0$. Dann existiert ein offenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit der **eindeutigen** Lösung $u_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$G(u_2(x)) = \int_{x_0}^x \frac{1}{x} dx = \log(x)$$

Daraus folgt die Lösung für $x > 0$

$$u_2(x) = -\exp(-2\log(x)) = -\exp(\log(x^{-2})) = -\frac{1}{x^2}$$

Diese Lösung ist damit auf $(0, \infty)$ eindeutig bestimmt. Des Weiteren folgt, dass keine Fortsetzung der Lösung auf $(-\infty, 0]$ möglich sein kann, da u_2 in der Null divergiert. Da die Bedingung $u_2 < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gegeben ist, können wir also die maximale Lösung aus $y(x) = u(x)x$ zu

$$y_2 : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto -\frac{1}{x}$$

bestimmen (Zusatzaufgabe im Seminar).

Aufgabe 5.

Zuletzt wollen wir eine einfache aber aussagekräftige Schlussfolgerung der Argumentation aus Aufgabe 1 betrachten. Wir wollen zeigen dass die Exponentialfunktion die Eigenschaft

$$\exp(x)\exp(y) = \exp(x+y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

erfüllt. Der übliche Herangehensweise würde verlangen die Potenzreihen, welche wir benutzt haben um die Exponentialfunktion zu definieren, für beide Seiten zu betrachten, was aber vergleichsweise sehr aufwendig ist. Wir wollen dieses Ergebnis durch unsere neuen Erkenntnisse im Rahmen der Differentialgleichungen beweisen.

Behauptung. $\exp(x)\exp(y) = \exp(x+y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

Beweis. In der Vorlesung wurde, ähnlich zu Aufgabe 1, gezeigt, dass alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = y$$

die Form $y(x) = c\exp(x)$ mit $c \in \mathbb{R}$ haben (maximaler Definitionsbereich ist hier ganz \mathbb{R}). Für das Anfangswertproblem $y(0) = y_0$, $y_0 \in \mathbb{R}$, ergibt sich daraus die **eindeutige** Lösung $y(x) = y_0\exp(x)$.

Um die Aussage zu zeigen wollen wir dies benutzen um zu sehen, dass beide Seiten oben, als Lösungen des selbigen Anfangswertproblems, gleich sein müssen. Seien dazu $y \in \mathbb{R}$ beliebig. Wir setzen $y_0 := \exp(y)$ und definieren die beiden Funktionen

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto y_0\exp(x) = \exp(y)\exp(x)$$

und

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \exp(x+y)$$

Wie wir bereits wissen ist f die maximale eindeutige Lösung des Anfangswertproblems $y = y'$, $y(0) = y_0$. Allerdings ist g ebenfalls differenzierbar und für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$g'(x) = (\exp(x + y))' = \exp(x + y) = g(x)$$

Dazu ist $g(0) = \exp(y) = y_0$, womit g ebenfalls das Anfangswertproblem löst. Aus der Eindeutigkeit der Lösung folgt $\exp(x + y) = y_0 \exp(x) = \exp(y) \exp(x)$. *q.e.d.*

Serie 03: Exakte Differentialgleichungen und der Satz von Picard-Lindelöf

In dieser Serie wollen wir uns vor allem eine Möglichkeit anschauen Anfangswertprobleme von gewöhnlichen Differentialgleichungen auf Lösbarkeit und Eindeutigkeit zu untersuchen, den s.g. Satz von Picard-Lindelöf.

Aufgabe 1. (Exakte Differentialgleichungen)

Bevor wir uns dem Satz von Picard-Lindelöf widmen, wollen wir noch einen weiteren Typ von gewöhnlichen Differentialgleichungen kennenlernen. Eine Differentialgleichung heißt exakt, falls sie die Form

$$p(x, y) + q(x, y)y' = 0$$

hat ($p, q : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $D \subset \mathbb{R}^2$ offen) und es eine stetig differenzierbare Funktion $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, s.d. $\partial_x F = p$ und $\partial_y F = q$ ist. Im ideellen Fall lassen sich für solche Differentialgleichungen relativ leicht Lösungen finden.

Sei y eine Funktion (mit geeigneten Definitions- und Wertebereich) s.d. $F(x, y(x)) = c$, für $c \in \mathbb{R}$ und x in einem offenen Intervall, gilt. D.h. y löst die implizite Gleichung $F(x, y) = c$. Dann ist y Lösung der exakten Differentialgleichung

$$\partial_x F(x, y) + \partial_y F(x, y)y' = p(x, y) + q(x, y)y' = 0$$

Man kann zeigen, dass jede Lösung einer solchen Differentialgleichung auch Lösung einer entsprechenden impliziten Gleichung sein muss.

Betrachte als Beispiel die Differentialgleichung

$$-\sin(x)e^{-y} + (e^y - \cos(x)e^{-y})y' = 0$$

Wir wollen eine Lösung für das Anfangswertproblem $y(0) = 0$ finden, indem wir die zuvor genannten Zusammenhänge verwenden. Dazu müssen wir zunächst zeigen, dass die Differentialgleichung exakt ist. Wählt man

$$p(x, y) = -\sin(x)e^{-y}; \quad q(x, y) = e^y - \cos(x)e^{-y}$$

wird sofort ersichtlich, dass die Differentialgleichung die richtige Form hat. Allerdings müssen wir noch eine entsprechende Potentialfunktion F finden um zu zeigen, dass die Differentialgleichung wirklich exakt ist. Das typische Vorgehen dazu ist wie folgt.

Aus der Bedingung $\partial_x F(x, y) = p(x, y) = -\sin(x)e^{-y}$ folgt, dass, falls es existiert, F die Form

$$F(x, y) = \cos(x)e^{-y} + c(y)$$

haben muss. Das $c(y)$ ist erstmal eine beliebige Funktion von y , welche durch die Ableitung nach x verschwinden würde.

Die zweite notwendige Bedingung ist $\partial_y F(x, y) = q(x, y) = e^y - \cos(x)e^{-y}$. Hieraus folgt, dass F die Form

$$F(x, y) = e^y + \cos(x)e^{-y} + \tilde{c}(x)$$

haben muss. Schaffen wir es durch geschickte Wahl von $c(y)$ und $\tilde{c}(x)$, dass F beide Bedingungen erfüllt, haben wir eine Potentialfunktion gefunden. In diesem Fall folgt offensichtlich $\tilde{c}(x) \equiv 0$ und $c(y) = e^y$. Eine, offensichtlich stetig differenzierbare, Potentialfunktion lautet daher

$$F(x, y) = e^y + \cos(x)e^{-y}$$

womit die Differentialgleichung exakt ist. Wir wollen dies benutzen um eine Lösung für das Anfangswertproblem $y(0) = 0$ zu finden. Falls es so eine Lösung gibt, muss diese, wie zuvor diskutiert

$$F(x, y(x)) = c$$

für ein festes $c \in \mathbb{R}$ erfüllen. Da dies insbesondere auch für den Anfangswert erfüllt sein muss, können wir so das konkrete $c \in \mathbb{R}$ direkt bestimmen. Es gilt

$$F(0, y(0)) = F(0, 0) = \cos(0)e^0 + e^0 = 2 =: c$$

Statt die Differentialgleichung direkt zu betrachten, können wir nun versuchen differenzierbare Funktionen $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ (I ein offenes Intervall s.d. $0 \in I$) zu finden, s.d. y die implizite Gleichung $F(x, y(x)) = 2$ löst. Ein solches y ist dann automatisch Lösung der Differentialgleichung. Dazu suchen wir erstmal die komplette Lösungsmenge der Gleichung $F(x, y) = 2$ und versuchen anschließend ein oder mehrere differenzierbare Funktionen y zu konstruieren. Es gilt

$$F(x, y) = e^y + \cos(x)e^{-y} \stackrel{!}{=} 2 \iff (e^y)^2 - 2e^y + \cos(x) = 0$$

Mit der Substitution $z = e^y > 0$ erhalten wir die quadratische Gleichung mit den Lösungen

$$z = e^y = 1 \pm \sqrt{1 - \cos(x)}$$

Daraus ergeben sich die zwei Lösungen

$$y_+ = \log\left(1 + \sqrt{1 - \cos(x)}\right)$$

für beliebige x und

$$y_- = \log\left(1 - \sqrt{1 - \cos(x)}\right)$$

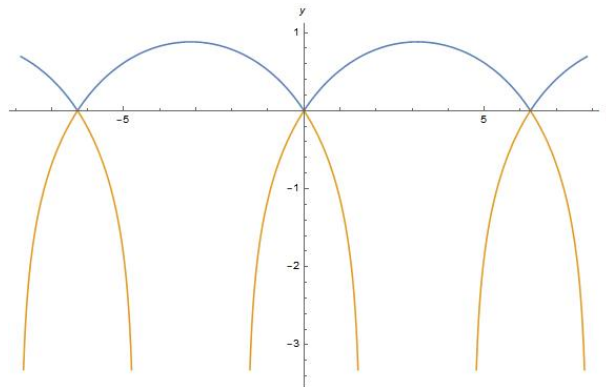
was aufgrund des Logarithmus nur für

$$\begin{aligned}
 1 - \sqrt{1 - \cos(x)} > 0 &\iff 1 > \sqrt{1 - \cos(x)} \\
 &\iff 1 > 1 - \cos(x) \\
 &\iff \cos(x) > 0 \\
 &\iff x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(2\pi k - \frac{\pi}{2}, 2\pi k + \frac{\pi}{2}\right) =: D_-
 \end{aligned}$$

mit

$$D_- = \dots \cup \left(-\frac{5}{2}\pi, -\frac{3}{2}\pi\right) \cup \left(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right) \cup \left(\frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi\right) \cup \dots$$

wohldefiniert ist. Die Lösungsmenge sieht dann wie folgt aus.



In Blau: $y_+(x)$, in Orange: $y_-(x)$

Am Bild erkennt man sofort, dass alle 'genügend glatten' und zusammenhängenden Lösungen entlang der Bögen verlaufen müssen. Als maximale Lösungen, die das AWP erfüllen, kommen daher nur

$$\begin{aligned}
 y_1 : \left(-\frac{5}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right) &\rightarrow \mathbb{R} \\
 x \mapsto \begin{cases} y_-(x), & x \in \left(-\frac{5}{2}\pi, -2\pi\right] \\ y_+(x), & x \in [-2\pi, 0] \\ y_-(x), & x \in \left[0, \frac{1}{2}\pi\right) \end{cases}
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 y_2 : \left(-\frac{1}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi\right) &\rightarrow \mathbb{R} \\
 x \mapsto \begin{cases} y_-(x), & x \in \left(-\frac{1}{2}\pi, 0\right] \\ y_+(x), & x \in [0, 2\pi] \\ y_-(x), & x \in \left[2\pi, \frac{5}{2}\pi\right) \end{cases}
 \end{aligned}$$

in Frage. Man sieht leicht, dass die y_1 und y_2 im Inneren, der in der Definition aufgeführten Intervalle, differenzierbar sind. Für die Randpunkte $-2\pi, 0$ und 2π müssen wir dies überprüfen, wobei es genügt nur die Stelle 0 explizit zu betrachten. Die anderen beiden Punkte folgen dann aus der Periodizität.

Da der Logarithmus in y_+ und y_- an der Stelle 1 bekanntermaßen differenzierbar ist, reicht es mit der Kettenregel zu zeigen, dass die aus

$$g_+(x) := \sqrt{1 - \cos(x)}, \text{ bzw. } g_-(x) := -\sqrt{1 - \cos(x)}$$

zusammengeführten Funktionen in 0 (bzw. $\pm 2\pi$) ebenfalls differenzierbar sind. Dazu setzen wir voraus, dass der folgende Grenzwert bekannt ist

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1 - \cos(h)}}{h} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \left(\lim_{h \rightarrow 0^+} \text{ heißt } h \text{ gegen Null von oben} \right)$$

Man überprüfe daraus hervorgehend (mit $\cos(h) = \cos(-h)$ und $g_+ = -g_-$)

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{g_+(h) - g_+(0)}{h} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{g_+(h) - g_+(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{g_+(-h) - g_+(0)}{-h} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{g_-(h) - g_-(0)}{h} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{g_-(h) - g_-(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{g_-(-h) - g_-(0)}{-h} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Demnach sind die Funktionen

$$g_1(x) := \begin{cases} g_+(x), & x \leq 0 \\ g_-(x), & x \geq 0 \end{cases}$$

und

$$g_2(x) := \begin{cases} g_-(x), & x \leq 0 \\ g_+(x), & x \geq 0 \end{cases}$$

in 0 differenzierbar, da die Grenzwerte des Differentialquotienten von beiden Seiten existieren und übereinstimmen. Nach der Kettenregel sind damit auch y_1 und y_2 in 0 differenzierbar und durch die Periodizität von \cos folgt, dass y_1 in -2π und y_2 in 2π differenzierbar sind. Damit sind alle maximalen Lösungen des Anfangswertproblems durch y_1 und y_2 bestimmt.

Aufgabe 2. (Lokale Eindeutigkeit von Lösungen)

Bisher haben wir stets angenommen, dass wir immer nur eine abhängige Variable y und auch nur Ableitungen erster Ordnung betrachten. Stattdessen können wir aber auch den Fall betrachten, dass $y \in \mathbb{R}^n$ ist, wodurch wir schnell ein ganzes System an Differentialgleichungen bekommen können. Wir betrachten für $a \in \mathbb{R}^n$ und $\|\cdot\|$ die Standardnorm die Differentialgleichung

$$y' = \|y\|a$$

Bei genauerer Betrachtung sieht man, dass es sich hierbei um n gekoppelte Differentialgleichungen $y'_i = \|y\|a_i$ handelt. In vielen Fällen kann es schwierig sein solche Differentialgleichungen zu lösen. Wir können aber auch ohne Lösungen explizit zu finden zeigen, ob diese (lokal) existieren und ob sie eindeutig sind.

Behauptung. *Die Differentialgleichung $y' = \|y\|a$ hat für beliebige Anfangsbedingungen eine (lokal) eindeutige Lösung.*

Beweis. Für den Beweis wollen wir den Satz von Picard-Lindelöf verwenden. Sei $y(x_0) = y_0 \in \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathbb{R}$ ein beliebiges Anfangswertproblem für die gegebene Differentialgleichung. Wir definieren

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (x, y) \mapsto f(x, y) := \|y\|a$$

Da f stetig ist (da insbesondere jede Norm stetig ist), reicht es zu zeigen, dass f bzgl. y in (x_0, y_0) eine lokale Lipschitzbedingung erfüllt. D.h. wir müssen eine Umgebung U von (x_0, y_0) finden, s.d. auf dieser Umgebung für ein festes $L \in \mathbb{R}$ gilt

$$\|f(x, y) - f(x, \tilde{y})\| \leq L\|y - \tilde{y}\| \quad \forall (x, y), (x, \tilde{y}) \in U$$

Sei $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und setze $L = \|a\|$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|f(x, y) - f(x, \tilde{y})\| &= \left\| \|y\|a - \|\tilde{y}\|a \right\| = \|a\| \left| \|y\| - \|\tilde{y}\| \right| \\ &\leq \|a\| \|y - \tilde{y}\| = L\|y - \tilde{y}\| \quad \forall y, \tilde{y} \in \mathbb{R}^n \text{ und } x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

wobei wir die umgekehrte Dreiecksungleichung verwendet haben. Damit erfüllt f eine (sogar globale) Lipschitzbedingung. Nach dem Satz von Picard-Lindelöf gibt es dann ein $\epsilon > 0$ s.d. das betrachtete AWP eine eindeutige Lösung $y : (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$ besitzt. *q. e. d.*

Da wir sogar eine globale Lipschitzbedingung gezeigt haben, lässt sich mit etwas mehr Arbeit aus dem Satz von Picard-Lindelöf auch zeigen, dass jedes AWP in diesem Fall eine eindeutige **maximale** Lösung besitzt. Hier war aber nur nach der **lokalen** Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen gefragt.

Aufgabe 3. (Picard-Iteration)

Die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen von Anfangswertproblemen wird bei dem Satz von Picard-Lindelöf mithilfe des Fixpunktsatzes bewiesen. D.h. man konstruiert sich eine kontraktive Abbildung T auf einer abgeschlossenen Teilmenge X eines Banachraums von Funktionen $C(I)$ (I ein abgeschlossenes Intervall, welches x_0 des AWP's enthält). Die genaue Form von X ist für uns nicht weiter wichtig. Dann lässt sich zeigen, dass bei der richtigen Wahl von T dessen eindeutiger Fixpunkt Lösung des Anfangswertproblems ist. Wie auch schon beim Fixpunktsatz lässt sich hieraus ein iteratives Verfahren zur Approximation von Lösungen ableiten.

Betrachte ein Anfangswertproblem

$$y' = f(x, y)$$

mit $y(x_0) = y_0$, wobei f eine lokale Lipschitzbedingung in (x_0, y_0) bzgl. y erfülle. Sei $\varphi_0 \in X$ eine beliebige 'Start'-Funktion. Wir können davon ausgehend eine Funktionen-Folge definieren

$$\varphi_i = T(\varphi_{i-1})$$

mit

$$\varphi_i(x) := y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi_{i-1}(t)) dt$$

Der rechte Ausdruck ist so zu verstehen, dass das Resultat der Integration eine Funktion von x bildet. Anders gesagt, falls für (jedes) φ_i das entsprechende $f(t, \varphi_i(t))$ eine Stammfunktion F_i hat, dann gilt

$$\varphi_i(x) = y_0 + F_{i-1}(x) - F_{i-1}(x_0)$$

bzw.

$$\varphi_i'(x) = F_{i-1}'(x) = f(x, \varphi_{i-1}(x))$$

Die auf diese oder ähnliche Weise definierten Folgen heißen Picard-Iterierte und konvergieren für beliebige Startpunkte $\varphi_0 \in X$ gleichmäßig gegen die Lösung des betrachteten Anfangswertproblems, solange f eine lokale Lipschitzbedingung bzgl. y in (x_0, y_0) erfüllt.

Wir wollen dieses Verfahren für ein Anfangswertproblem mit drei verschiedenen Startpunkten ausprobieren. Betrachte dazu

$$y' = f(x, y) := \sqrt{|y|}$$

mit $y(0) = 0$. In der Vorlesung wurde bereits gezeigt, dass dieses AWP **keine** lokale Lipschitzbedingung bzgl. y erfüllen kann (*Beispiel 8.31.*).

Trotzdem können wir versuchen das eben besprochene Verfahren anzuwenden. Die Bedingung der 'Lipschitz-Eigenschaft' war nur notwendig um die Konvergenz der Picard-Iterierten zu garantieren. Finden wir eine Folge die gleichmäßig konvergiert erhalten wir so trotzdem einen Fixpunkt von T und damit eine Lösung des AWP, die aber gegebenenfalls nicht mehr eindeutig sein muss.

Als erstes betrachten wir den Startpunkt $\psi_0(x) \equiv 0$. Dann folgt

$$\psi_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \psi_0(t)) dt = \int_0^x \sqrt{|\psi_0(t)|} dt = \int_0^x \sqrt{|0|} dt = 0 \equiv \psi_0(x)$$

für beliebige $x \in \mathbb{R}$. Induktiv folgt, dass ψ_i für alle $i \in \mathbb{N}$ identisch Null sein muss. Selbstverständlich konvergiert diese Folge gleichmäßig gegen die Nullfunktion $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto y(x) = 0$. Man überprüfe leicht, dass y das Anfangswertproblem erfüllt.

Als nächstes betrachten wir die Startfunktion $\varphi_0(x) = x^2$. Man sieht leicht, dass $|x^2| = x^2 \forall x \in \mathbb{R}$ ist. Dann ist

$$\varphi_1(x) = \int_0^x \sqrt{|\varphi_0(t)|} dt = \int_0^x |t| dt = \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}\varphi_0(x)$$

und analog

$$\varphi_2(x) = \int_0^x \sqrt{|\varphi_1(t)|} dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^x \sqrt{|\varphi_0|} dt = \frac{1}{2\sqrt{2}}x^2 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\varphi_0(x)$$

Spätestens ab hier ist ein klarer Trend zu erkennen. Induktiv zeigt man leicht: falls $\varphi_i = a \cdot \varphi_0$ für ein $a > 0$, dann ist $\varphi_{i+1} = \frac{\sqrt{a}}{2}\varphi_0$. Entsprechend folgt $\varphi_{i+2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{a}}{2}}\varphi_0$ usw.

Wiederum induktiv lässt sich daraus ableiten, dass

$$\varphi_i(x) = x^2 \prod_{k=0}^{i-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{-k}} = x^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{\sum_{k=0}^{i-1} \frac{1}{2^k}}$$

Beweis. Der Induktionsanfang folgt aus der obigen Betrachtung. Der Induktionsschritt lautet dann:

Sei für ein $i \in \mathbb{N}$, φ_i wie in der Behauptung. Dann ist mit

$$a_i := \prod_{k=0}^{i-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{-k}}$$

$\varphi_i = a_i \cdot \varphi_0$. Wie bereits diskutiert ist dann

$$\varphi_{i+1} = \frac{\sqrt{a_i}}{2}\varphi_0$$

mit

$$\frac{\sqrt{a_i}}{2} = \frac{\sqrt{\prod_{k=0}^{i-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{-k}}}}{2} = \frac{\prod_{k=0}^{i-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{-(k+1)}}}{2} = \frac{\prod_{k=1}^i \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{-k}}}{2} = \prod_{k=0}^i \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{-k}}$$

wobei letzteres $= a_{i+1}$ ist. Es folgt $\varphi_{i+1} = a_{i+1} \cdot \varphi_0$. *q.e.d.*

Mit der oben bereits angedeuteten Identität, welche lediglich auf den Rechenregeln für Potenzen und Produkte basiert

$$\prod_{k=0}^{i-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{-k}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sum_{k=0}^{i-1} \frac{1}{2^k}}$$

folgt der punktweise Grenzwert (aus der geometrischen Reihe)

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \varphi_i(x) = \lim_{i \rightarrow \infty} x^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{\sum_{k=0}^{i-1} \frac{1}{2^k}} = x^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}} = x^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{4}$$

Die gleichmäßige Konvergenz, die in diesem Fall nicht gefragt war, lässt sich daraus leicht zeigen, indem man die φ_i auf ein kompaktes Intervall einschränkt, welches $x_0 = 0$ als inneren Punkt hat. Des Weiteren überprüfe man leicht, dass $x^2/4$ das Anfangswertproblem erfüllt.

Ohne weitere Arbeit sieht man, dass das obige Argument auch für $\tilde{\varphi}_0(x) = -x^2$ funktioniert, womit die entsprechende Picard-Iteration ebenfalls konvergiert.

Ein weiteres, nun triviales, Beispiel ist die Folge mit dem Startpunkt $\tilde{\varphi}_0(x) = \frac{x^2}{4}$, was zu einer Folge führt, von der jedes Glied gleich $\tilde{\varphi}_0$ ist.

Mit ein wenig mehr Rechnung kann man auch zeigen, dass die Picard-Iterierten des Startpunkts $\phi(x) = x$ gegen $\varphi(x) = \frac{x^2}{4}$ konvergieren.

Serie 04: Lineare Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen

In dieser Serie wollen wir uns mit einem weiteren wichtigen Typ von Differentialgleichungen beschäftigen, den so genannten Linearen Differentialgleichungen. Sei I wie immer ein offenes Intervall und $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}, b : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ Funktionen. Dann ist

$$y' = A(x)y + b(x)$$

ein System von Differentialgleichungen (A ist für jedes x eine Matrix). Dieses System heißt linear, da es die Form eines gewöhnlichen linearen Gleichungssystems hat, wobei sich viele der Erkenntnisse übertragen lassen.

Betrachten wir z.B. ein homogenes System (d.h. $b \equiv 0$), dann sind Linearkombinationen von Lösungen wieder Lösungen. Tatsächlich bildet der Raum aller Lösungen eines homogenen Systems einen n dimensionalen Vektorraum, d.h. man kann genau n linear unabhängige Lösungen finden. Des Weiteren erfüllen lineare Systeme stets überall eine lokale Lipschitzbedingung (Vorausgesetzt A und b sind stetig) wodurch es für jedes Anfangswertproblem eindeutig bestimmte maximale Lösungen gibt.

Aufgabe 1. (Linear unabhängige Lösungen)

In der ersten Aufgabe wollen wir uns damit beschäftigen, wie die lineare Unabhängigkeit von Lösungen eines homogenen Systems verstanden werden kann.

Voraussetzung. Sei I ein offenes Intervall, $x_0 \in I, A : I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ stetig und $y_1, \dots, y_k : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lösungen von $y' = A(x)y$.

Behauptung. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (i) Die Vektoren: $y_1(x), \dots, y_k(x) \in \mathbb{R}^n$ sind linear unabhängig $\forall x \in I$
- (ii) Die Vektoren: $y_1(x_0), \dots, y_k(x_0) \in \mathbb{R}^n$ sind linear unabhängig für $x_0 \in I$
- (iii) Die Vektoren: $y_1(x), \dots, y_k(x) \in \mathbb{R}^n$ sind linear unabhängig für irgend-ein $x \in I$
- (iv) Die Funktionen: $y_1, \dots, y_k \in \mathbf{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$ sind linear unabhängig.

Beweis. Wir zeigen die Behauptung durch einen Ringschluss. D.h. anstatt alle paarweisen Äquivalenzen einzeln zu zeigen, beweisen wir die Folgende Implikationskette

$$(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (i)$$

Dadurch lässt sich jede der Aussagen aus jeder anderen Aussage Schlussfolgern, womit alle äquivalent sein müssen.

- (I) Wir zeigen also zuerst $(i) \Rightarrow (ii)$. Es seien $y_1(x), \dots, y_k(x) \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig $\forall x \in I$. Da $x_0 \in I$ ist sind damit insbesondere $y_1(x_0), \dots, y_k(x_0) \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig.
- (II) Es seien nun $y_1(x_0), \dots, y_k(x_0) \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig für $x_0 \in I$. Dann existiert offensichtlich ein $x \in I$ (setze $x = x_0$) s.d. $y_1(x), \dots, y_k(x) \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig sind.
- (III) Seien $y_1(x), \dots, y_k(x) \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig für irgendein $x \in I$. Wir erinnern uns was lineare Unabhängigkeit für Funktionen bedeutet. Die $y_1, \dots, y_k \in \mathbf{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$ heißen linear unabhängig, falls

$$a_1 y_1 + \dots + a_k y_k = 0, a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R} \implies a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0$$

wobei die erste Gleichung punktweise zu verstehen ist, d.h.

$$a_1 y_1 + \dots + a_k y_k = 0 \iff a_1 y_1(x) + \dots + a_k y_k(x) = 0 \forall x \in I$$

Der Unterschied zur Aussage in (i) ist, dass in (i) sich die Koeffizienten a_i von Punkt zu Punkt unterscheiden können, während hier für alle Punkte x die selben a_i zu betrachten sind.

Wir wollen zeigen, dass die lineare Unabhängigkeit von $y_1(x), \dots, y_k(x)$ für ein $x \in I$ die von y_1, \dots, y_k impliziert. Sei also $a_1 y_1 + \dots + a_k y_k = 0$. Dann ist insbesondere $a_1 y_1(x) + \dots + a_k y_k(x) = 0$. Aus der Annahme folgt, dass $a_1 = \dots = a_k = 0$ ist. Dies gilt dann automatisch für alle anderen $x \in I$ und die y_1, \dots, y_k sind linear unabhängig.

- (IV) Zum Schluss zeigen wir $(iv) \Rightarrow (i)$. Seien dazu y_1, \dots, y_k linear unabhängig, $\hat{x} \in I$ beliebig und es sei

$$a_1 y_1(\hat{x}) + \dots + a_k y_k(\hat{x}) = 0$$

Wir wissen, da es sich bei den y_i um Lösungen des homogenen System $y' = A(x)y$ handelt, dass

$$\tilde{y} := a_1 y_1 + \dots + a_k y_k$$

wieder eine Lösung ist. Aus der Annahme folgt dann, dass $\tilde{y}(\hat{x}) = 0$ ist. Wir wissen aber auch, dass die Lösung der Differentialgleichung zum Anfangswert $y(\hat{x}) = 0$ eindeutig sein muss, was offensichtlich auch von $y \equiv 0$ erfüllt wird. Es folgt, dass $\tilde{y}(x) = 0 \forall x \in I$ sein muss. Wir haben also

$$\tilde{y} = a_1 y_1 + \dots + a_k y_k = 0$$

womit aus der linearen Unabhängigkeit der y_i folgt, dass $a_1 = \dots = a_k = 0$ ist, womit die $y_1(\hat{x}), \dots, y_k(\hat{x})$ linear unabhängig sind. *q.e.d.*

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass zwei maximale Lösungen eines linearen Systems identisch sind, sobald sie sich in einem Punkt schneiden, was aus der Eindeutigkeit der maximalen Lösung folgt. Wir können dies zusammen mit den eben gewonnenen Erkenntnissen verwenden um folgende Aussage zu zeigen.

Behauptung. *Es gibt **kein** homogenes System erster Ordnung, s.d. die Funktionen $y_1, y_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$*

$$y_1(x) := \begin{pmatrix} \cos(x) \\ \sin(x) \end{pmatrix}; \quad y_2(x) := \begin{pmatrix} \sin(x) \\ \cos(x) \end{pmatrix}$$

Lösungen sind.

Beweis. Angenommen so ein System existiert. Wir betrachten die Stelle $x_0 = 0$. Dann ist $y_1(x_0) = e_1$ und $y_2(x_0) = e_2$ (e_1 und e_2 die Standardbasis von \mathbb{R}^2). Es folgt aus dem vorherigen Teil, dass die y_1 und y_2 , als Funktionen, linear unabhängig sein müssen. Allerdings gilt z.B. für $x = \pi/4$, dass

$$y_1(x) = y_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

wonach $y_1 \equiv y_2$ folgt, was aber ein Widerspruch ist, da wir gezeigt haben, dass sie linear unabhängig sein müssen. Sie können also nicht beide Lösung des selben homogenen Systems sein. *q.e.d.*

Aufgabe 2. (Bernoullische Differentialgleichung)

Als nächstes betrachten wir mal wieder einen speziellen Typ gewöhnlicher Differentialgleichungen, die mittels einer Substitution auf eine, gegebenenfalls inhomogene, lineare Differentialgleichung zurückgeführt werden können. Eine Bernoullische Differentialgleichung hat die Form

$$y' + p(x)y + q(x)y^n = 0$$

wobei hier $n \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}$ und $p, q : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar sein sollen (I ist wie immer ein nicht triviales offenes Intervall). Wir betrachten zunächst die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

Behauptung. *Die obige Differentialgleichung hat für $n \in \mathbb{N}_0 \setminus \{1\}$ für jeden Anfangswert $x_0 \in I$, $y(x_0) = y_0 \in \mathbb{R}$ eine eindeutige maximale Lösung.*

Beweis. Wir verwenden eine Folgerung des Satzes von Picard-Lindelöf. Dazu müssen wir zeigen, dass

$$f(x, y) := -p(x)y - q(x)y^n$$

überall in I eine lokale Lipschitzbedingung bzgl. y erfüllt. Dazu verwenden wir einen weiteren Satz, demzufolge es ausreicht, wenn f stetig differenzierbar ist.

Dies sieht man leicht, da p und q nach Voraussetzung stetig differenzierbar sind. *q.e.d.*

Behauptung. *Im Fall $n < 0$ hat die obige Differentialgleichung für jeden Anfangswert $x_0 \in I$, $y(x_0) = y_0 \neq 0$ eine eindeutige maximale Lösung.*

Beweis. Wegen $n < 0$ können wir ausschließen, dass eine Lösung eine Nullstelle hat, da sonst die Differentialgleichung nicht definiert ist. Da Lösungen insbesondere stetig sein müssen, können wir Schlussfolgern, dass jede Lösung entweder immer positiv oder immer negativ bleibt. Welches konkret der Fall ist hängt dann vom Vorzeichen von y_0 ab. Für $y \neq 0$ erfüllt f aus dem vorhergehenden Beweis wieder stets eine lokale Lipschitzbedingung, womit wir die Existenz einer eindeutigen maximalen Lösung analog schlussfolgern können. *q.e.d.*

Als nächstes wollen wir sehen, dass wir die Differentialgleichung durch eine Substitution auf eine lineare Differentialgleichung zurückführen können.

Voraussetzung. Sei $y : J \rightarrow \mathbb{R}$, $y(x) \neq 0 \forall x \in J$, J ein offenes Intervall in I , und definiere $u(x) := y(x)^{1-n}$.

Behauptung. *y löst die gegebene Differentialgleichung $\iff u$ löst die lineare Differentialgleichung*

$$u' + (1-n)p(x)u + (1-n)q(x) = 0$$

Beweis. Im Fall $n = 0$ ist die Aussage trivial. Da y nach Annahme niemals 0 werden kann betrachten wir nun $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$. Wir beweisen beide Richtungen separat. Sei zunächst y eine Lösung von

$$y' = -p(x)y - q(x)y^n$$

Dann ist, da y nach Annahme niemals 0 werden kann, u differenzierbar und es gilt für alle $x \in J$

$$\begin{aligned} u'(x) &= \left(y(x)^{1-n}\right)' = (1-n)y(x)^{-n}y(x)' \\ &= (1-n)y(x)^{-n}(-p(x)y(x) - q(x)y(x)^n) \\ &= -(1-n)\left(p(x)y(x)^{1-n} + q(x)\right) \\ &= -(1-n)(p(x)u(x) + q(x)) \end{aligned}$$

Die Aussage folgt dann durch Umstellen.

Sei nun $u := y^{1-n}$ Lösung von

$$u' + (1-n)p(x)u + (1-n)q(x) = 0$$

Aus der Forderung $y(x) \neq 0 \forall x \in J$ folgt auch, dass u niemals 0 sein kann. Wir betrachten von nun an die zwei Fälle dass $|1 - n|$ gerade bzw. ungerade ist, wobei wir für den Fall, dass $1 - n < 0$ ist stattdessen $n - 1$ meinen, da dies wegen

$$y^{1-n} = \frac{1}{y^{n-1}}$$

die selben Schlussfolgerungen bzgl. des Vorzeichens zulässt.

Sei also n ungerade (d.h. $1 - n$ ist gerade). Aus der Definition folgt dann, dass u stets positiv sein muss. Dann ist für alle $x \in J$

$$y(x) = \pm (u(x))^{\frac{1}{1-n}}$$

was, da stets $u > 0$ gilt, überall differenzierbar ist. Demnach gilt

$$\begin{aligned} y'(x) &= \pm \frac{1}{1-n} (u(x))^{\frac{1}{1-n}-1} u'(x) \\ &= \pm \frac{1}{1-n} (u(x))^{\frac{1}{1-n}-1} (-(1-n)p(x)u(x) - (1-n)q(x)) \\ &= - \left(\pm (u(x))^{\frac{1}{1-n}} p(x) + (\pm 1) (u(x))^{\frac{1}{1-n}-1} q(x) \right) \\ &= - \left(\pm (u(x))^{\frac{1}{1-n}} p(x) + \left(\pm (u(x))^{\frac{1}{1-n}} \right)^n q(x) \right) \\ &= -(y(x)p(x) + y(x)^n q(x)) \end{aligned}$$

wobei wir

$$\frac{1}{1-n} - 1 = \frac{n}{1-n}$$

und den Umstand, dass n ungerade ist, verwendet haben. Die Aussage folgt dann wieder durch Umstellen.

Sei nun n gerade (bzw. $1 - n$ ungerade). Dann folgt aus der Definition, dass y positiv bzw. negativ ist \Leftrightarrow wenn u positiv bzw. negativ ist. Wir führen dafür ein wenig Schreibweise ein:

$$\operatorname{sgn}(u) := \frac{u}{|u|} \Rightarrow u = \operatorname{sgn}(u)|u|$$

Die Ausdrücke sind insbesondere für $u \neq 0$ differenzierbar. Für $1 - n$ ungerade sehen wir dann, dass

$$y(x) = \operatorname{sgn}(u) (|u(x)|)^{\frac{1}{1-n}}$$

ist. Man überprüft leicht

$$(y(x))^{1-n} = \operatorname{sgn}(u)^{1-n} (|u(x)|)^{\frac{1-n}{1-n}} = \operatorname{sgn}(u)|u| = u$$

folgt. Entsprechend erhalten wir

$$y'(x) = \frac{\operatorname{sgn}(u)}{1-n} (|u(x)|)^{\frac{1}{1-n}-1} (|u(x)|)'$$

Man sieht leicht, dass für $u \neq 0$, $(|u|)' = \operatorname{sgn}(u)u'$ ist. Es folgt

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{\operatorname{sgn}(u)}{1-n} (|u(x)|)^{\frac{1}{1-n}-1} \operatorname{sgn}(u)u' \\ &= \frac{\operatorname{sgn}(u)}{1-n} (|u(x)|)^{\frac{1}{1-n}-1} \operatorname{sgn}(u) (-(1-n)p(x)u(x) - (1-n)q(x)) \\ &= -\operatorname{sgn}(u) (|u(x)|)^{\frac{1}{1-n}-1} (p(x)|u(x)| + \operatorname{sgn}(u)q(x)) \\ &= -\left(\operatorname{sgn}(u) (|u(x)|)^{\frac{1}{1-n}} p(x) + \operatorname{sgn}(u)^2 q(x) (|u(x)|)^{\frac{1}{1-n}-1} \right) \\ &= -\left(y(x)p(x) + q(x) (|u(x)|)^{\frac{n}{1-n}} \right) \\ &= -\left(y(x)p(x) + q(x)\operatorname{sgn}(u)^n (|u(x)|)^{\frac{n}{1-n}} \right) \\ &= -(y(x)p(x) + q(x)y(x)^n) \end{aligned}$$

wobei wir verwendet haben, dass $\operatorname{sgn}(u)^k = 1$ ist, für alle geraden Potenzen k . Die Aussage folgt dann wieder durch Umstellen. *q. e. d.*

Aufgabe 3. (Anwendung)

Zum Schluss wollen wir die eben bewiesenen Zusammenhänge explizit anwenden. Dazu betrachten wir die Bernoullische Differentialgleichung

$$y' = y + y^n$$

($q = p \equiv -1$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}$) mit den Anfangswerten $y(0) = 1$, $y(0) = 0$ und $y(0) = -1$. Wir wissen bereits, unter welchen Umständen eindeutige maximale Lösungen existieren.

Wir betrachten zuerst den Anfangswert $y(0) = 0$. Für $n < 0$ kann es offensichtlich keine Lösung geben, da in diesem Fall die Differentialgleichung nicht mit dem Anfangswert kompatibel ist. Für $n \in \mathbb{N} > 1$ existiert nach Aufgabe 2 eine eindeutige maximale Lösung. Man überprüfe leicht, dass diese durch $y \equiv 0$ gegeben ist. Im Fall $n = 0$ hat die Differentialgleichung getrennte Variablen. Wir berechnen für $y > -1$

$$\int_0^y \frac{1}{1+t} dt = \ln(1+y); \quad \int_0^x dt = x$$

und finden die Lösung

$$y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto y(x) := e^x - 1$$

was offensichtlich maximal ist und das AWP löst.

Nun betrachten wir den Anfangswert $y(0) = \pm 1$ (also beide simultan). Wir nehmen erstmal an dass y niemals 0 wird. Hier lässt sich die Substitution von Aufgabe 2 verwenden. Wieder unterscheiden wir die Fälle $|1-n|$ gerade bzw. ungerade, wobei wir auch hier im Fall $1-n < 0$ stattdessen $n-1$ meinen. Sei zunächst n ungerade (bzw. $1-n$ gerade). Es folgt aus $u := y^{1-n}$, dass u positiv sein muss. Wir betrachten nun die lineare Differentialgleichung

$$u' = (1-n)u + (1-n) = (1-n)(u+1)$$

mit den Anfangswert $u(0) = y(0)^{1-n} = (\pm 1)^{1-n} = 1$. Die Differentialgleichung hat offensichtlich getrennte Variablen und $(u+1)$ kann wegen $u > 0$ niemals 0 werden. Wir berechnen

$$\int_1^u \frac{1}{1+t} dt = \ln(1+u) - \ln(2) = \ln\left(\frac{1+u}{2}\right); \quad \int_0^x (1-n) dt = (1-n)x$$

und finden die Lösung

$$u(x) = 2e^{(1-n)x} - 1$$

wobei aus der Forderung $u > 0$ folgt, dass $x > \frac{-\ln(2)}{1-n}$, falls $1-n > 0$ und $x < \frac{-\ln(2)}{1-n}$ falls $1-n < 0$ sein muss.

Die Lösungen der Anfangswertprobleme $y(0) = \pm 1$ lauten daher für $1-n > 0$

$$y_{\pm} : \left(\frac{-\ln(2)}{1-n}, \infty\right) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto y_{\pm}(x) := \pm \left(2e^{(1-n)x} - 1\right)^{\frac{1}{1-n}}$$

und für $1-n < 0$

$$y_{\pm} : \left(-\infty, \frac{-\ln(2)}{1-n}\right) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto y_{\pm}(x) := \pm \left(2e^{(1-n)x} - 1\right)^{\frac{1}{1-n}}$$

Aufgrund der auftretenden Wurzelterme können diese Lösungen nicht differenzierbar außerhalb der gegebenen Intervalle fortgesetzt werden, womit sie maximal sein müssen.

Im Fall $1-n$ ungerade erhalten wir stattdessen wieder die Anfangswerte $u(0) = \pm 1$. Für $u(0) = 1$ finden wir analog zu davor die Lösung

$$u(x) = 2e^{(1-n)x} - 1$$

mit den entsprechenden Definitionsbereichen. Nach der entsprechenden Rücktransformation führt dies ebenfalls zu der Lösung y_+ von oben. Für $u(0) = -1$ scheitert der Ansatz der getrennten Variablen, da $(u+1)$ am Anfangspunkt 0 ist. Allerdings wissen wir, dass es eine maximale und eindeutige Lösung geben muss.

Stattdessen machen wir eine Rechnung die uns formal nicht zum Ziel führt, aber nahe legt wie die Lösung aussehen könnte. Dadurch, dass wir wissen, dass eine eindeutige maximale Lösung existieren muss reicht es eine Lösung geschickt zu raten, wenn wir danach zeigen, dass sie maximal ist. Betrachten wir die Integration von vorhin und wählen als untere Grenze der Integration allgemein $c < -1$, ergibt sich für $u < -1$

$$\int_c^u \frac{1}{1+t} dt = \ln(|1+u|) - \ln(|1+c|) = \ln\left(\left|\frac{1+u}{1+c}\right|\right) = \ln\left(\frac{1+u}{1+c}\right)$$

was zu der allgemeinen Lösung

$$\tilde{u}(x) = (1+c)e^{(1-n)x} - 1$$

führt. Um den Anfangswert zu erfüllen muss offensichtlich $c = -1$ gelten, was unsere Annahme verletzt. Wählen wir trotzdem $c = -1$ wird daher unsere Herleitung ungültig. Wenn wir zeigen können, dass die so gefundene Funktion trotzdem eine maximale Lösung ergibt sind wir aufgrund der Eindeutigkeit fertig. Tatsächlich lässt sich leicht überprüfen, dass das so gefundene $\tilde{u}(x) = -1$ maximal ist und das AWP löst, also die eindeutige maximale Lösung sein muss. Die entsprechende Rücktransformation gibt die maximale Lösung

$$\tilde{y}_- : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto y_-(x) = -1$$

von der man leicht überprüfe, dass sie das AWP löst.

Serie 05: Lösungsmethoden linearer Differentialgleichungen

Aufgabe 1. (Variation der Konstanten)

Nachdem wir uns das letzte mal schon mit Systemen linearer Differentialgleichungen beschäftigt haben, wollen wir uns nun angucken wie wir, auch inhomogene, lineare Differentialgleichungen lösen können. Dazu betrachte die inhomogene Differentialgleichung

$$y' = \left(1 - \frac{1}{x}\right) y + (x + e^x)$$

mit dem Anfangswert $y(1) = 0$. Wir wissen bereits, dass es eine eindeutige maximale Lösung auf $(0, \infty)$ (wir haben hier wegen dem $1/x$ in der Differentialgleichung die Wahl zwischen $(-\infty, 0)$ oder $(0, \infty)$, wovon aber nur letzteres den Anfangswert enthält) geben muss. Außerdem wissen wir auch, dass die Lösungen der homogenen Differentialgleichung

$$y' = \left(1 - \frac{1}{x}\right) y$$

einen, in diesem Fall, eindimensionalen Untervektorraum bilden. D.h. wir können eine Lösung y_h der homogenen Gleichung finden, s.d. sich jede andere Lösung durch

$$c \cdot y_h$$

mit $c \in \mathbb{R}$, ergibt. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass es dann ausreicht **eine** Lösung y_s der inhomogenen Differentialgleichung zu finden um ein beliebiges Anfangswertproblem mit

$$c \cdot y_h + y_s$$

zu lösen, wobei die Konstante c durch den Anfangswert festgelegt wird. D.h. wir betrachten zuerst die homogene Gleichung

$$y' = \left(1 - \frac{1}{x}\right) y$$

Diese Gleichung hat offensichtlich getrennte Variablen und wir finden durch Integration die Lösung

$$y_c : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto y_c(x) := \frac{c e^x}{x}$$

welche offensichtlich für jedes $c \in \mathbb{R}$ maximal ist. Eine Lösung für die inhomogene Gleichung konstruieren wir uns mit der, in der Vorlesung bereits vorgestellten, Methode der Variation der Konstanten. D.h. wir machen den

Ansatz, dass $c : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion von x ist, dafür $y_{c(x)}$ die inhomogene Gleichung löst. Mit diesem Ansatz erhalten wir

$$\begin{aligned} y'_{c(x)}(x) &= \left(c(x) \frac{e^x}{x} \right)' = c'(x) \frac{e^x}{x} + c(x) \left(\frac{e^x}{x} - \frac{e^x}{x^2} \right) \\ &\stackrel{!}{=} \left(1 - \frac{1}{x} \right) y_{c(x)}(x) + x + e^x = \left(1 - \frac{1}{x} \right) c(x) \frac{e^x}{x} + x + e^x \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich eine Differentialgleichung für c zu

$$c'(x) \frac{e^x}{x} + c(x) \left(\frac{e^x}{x} - \frac{e^x}{x^2} \right) = \left(\frac{e^x}{x} - \frac{e^x}{x^2} \right) c(x) + x + e^x$$

Wir können die Terme mit c auf beiden Seiten kürzen und erhalten

$$c'(x) = x^2 e^{-x} + x$$

Um eine Lösung zu finden müssen wir lediglich den letzten Ausdruck integrieren. Für den Term mit der Exponentialfunktion ergibt sich dabei nach zweimaliger partiellen Integration

$$\begin{aligned} \int e^{-x} x^2 dx &= -e^{-x} x^2 + \int e^{-x} 2x dx = -e^{-x} x^2 - 2x e^{-x} + \int e^{-x} 2 dx \\ &= -e^{-x} (x^2 + 2x + 2) + \tilde{c} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$c(x) = \frac{1}{2} x^2 - e^{-x} (x^2 + 2x + 2) + \tilde{c}$$

Da uns nur irgendeine Lösung interessiert können wir hier \tilde{c} auch null setzen. Damit ergibt sich die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung zu

$$y_s(x) := y_{c(x)}(x) = c(x) \frac{e^x}{x} = - \left(x + 2 + \frac{2}{x} \right) + \frac{e^x x}{2}$$

womit wir die allgemeine Lösung

$$y(x) = c \cdot y_h(x) + y_s(x) = c \frac{e^x}{x} + \frac{e^x x}{2} - \left(x + 2 + \frac{2}{x} \right)$$

haben. Aus dem Anfangswert ergibt sich dann

$$0 = y(1) = c \cdot e + \frac{e}{2} - 5 \implies c = \frac{5}{e} - \frac{1}{2} = \frac{10 - e}{2e}$$

Die maximale und eindeutige Lösung des Anfangswertproblems lautet daher

$$y : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto y(x) := \left(\frac{10 - e}{2e} \right) \frac{e^x}{x} + \frac{e^x x}{2} - \left(x + 2 + \frac{2}{x} \right)$$

Aufgabe 2. (Matrix-Exponentialfunktion)

Als nächstes befassen wir uns mit dem s.g. Matrixexponential. Damit lassen sich, zumindest prinzipiell für homogene Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten (d.h. A hängt nicht von x ab), für beliebige Anfangswerte sofort Lösungen finden (siehe Aufgabe 4). Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine quadratische Matrix. Wir wissen, dass $\mathbb{R}^{n \times n}$ zusammen mit der Matrixnorm einen (sogar vollständigen) normierten Raum bildet. Wir definieren

$$e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} := \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N \frac{A^k}{k!}$$

wobei wir $A^0 = \mathbb{1}$ setzen. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass dieser Grenzwert auch komponentenweise verstanden werden kann und die Reihe in jedem Fall absolut konvergent ist, was, da der Raum vollständig ist, ausreicht damit die Reihe konvergiert.

Wir beweisen die folgenden Eigenschaften.

Voraussetzung. Sei $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Diagonalmatrix.

Behauptung. *Es gilt*

$$e^D = \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}).$$

Beweis. Nach Voraussetzung ist

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Man überzeuge sich leicht, dass dann

$$D^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n^2 \end{pmatrix} = \text{diag}(\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2)$$

und analog $D^k = \text{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. Die Aussage folgt dann komponentenweise aus der Definition

$$\begin{aligned} e^D &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N \frac{\text{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)}{k!} = \lim_{N \rightarrow \infty} \text{diag} \left(\sum_{k=0}^N \frac{\lambda_1^k}{k!}, \dots, \sum_{k=0}^N \frac{\lambda_n^k}{k!} \right) \\ &= \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}) \end{aligned}$$

wobei wir benutzt haben, dass der Grenzwert der Partialsummen hier komponentenweise verstanden werden kann. *q. e. d.*

Voraussetzung. Sei $A, T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, T invertierbar.

Behauptung. Es gilt

$$e^{TAT^{-1}} = Te^{AT^{-1}}$$

Beweis. Wieder sieht man leicht, dass

$$(TAT^{-1})^2 = TAT^{-1}TAT^{-1} = TA^2T^{-1}$$

ist. Induktiv folgt dann

$$(TAT^{-1})^k = TA^kT^{-1}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Daraus folgt wieder

$$\begin{aligned} e^{TAT^{-1}} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N \frac{(TAT^{-1})^k}{k!} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N \frac{TA^kT^{-1}}{k!} \\ &= T \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N \frac{A^k}{k!} \right) T^{-1} = Te^{AT^{-1}} \end{aligned}$$

Dabei muss lediglich gerechtfertigt werden, warum wir die Multiplikation mit den Matrizen T und T^{-1} am Grenzwert 'vorbeiziehen' können. Dies folgt aber wieder Komponentenweise aus den Eigenschaften des Limes, die wir schon kennen. *q. e. d.*

Beispiel. (Der Harmonische Oszillator) Viele fundamentale Differentialgleichungen in der Physik sind linear. Das einfachste Beispiel ist hierbei der (angetriebene) harmonische Oszillator. In einer Dimension wird dieser von der Differentialgleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega^2 x - f(t) = \ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega^2 x - f(t) = 0$$

beschrieben, wobei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ (I wie immer ein offenes Intervall) eine antreibende Kraft beschreibt. Die konstante γ beschreibt den Einfluss von Reibung, während ω die Eigenschwingfrequenz ist. Mit der Substitution $\dot{x} = v$ erhalten wir die lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten erster Ordnung

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} v \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\gamma & \omega^2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f(t) \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

Wir wissen bereits, dass die Lösungen des homogenen Systems einen zweidimensionalen Untervektorraum bilden. Für kleine Dämpfungen kann man zeigen, dass jede Lösung des homogenen Systems die Form

$$x(t) = ce^{\lambda t} + \bar{c}e^{\bar{\lambda}t}$$

mit passenden $c, \lambda \in \mathbb{C}$, hat. Aus praktischen Gründen sind wir aber oft nur an reellen Lösungen interessiert, da wir Größen wie Ort oder Geschwindigkeit beschreiben wollen.

Aufgabe 3. (Reell- und Komplexwertige Lösungen)

Wir wollen daher nun zeigen, dass wir jede Lösung stattdessen durch reelle Funktionen mit reellen Koeffizienten darstellen können. Wir zeigen zunächst

Voraussetzung. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit Eigenvektor $v \in \mathbb{C}^n$ zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$, d.h. $Av = \lambda v$.

Behauptung. Dann ist \bar{v} ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\bar{\lambda}$, d.h. $A\bar{v} = \bar{\lambda}\bar{v}$.

Beweis. Die komplexe Konjugation von v ist komponentenweise zu verstehen, d.h.

$$\bar{v} = (\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n)$$

Da A reell ist sieht man wegen der Linearität der komplexen Konjugation, komponentenweise, leicht, dass

$$\overline{Av} = A\bar{v}$$

ist. Es folgt

$$A\bar{v} = \overline{Av} = \overline{\lambda v} = \bar{\lambda}\bar{v}$$

q.e.d.

Für unser Beispiel, wo $n = 2$ ist, lässt sich daraus die Behauptung über die Form der Lösungen zeigen. Wir zeigen nun, dass wir die Lösung auch durch reelle Funktionen ausdrücken können

Voraussetzung. Es sei für $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i \in \mathbb{C}$ und $v = v_r + iv_i \in \mathbb{C}^n$

$$z_1(x) := ve^{\lambda x}; z_2(x) := \bar{v}e^{\bar{\lambda}x}$$

und

$$y_1(x) := e^{\lambda_r x}(v_r \cos(\lambda_i x) - v_i \sin(\lambda_i x))$$

$$y_2(x) := e^{\lambda_r x}(v_r \sin(\lambda_i x) + v_i \cos(\lambda_i x))$$

Behauptung. z_1, z_2 und y_1, y_2 spannen den selben Untervektorraum von $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ auf.

Beweis. Wir benutzen folgende Zusammenhänge. Sei $z = z_r + iz_i \in \mathbb{C}$, dann ist

$$\bar{z} = z_r - iz_i \implies z_r = \frac{z + \bar{z}}{2}, z_i = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

Wir definieren die Funktionen

$$w_1 := \frac{z_1 + z_2}{2}; w_2 := \frac{z_1 - z_2}{2i}$$

Bzw.

$$z_1 = w_1 + iw_2; z_2 = w_1 - iw_2$$

Aus diesen beiden Identitäten sieht man leicht, dass jede Linearkombination aus z_1, z_2 sich auch als Linearkombination aus w_1, w_2 darstellen lässt und vice versa. Die w_1, w_2 müssen also den selben Unterraum aufspannen wie die z_1, z_2 . Außerdem folgt

$$\begin{aligned} w_1(x) &= \frac{ve^{\lambda x} + \bar{v}e^{\bar{\lambda}x}}{2} = e^{\lambda_r x} \frac{(v_r + iv_i)e^{i\lambda_i x} + (v_r - iv_i)e^{-i\lambda_i x}}{2} \\ &= \frac{e^{\lambda_r x}}{2} \left(v_r (e^{i\lambda_i x} + e^{-i\lambda_i x}) + iv_i (e^{i\lambda_i x} - e^{-i\lambda_i x}) \right) \\ &= \frac{e^{\lambda_r x}}{2} (v_r 2 \cos(\lambda_i x) + iv_i (2i \sin(\lambda_i x))) \\ &= e^{\lambda_r x} (v_r \cos(\lambda_i x) - v_i \sin(\lambda_i x)) = y_1(x) \end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned} w_2(x) &= \frac{ve^{\lambda x} - \bar{v}e^{\bar{\lambda}x}}{2i} = e^{\lambda_r x} \frac{(v_r + iv_i)e^{i\lambda_i x} - (v_r - iv_i)e^{-i\lambda_i x}}{2i} \\ &= \frac{e^{\lambda_r x}}{2i} \left(v_r (e^{i\lambda_i x} - e^{-i\lambda_i x}) + iv_i (e^{i\lambda_i x} + e^{-i\lambda_i x}) \right) \\ &= \frac{e^{\lambda_r x}}{2i} (v_r 2i \sin(\lambda_i x) + iv_i (2 \cos(\lambda_i x))) \\ &= e^{\lambda_r x} (v_r \sin(\lambda_i x) + v_i \cos(\lambda_i x)) = y_2(x) \end{aligned}$$

wobei wir $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$ und $e^{-ix} = \cos(x) - i \sin(x)$ verwendet haben. *q.e.d.*

Aufgabe 4. (Konstante Koeffizienten)

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass für die homogene Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$y' = Ay$$

die Lösung für einen beliebigen Anfangswert $y(x_0) = y_0$ durch

$$y = e^{A(x-x_0)} y_0$$

gegeben ist. Auch wenn wir damit immer eine Lösung angeben können ist die explizite Berechnung des vorkommenden Matrixexponentials in den meisten Fällen schwierig bis unmöglich. Allein aus praktischen Gründen wollen wir uns eine andere Form anschauen.

Es sei v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ , d.h. $Av = \lambda v$. Es lässt sich (leicht) zeigen, dass dann auch

$$e^A v = e^\lambda v, \text{ bzw. } e^{A(x-x_0)} v = e^{\lambda(x-x_0)} v \quad \forall x, x_0 \in \mathbb{R}$$

gilt. D.h. falls wir für den Anfangswert y_0 einen Eigenvektor von A wählen hat die Lösung sofort eine einfache, explizite Form. Im allgemeinen sind wir natürlich an Anfangswerten interessiert, die keine Eigenvektoren der Koeffizientenmatrix sind. Das Prinzip von oben lässt sich aber in vielen Fällen verallgemeinern.

Angenommen wir finden eine Basis aus Eigenvektoren $\{v_1, \dots, v_n\}$ von A (d.h. A ist diagonalisierbar) mit den Eigenwerten $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$. Da die Eigenvektoren eine Basis bilden können wir jedes beliebige y_0 expandieren, d.h.

$$y_0 = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$$

für passende Koeffizienten a_1, \dots, a_n . Da $e^{A(x-x_0)}$ für jedes $x_0, x \in \mathbb{R}$ auch nur eine Matrix ist, also insbesondere eine lineare Abbildung definiert, folgt mit der obigen Überlegung für die Lösung des Anfangswertproblems zu $y(x_0) = y_0$

$$y(x) = e^{A(x-x_0)} y_0 = e^{A(x-x_0)} \sum_{k=1}^n a_k v_k = \sum_{k=1}^n a_k e^{A(x-x_0)} v_k = \sum_{k=1}^n a_k e^{\lambda_k(x-x_0)} v_k$$

D.h. wir können (sobald wir eine Basis aus Eigenvektoren gefunden haben) die Lösung für jedes beliebige Anfangswertproblem direkt und explizit angeben.

Wir betrachten nun die (indirekt gegebene Matrix) $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, definiert durch die Gleichungen

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Wir wollen daraus schlussfolgern für welche Anfangswerte $y_0 \in \mathbb{R}^3$ die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = Ay; \quad y(0) = y_0$$

gegeben durch

$$y(x) = e^{Ax} y_0$$

für $x \rightarrow \infty$ konvergiert (also insbesondere nicht divergiert). Dafür wollen wir mit den oben diskutierten Zusammenhängen die Lösung genauer bestimmen. Die gegebenen Gleichungen verraten uns, dass A die Eigenvektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

mit den Eigenwerten $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = -1$ hat. Von diesen wollen wir nun überprüfen ob sie eine Basis bilden. Da wir drei Vektoren betrachten und wir uns in einem drei-dimensionalen Raum befinden reicht es aus zu Zeigen, dass sie linear unabhängig sind. Angenommen es gelte

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$$

für $\alpha_1, \dots, \alpha_3 \in \mathbb{R}$, d.h.

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$$

$$\alpha_1 - \alpha_2 = 0$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0$$

Aus der zweiten Gleichung sieht man $\alpha_1 = \alpha_2$, addiert man dann die Gleichungen eins und drei ergibt sich $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ womit dann schließlich auch $\alpha_3 = 0$ folgt. Die Vektoren sind also linear unabhängig, womit sie eine Basis bilden müssen. Damit hat jede Lösung die Form

$$\begin{aligned} y(x) &= a_1 e^{\lambda_1 x} v_1 + a_2 e^{\lambda_2 x} v_2 + a_3 e^{\lambda_3 x} v_3 \\ &= a_1 e^x v_1 + a_2 v_2 + a_3 e^{-x} v_3 \quad (e^0 = 1) \end{aligned}$$

Man sieht leicht, dass dies für $x \rightarrow \infty$ genau dann konvergiert, wenn $a_1 = 0$ ist. D.h. die Anfangswerte $y_0 \in \mathbb{R}^3$ müssen in der von v_2, v_3 aufgespannten Ebene liegen:

$$y_0 \in \left\{ y \in \mathbb{R}^3 \mid \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} : y = \alpha v_2 + \beta v_3 \right\}$$

Serie 06: Kurvenintegrale im \mathbb{R}^n

Nachdem wir die gewöhnlichen Differentialgleichungen abgeschlossen haben wollen wir uns als nächstes der Integration entlang von Kurven beschäftigen. Eine (parametrisierte) Kurve ist eine Abbildung $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$. Im Allgemeinen werden wir von einer Kurve verlangen, dass sie stückweise stetig differenzierbar mit $y'(t) \neq 0 \forall t \in I$ ist. Wir nennen diese Eigenschaft (stückweise) regulär.

Aufgabe 1. (Kurvenintegrale und Bogenlänge)

Für eine Funktion $f : \gamma(I) \rightarrow \mathbb{R}$ und ein Vektorfeld $E : \gamma(I) \rightarrow \mathbb{R}^n$ definieren wir die Integrale entlang der Kurve γ , entsprechend der Vorlesung, als

$$\int_{\gamma} f ds := \int_I f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt$$
$$\int_{\gamma} \langle E | ds \rangle := \int_I \langle E(\gamma(t)) | \gamma'(t) \rangle dt$$

Insbesondere erhalten wir die Bogenlänge $\int_{\gamma} ds$ falls wir $f \equiv 1$ wählen. Dazu wollen wir die folgenden Beispiele betrachten.

Seien $\alpha, \kappa > 0$ und $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\gamma(t) := (\cos(\alpha t), \sin(\alpha t), \kappa t).$$

Diese Kurve beschreibt eine Schraubenlinie mit Radius 1 um die z -Achse mit Winkelgeschwindigkeit α und vertikaler Geschwindigkeit κ . Wir berechnen zuerst die Länge der Kurve. Offensichtlich ist γ auf dem Inneren von $I = [0, 1]$ differenzierbar mit (Geschwindigkeitsvektor)

$$\gamma'(t) = (-\alpha \sin(\alpha t), \alpha \cos(\alpha t), \kappa)$$

was, da $\alpha, \kappa > 0$, niemals 0 werden kann. Daraus ergibt sich die Norm (Betrag der Geschwindigkeit)

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{\alpha^2 \sin^2(\alpha t) + \alpha^2 \cos^2(\alpha t) + \kappa^2} = \sqrt{\alpha^2 + \kappa^2}$$

wobei wir $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \forall x \in \mathbb{R}$ benutzt haben. Demnach beträgt die Bogenlänge

$$\int_{\gamma} ds = \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^1 \sqrt{\alpha^2 + \kappa^2} dt = \sqrt{\alpha^2 + \kappa^2}$$

Betrachte nun das Vektorfeld $E : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $x \mapsto x$. Wir wollen das Kurvenintegral entlang von γ berechnen. Es gilt für alle $t \in (0, 1)$

$$\langle E(\gamma(t)) | \gamma'(t) \rangle = \langle \gamma(t) | \gamma'(t) \rangle = -\alpha \sin(\alpha t) \cos(\alpha t) + \alpha \cos(\alpha t) \sin(\alpha t) + \kappa^2 t = \kappa^2 t$$

woraus sich das Kurvenintegral zu

$$\int_{\gamma} \langle E | ds \rangle = \int_0^1 \langle E(\gamma(t)) | \gamma'(t) \rangle dt = \int_0^1 \kappa^2 t dt = \frac{\kappa^2}{2}$$

ergibt.

Aufgabe 2. (Verknüpfung von Kurven)

Als nächstes betrachten wir was passiert, wenn wir zwei Kurven an den Enden verknüpfen. Seien also $\gamma, \rho : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ reguläre Kurven, s.d. $\gamma(1) = \rho(0)$. Für Kurvenintegrale entlang der verknüpften Kurve erwarten wir, dass diese mit der Summe der einzelnen Kurvenintegralen übereinstimmen.

Umgekehrt erwarten wir, dass Kurvenintegrale entlang einer stückweise regulären Kurve auch stückweise berechnet werden können. Wir definieren dazu die verknüpfte Kurve

$$\begin{aligned} \gamma\rho : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto \begin{cases} \gamma(2t) & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \rho(2t - 1) & t \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \end{aligned}$$

Diese zunächst etwas umständlich anmutende Definition sorgt dafür, dass wir erst die Kurve γ und danach ρ durchlaufen. Die reskalierung der Argumente sorgt lediglich dafür, dass wir für $\gamma\rho$ den selben Definitionsbereich wie für γ bzw. ρ verwenden können (also $[0, 1]$).

Voraussetzung. Seien γ, ρ und $\gamma\rho$ wie oben und $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ s.d. die Kurvenintegrale von f entlang der Kurven existieren.

Behauptung.

$$\int_{\gamma\rho} f ds = \int_{\gamma} f ds + \int_{\rho} f ds$$

Beweis. Da γ und ρ regulär sind ist $\gamma\rho$ auch (stückweise) regulär. Wir berechnen zunächst die Ableitung von $\gamma\rho$ auf dem Inneren der Intervallen, d.h. für $t \in (0, \frac{1}{2})$ gilt

$$(\gamma\rho)'(t) = \frac{d}{dt}\gamma(2t) = 2\gamma'(2t) \neq 0$$

und analog für $t \in (\frac{1}{2}, 1)$

$$(\gamma\rho)'(t) = \frac{d}{dt}\rho(2t - 1) = 2\rho'(2t - 1) \neq 0$$

Wir betrachten nun die Definition der linken Seite der Aussage.

Demnach gilt mit der Definition von $\gamma\rho$

$$\begin{aligned}\int_{\gamma\rho} f \, ds &= \int_0^1 f(\gamma\rho(t)) \|(\gamma\rho)'(t)\| dt \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} f(\gamma\rho(t)) \|(\gamma\rho)'(t)\| dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(\gamma\rho(t)) \|(\gamma\rho)'(t)\| dt \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} f(\gamma(2t)) \cdot 2\|\gamma'(2t)\| dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(\rho(2t-1)) \cdot 2\|\rho'(2t-1)\| dt\end{aligned}$$

Wie auch in der Vorlesung nehmen wir an, dass f 'hinreichend gut' ist (wir also zumindest substituieren können). Da γ und ρ regulär sind können wir daher die Substitution $r = 2t, r' = 2$ und $\tilde{r} = 2t - 1, \tilde{r}' = 2$ machen. Insbesondere ergibt sich für die Grenzen $r(0) = 0, r(1/2) = 1, \tilde{r}(1/2) = 0$ und $\tilde{r}(1) = 1$. Wir haben daher

$$\int_{\gamma\rho} f \, ds = \int_0^1 f(\gamma(r)) \|\gamma'(r)\| dr + \int_0^1 f(\rho(\tilde{r})) \|\rho'(\tilde{r})\| d\tilde{r} = \int_{\gamma} f \, ds + \int_{\rho} f \, ds$$

q. e. d.

Aufgabe 3. (Konservative Vektorfelder)

Bisher waren die betrachteten Vektorfelder und Funktionen die wir entlang von Kurven integriert haben (nahezu) beliebig. Physikalisch verlangen wir jedoch in vielen Fällen, dass Vektorfelder konservativ sind. Ein Vektorfeld $E : \mathbb{R}^n \supset U \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt konservativ falls es eine differenzierbare Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, s.d.

$$E(x) = (\partial_1 f(x), \dots, \partial_n f(x)) =: \text{grad } f(x)$$

ist (in der Physik oft mit $-\text{grad } f$). Als Beispiel betrachten wir dazu das Vektorfeld

$$E : B_1(0) \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \right)$$

Wir wollen zeigen, dass E konservativ indem wir ein Potential finden. Analog zu dem Fall der exakten Differentialgleichung können wir versuchen notwendige Bedingungen aufzustellen, aus denen wir versuchen können Lösungen zu konstruieren. Aus der Definition folgen die (sogar hinreichenden) Bedingungen

$$\begin{aligned}\partial_x f(x, y) &= \frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ \partial_y f(x, y) &= \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\end{aligned}$$

Anhand dieser Bedingungen ist es bereits möglich eine Lösung zu erraten ($f(x, y) = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$), allerdings ist die direkte Konstruktion mittels Integration umständlich.

In der Vorlesung wurden allerdings weitere notwendige Bedingungen vorgestellt. Falls E konservativ, mit Potential f , ist muss für jede Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ gelten, dass

$$\int_{\gamma} \langle E | ds \rangle = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

Berechnen wir also Kurvenintegrale entlang von geschickt gewählten Kurven kann uns das Aufschluss über die Form von f geben. Wir betrachten für $0 < |x| < 1$

$$\begin{aligned} \gamma_x : [0, x] &\rightarrow B_1(0) \\ t &\mapsto (t, 0) \end{aligned}$$

Dadurch finden wir

$$\int_{\gamma_x} \langle E | ds \rangle = \int_0^x \langle E(\gamma_x(t)) | \gamma'_x(t) \rangle dt = \int_0^x \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

Mit der Substitution $z = 1 - t^2$, $z' = -2t$ mit $z(0) = 1$ und $z(x) = 1 - x^2$ erhalten wir

$$\int_{\gamma_x} \langle E | ds \rangle = - \int_1^{1-x^2} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{z}} dz = -\sqrt{z} \Big|_0^{1-x^2} = -\sqrt{1-x^2}$$

Betrachten wir entsprechend $\gamma_y(t) = (0, t)$ für $t \in [0, y]$, $0 < |y| < 1$ erhalten wir das analoge Ergebnis

$$\int_{\gamma_y} \langle E | ds \rangle = -\sqrt{1-y^2}$$

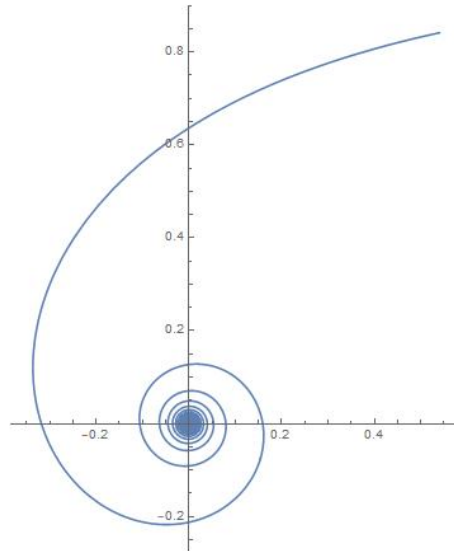
Dies legt nahe, dass die Funktion $f(x, y) := -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ eine geeignete Potentialfunktion ist, was sich leicht nachprüfen lässt (insbesondere ist f überall auf $B_1(0)$ stetig differenzierbar, da dort $x^2 + y^2 < 1$ gilt).

Aufgabe 4. (Anwendung)

Zum Schluss wollen wir sehen, dass es stetige Kurven gibt, die durch ein endliches Intervall parametrisiert werden können, aber trotzdem unendlich lang sind. Dazu betrachten wir die Spirale

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \begin{cases} (t \cos(\frac{1}{t}), t \sin(\frac{1}{t})) & t \in (0, 1] \\ (0, 0) & t = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

An der Definition sieht man, dass die Umlaufgeschwindigkeit der Spirale nahe des Ursprungs beliebig ansteigt. Der entsprechende Graph sieht wie folgt aus



Man kann sich bereits am Bild überlegen, dass durch die immer schneller steigende Umlaufgeschwindigkeit die Spirale unendlich viele Umdrehungen durchläuft. Ignorieren wir für einen Moment die Relativitätstheorie, entspräche diese Kurve einem Teilchen, welches in endlicher Zeit, einen unendlichen Weg zurück legt.

Behauptung. Die oben gegebene (parametrisierte) Kurve γ ist stetig.

Beweis. Für $t > 0$ ist die Aussage offensichtlich, da dann die Komponenten von γ aus stetigen Funktionen besteht. Wir betrachten daher $t = 0$. Wir müssen also zeigen, dass

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \gamma(t) = \gamma(0) = (0, 0)$$

ist. Dazu betrachten wir mit der Substitution $t = 1/s$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \gamma(t) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} t \left(\cos \left(\frac{1}{t} \right), \sin \left(\frac{1}{t} \right) \right) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\left(\cos \left(\frac{1}{t} \right), \sin \left(\frac{1}{t} \right) \right)}{\frac{1}{t}} \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{(\cos(s), \sin(s))}{s} \end{aligned}$$

Man sieht leicht

$$0 = \lim_{s \rightarrow \infty} -\frac{1}{s} \leq \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\cos(s)}{s} \leq \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} = 0$$

(analog für $\sin(s)$), womit

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \gamma(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} \gamma\left(\frac{1}{s}\right) = (0, 0)$$

folgt.

q.e.d.

Voraussetzung. Es sei $\rho_\epsilon : [\epsilon, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \gamma(t)$. Wir definieren

$$b(\epsilon) := \int_{\rho_\epsilon} ds$$

also die Bogenlänge von γ , eingeschränkt auf das Intervall $[\epsilon, 1]$.

Behauptung.

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} b(\epsilon) = \infty$$

Beweis. Es sei $\epsilon > 0$. Man überzeuge sich leicht, dass ρ_ϵ in diesem Fall regulär ist. Es folgt für $t \in [\epsilon, 1]$

$$\rho'_\epsilon(t) = \left(\cos\left(\frac{1}{t}\right) + \frac{1}{t} \sin\left(\frac{1}{t}\right), \sin\left(\frac{1}{t}\right) - \frac{1}{t} \cos\left(\frac{1}{t}\right) \right)$$

und folglich

$$\begin{aligned} \|\rho'_\epsilon(t)\|^2 &= \cos^2\left(\frac{1}{t}\right) + \frac{1}{t^2} \sin^2\left(\frac{1}{t}\right) + \frac{2}{t} \cos\left(\frac{1}{t}\right) \sin\left(\frac{1}{t}\right) \\ &\quad + \sin^2\left(\frac{1}{t}\right) + \frac{1}{t^2} \cos^2\left(\frac{1}{t}\right) - \frac{2}{t} \cos\left(\frac{1}{t}\right) \sin\left(\frac{1}{t}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{t^2} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$b(\epsilon) = \int_{\rho_\epsilon} ds = \int_\epsilon^1 \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}} dt$$

Aus der Monotonie des Integrals folgt dann

$$b(\epsilon) = \int_\epsilon^1 \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}} dt \geq \int_\epsilon^1 \sqrt{\frac{1}{t^2}} dt = \int_\epsilon^1 \frac{1}{|t|} dt = -\ln(\epsilon) = \ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right)$$

und damit

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} b(\epsilon) \geq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right) = \lim_{\delta \rightarrow \infty} \ln(\delta) = \infty$$

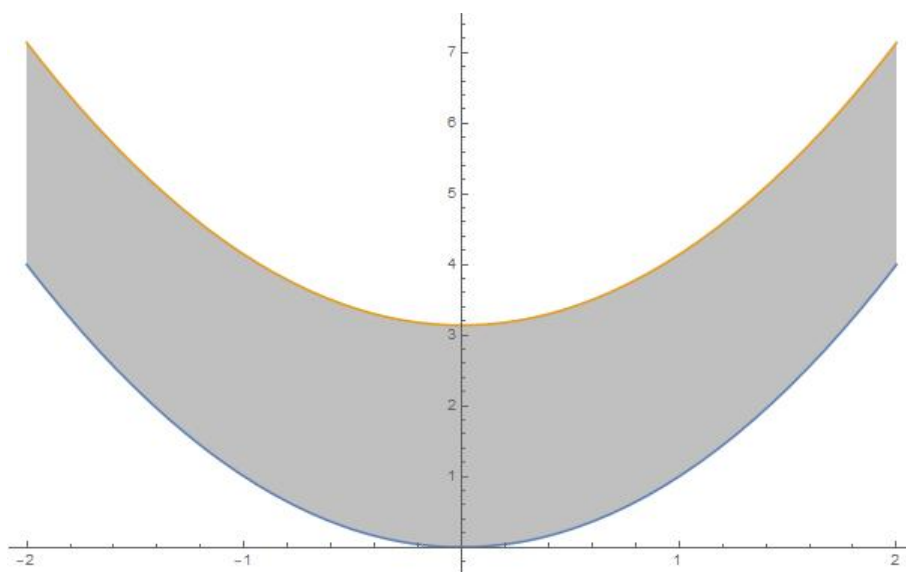
q.e.d.

Serie 07: Oberflächenintegrale I

Aufgabe 1. (Exakte DGL's und konservative Vektorfelder)

Im Anschluss an Aufgabe 3 des vorherigen Blatts betrachten wir eine weitere Anwendung von konservativen Vektorfeldern. Wir betrachten das Gebiet

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y - x^2 < \pi\}$$



In Blau: $y = x^2$, In Orange: $y = x^2 + \pi$, In Grau: U

Auch wenn das Bild dies bereits vermuten lässt, wollen wir zeigen, dass in U zwei beliebige Punkte durch eine stetige Kurve verbunden werden können.

Behauptung. U ist wegzusammenhängend.

Beweis. Man überlegt sich leicht, dass es ausreicht zu zeigen, dass es einen Punkt $(x_0, y_0) \in U$ gibt, zu dem jeder andere Punkt verbunden werden kann. Betrachten wir dann zwei beliebige Punkte in U , die mit (x_0, y_0) durch die Kurven γ_1, γ_2 verbunden sind, können wir diese durch die verknüpfte Kurve $\gamma_2^{-1}\gamma_1$ verbinden.

Des Weiteren ist die Strecke

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0, y \in (0, \pi)\} = \{0\} \times (0, \pi) \subset U$$

und man sieht leicht, dass wir beliebige Punkte in S miteinander verbinden können.

Verwenden wir diese beiden Erkenntnisse müssen wir nur noch zeigen, dass jeder beliebige Punkt in U mit einem Punkt in S verbunden werden kann. Haben wir dann zwei Punkte $v_1, w_1 \in U$, welche durch die Kurven γ_1, γ_2 mit zwei Punkten $v_0, w_0 \in S$ verbunden werden, so gibt es eine Kurve γ_0 , die v_0 und w_0 verbindet und wir können v_1, w_1 durch z.B. $\gamma_2^{-1}\gamma_0\gamma_1$ verbinden.

Um dies zu zeigen betrachten wir $(x, y) \in U$ fest. Für $x = 0$ gibt es nichts zu zeigen, weshalb wir $x \neq 0$ annehmen. Wir wissen sofort, dass $y - x^2 \in (0, \pi)$ sein muss und wir definieren die Kurve

$$\begin{aligned}\gamma : [0, x] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (x - t, (x - t)^2 + (y - x^2))\end{aligned}$$

von der man nun leicht für alle $t \in [0, x]$ überprüfen kann, dass

$$\gamma(t)_y - \gamma(t)_x^2 = y - x^2 \in (0, \pi)$$

ist, womit $\gamma([0, x]) \subset U$ gilt. Man sieht auch leicht, dass γ stetig ist, und dass $\gamma(0) = (x, y)$ und $\gamma(x) = (0, y - x^2) \in S$ ist, womit γ den Punkt (x, y) mit einem Punkt in S verbindet. Die Aussage folgt dann aus den vorherigen Überlegungen. *q.e.d.*

Wir wollen dieses Ergebnis verwenden um die folgende Differentialgleichung auf U zu behandeln

$$\frac{\sin(y - x^2) - x^2 \cos(y - x^2)}{\sqrt{\sin(y - x^2)}} + \frac{x \cos(y - x^2)}{2\sqrt{\sin(y - x^2)}} y' = 0$$

A priori sieht diese Differentialgleichung sehr kompliziert aus. Allerdings hat diese Differentialgleichung die Form einer exakten Differentialgleichung. D.h. falls wir zeigen können, dass sie eine Potentialfunktion besitzt, können wir daraus wie gewohnt Lösungen konstruieren.

Behauptung. Die Differentialgleichung $p(x, y) + q(x, y)y' = 0$ mit

$$p(x, y) = \frac{\sin(y - x^2) - x^2 \cos(y - x^2)}{\sqrt{\sin(y - x^2)}}; \quad q(x, y) = \frac{x \cos(y - x^2)}{2\sqrt{\sin(y - x^2)}}$$

ist exakt.

Beweis. Als erstes sehen wir, dass p und q für alle $(x, y) \in U$ wohldefiniert, reell und sogar stetig sind, da dort $\sin(y - x^2) > 0$ ist. Unser übliches Vorgehen der Konstruktion einer Potentialfunktion durch Integration wird aber durch die komplizierte Form von p und q in diesem Fall zu nichts führen. Stattdessen betrachten wir den Zusammenhang zu konservativen Vektorfeldern. Wir betrachten dazu das Vektorfeld

$$E : U \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (p(x, y), q(x, y))$$

In der Vorlesung wurde diskutiert, dass die Differentialgleichung

$$p(x, y) + q(x, y)y' = 0$$

genau dann exakt ist, wenn E konservativ ist. Insbesondere ist ein Potential f für E auch eine Potentialfunktion für die Differentialgleichung und vice versa.

Des Weiteren wissen wir bereits, dass, falls E konservativ mit Potential f ist, dann für jede Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow U$

$$\int_{\gamma} \langle E | ds \rangle = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

gelten muss. Wir wollen dies benutzen um ein Potential für E zu finden, da wir dann automatisch auch eine Potentialfunktion für die Differentialgleichung haben. Für die Integration wollen wir Kurven wählen, auf denen $y - x^2$ konstant ist, da dann die trigonometrischen Terme in p und q ignoriert werden können und wir höchstens Polynome integrieren müssen. Dazu wählen wir die Kurven ähnlich zum vorherigen Beweis. Sei $(x, y) \in U$ beliebig, dann ist $a := y - x^2 \in (0, \pi)$ und die Kurve

$$\begin{aligned} \gamma_a : [0, x] &\rightarrow U \\ t &\mapsto (t, t^2 + a) \end{aligned}$$

verbindet die Punkte $(0, a) \in S$ und (x, y) . Insbesondere ist entlang dieser Kurve $y - x^2 = a = \text{konst.}$ und es gilt

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_a} \langle E | ds \rangle &= \int_0^x \langle E(\gamma(t)) | \dot{\gamma}(t) \rangle dt \\ &= \int_0^x \left(\frac{\sin(a) - t^2 \cos(a)}{\sqrt{\sin(a)}} \cdot 1 + \frac{t \cos(a)}{2\sqrt{\sin(a)}} \cdot 2t \right) dt \\ &= \int_0^x \left(\frac{\sin(a)}{\sqrt{\sin(a)}} - \frac{t^2 \cos(a)}{\sqrt{\sin(a)}} + \frac{t^2 \cos(a)}{\sqrt{\sin(a)}} \right) dt \\ &= \int_0^x \frac{\sin(a)}{\sqrt{\sin(a)}} dt = \frac{\sin(a)}{\sqrt{\sin(a)}} x - 0 \end{aligned}$$

Mit dem Ansatz

$$f(x, y) = \frac{\sin(y - x^2)}{\sqrt{\sin(y - x^2)}} x$$

hat dieses Ergebnis genau die Form die wir oben als notwendige Bedingung festgestellt haben. Wir überprüfen nun leicht, dass f wirklich ein Potential für E ist. Tatsächlich ist f auf U stetig differenzierbar mit

$$\begin{aligned} \partial_x f(x, y) &= \frac{\sin(y - x^2)}{\sqrt{\sin(y - x^2)}} + x \frac{-2x \cos(y - x^2)}{2\sqrt{\sin(y - x^2)}} = p(x, y) = E_x(x, y) \\ \partial_y f(x, y) &= x \frac{\cos(y - x^2)}{2\sqrt{\sin(y - x^2)}} = q(x, y) = E_y(x, y) \end{aligned}$$

womit die Differentialgleichung exakt ist.

q.e.d.

Um Lösungen zu finden erinnern wir uns daran, dass für eine exakte Differentialgleichung mit Potentialfunktion f jede Lösung y die Gleichung

$$f(x, y(x)) = c$$

für ein $0 < c \in \mathbb{R}$ erfüllen muss. Wir haben also

$$f(x, y) = \frac{\sin(y - x^2)}{\sqrt{\sin(y - x^2)}} x = \sqrt{\sin(y - x^2)} x \stackrel{!}{=} c$$

Für $\frac{c^2}{x^2} < 1$ hat dies die Lösung

$$y = x^2 + \arcsin\left(\frac{c^2}{x^2}\right)$$

Sonst existieren keine Lösungen in U . D.h. jede Lösung der Differentialgleichung hat die Form

$$y_{c+} : (c, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 + \arcsin\left(\frac{c^2}{x^2}\right)$$

für $c > 0$ oder

$$y_{c-} : (-\infty, -c) \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 + \arcsin\left(\frac{c^2}{x^2}\right)$$

für $c < 0$.

Aufgabe 2. (Oberflächenintegrale 1)

Die restliche Serie wollen wir uns mit der Integration über Oberflächen im \mathbb{R}^3 beschäftigen. Dazu betrachten wir (die Mannigfaltigkeit)

$$M = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y \sin(x) = z \cos(x) \right\}$$

Wir fragen uns zunächst, wie die Schnitte von M mit den Ebenen, die Parallel zur $y - z$ -Ebene sind (also $x = \text{konst.}$), aussehen.

Im Fall $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$) gilt für diese Schnitte $y \sin(x) = 0 \Rightarrow y = 0$ (da hier $\sin(x) \neq 0$) und $z \in \mathbb{R}$ beliebig. Es handelt sich also um Geraden parallel zur y -Achse.

In allen anderen Fällen gilt für die Schnitte

$$y \tan(x) = z$$

wobei es sich um Geraden parallel zur $y - z$ -Ebene mit 'Anstieg' $\tan(x)$ handelt. (Anstieg im Sinne einer Linearen Funktion $z(y)$)

Als nächstes wollen wir eine Parametrisierung von M betrachten.

Voraussetzung. Sei

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^2 &\rightarrow M \\ (t, s) &\mapsto (t, s \cos(t), s \sin(t)) \end{aligned}$$

Behauptung. φ ist eine Parametrisierung für **ganz** M .

Beweis. Wir überprüfen zuerst ob φ tatsächlich nach M abbildet. Für $(t, s) \in \mathbb{R}^2$ beliebig gilt

$$\varphi_y(t, s) \sin(t) = s \cos(t) \sin(t) = \varphi_z(t, s) \cos(t)$$

Als nächsten überprüfen wir, ob wir ganz M mit φ erreichen (d.h. φ ist surjektiv). Für $(x, y, z) \in M$ gilt $y \sin(x) = z \cos(x)$. Wir setzen als erstes fest $t = x$. Im Fall $x = t = \frac{\pi}{2} + \pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$) setzen wir $s = \frac{z}{\sin(x)}$. Des Weiteren gilt in diesem Fall, dass $y = 0$ sein muss.

In allen anderen Fällen setzen wir $s = \frac{y}{\cos(x)}$, wobei dann $z = \tan(x)y$ gelten muss. Aus der Definition von M folgt insbesondere, dass beide Definitionen für s , dort wo beide wohldefiniert sind, übereinstimmen.

In jedem Fall folgt daraus, dass $\varphi(t, s) = (x, y, z)$ ist. Zusätzlich überlege man sich leicht, dass φ sogar injektiv (und damit bijektiv) ist. Dies sieht man einerseits daran dass für $\varphi(t_1, s_1) = \varphi(t_2, s_2)$ aus der ersten Komponente sofort $t_1 = t_2$ folgt und andererseits aus der zweiten oder dritten Komponente dann $s_1 = s_2$ folgt.

Des weiteren sieht man leicht, dass φ stetig differenzierbar ist mit

$$\partial_t \varphi(t, s) = (1, -s \sin(t), s \cos(t)); \quad \partial_s \varphi(t, s) = (0, \cos(t), \sin(t))$$

Betrachten wir Linearkombinationen $\lambda_1 \partial_t \varphi(t, s) + \lambda_2 \partial_s \varphi(t, s) = 0$, folgt aus der ersten Komponenten sofort $\lambda_1 = 0$ und damit, da \sin und \cos nicht gleichzeitig $= 0$ sein können auch $\lambda_2 = 0$, womit beide Vektoren überall linear unabhängig sind. *q.e.d.*

Wir erhalten entsprechend die Flächenelemente

$$\begin{aligned} \sigma_\varphi(t, s) &= \partial_t \varphi(t, s) \times \partial_s \varphi(t, s) = \left(-s \sin^2(t) - s \cos^2(t), -\sin(t), \cos(t) \right) \\ &= (-s, -\sin(t), \cos(t)) \end{aligned}$$

und

$$\|\sigma_\varphi(t, s)\|^2 = s^2 + \cos(t)^2 + \sin(t)^2 = s^2 + 1$$

Wir berechnen für die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\rightarrow \frac{e^{-x^2}}{(1 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

das Oberflächenintegral über M . Es gilt, da φ ganz M parametrisiert, nach Definition

$$\begin{aligned} \int_M f d\sigma &= \int_\varphi f d\sigma = \int_{\mathbb{R}^2} f(\varphi(t, s)) \|\sigma_\varphi(t, s)\| d\lambda(t, s) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{-t^2} \sqrt{1 + s^2}}{(1 + s^2 \cos^2(t) + s^2 \sin^2(t))^{\frac{3}{2}}} d\lambda(t, s) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{-t^2}}{1 + s^2} d\lambda(t, s) \end{aligned}$$

Da alle auftretenden Terme positiv sind erhalten wir mit dem Satz von Tonelli

$$\int_M f d\sigma = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-t^2}}{1 + s^2} dt ds = \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1 + s^2} ds$$

Ersteres identifizieren wir als Gauß-Integral mit $\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$. Bei letzteren erinnern wir uns daran, dass die Substitution $s = \tan(x)$ zu der Stammfunktion \arctan führt. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_M f d\sigma &= \sqrt{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1 + s^2} ds = \sqrt{\pi} \lim_{s \rightarrow \infty} (\arctan(s) - \arctan(-s)) \\ &= \sqrt{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) = \sqrt{\pi} \pi = \pi^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

Aufgabe 3. (Oberflächenintegrale 2)

Wir machen direkt weiter mit Oberflächenintegralen. Und zwar wollen wir eine Allgemeine Formel für die Mantelfläche eines Rotationskörpers aufstellen.

Voraussetzung. Es sei I ein offenes Intervalle, $f : I \rightarrow (0, \infty)$ differenzierbar und definiere

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 + z^2 = f(x)^2\}$$

Zur Erinnerung: Bei M handelt es sich um die Oberfläche eine Rotationskörpers um die x -Achse, also einen Zylinder mit veränderlichen Radius, welcher von f vorgegeben wird.

Behauptung. Die Oberfläche von M ist durch

$$2\pi \int_I f(t) \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt$$

gegeben.

Beweis. Wir überlegen uns zunächst wie wir M parametrisieren können. Man überzeuge sich leicht, dass die Mantelfläche eines Zylinders der Länge $L := l(I)$ mit Radius R um die x -Achse durch

$$\begin{aligned} I \times (0, 2\pi) &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, \varphi) &\mapsto (x, R \cos(\varphi), R \sin(\varphi)) \end{aligned}$$

angegeben werden kann. Streng genommen parametrisieren wir damit nicht die gesamte Mantelfläche des Zylinders, aber die Punkte die wir so nicht erreichen bilden nur eine Nullmenge, weshalb dies für die Integration nicht problematisch ist. Entsprechend erhalten wir eine Parametrisierung von M indem wir den variablen Radius beachten durch

$$\begin{aligned} \psi : I \times (0, 2\pi) &\rightarrow M \\ (x, \varphi) &\mapsto (x, f(x) \cos(\varphi), f(x) \sin(\varphi)) \end{aligned}$$

Wir zeigen nun wie zuvor, dass es sich bei ψ um ein parametrisiertes Flächenstück handelt. Mithilfe des Trigonometrischen Pythagoras ($\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \forall x \in \mathbb{R}$) sieht man leicht, dass ψ wirklich nach M abbildet.

Wie schon bereits besprochen ist ψ nicht surjektiv. Man überzeuge sich aber leicht, dass lediglich die Kurve $t \mapsto (t, f(t), 0)$ fehlt, die zum Oberflächenintegral aber keinen Beitrag liefert. Des Weiteren sieht man durch die Voraussetzung an f , dass ψ differenzierbar ist und wir erhalten

$$\partial_x \psi(x, \varphi) = (1, f'(x) \cos(\varphi), f'(x) \sin(\varphi))$$

und

$$\partial_\varphi \psi(x, \varphi) = (0, -f(x) \sin(\varphi), f(x) \cos(\varphi)).$$

Da f nach Voraussetzung nicht-null sein kann, folgt analog zur letzten Aufgabe, dass diese Vektoren überall linear unabhängig sind. Damit können wir nun die Oberflächen-Elemente berechnen. Wir finden

$$\begin{aligned} \sigma_\psi(x, \varphi) &= \partial_x \psi(x, \varphi) \times \partial_\varphi \psi(x, \varphi) \\ &= (f(x)f'(x) \cos^2(\varphi) + f(x)f'(x) \sin^2(\varphi), -f(x) \cos(\varphi), -f(x) \sin(\varphi)) \\ &= (f(x)f'(x), -f(x) \cos(\varphi), -f(x) \sin(\varphi)) \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} \|\sigma_\psi(x, \varphi)\| &= \sqrt{f(x)^2 (f'(x))^2 + f(x)^2 \cos^2(\varphi) + f(x)^2 \sin^2(\varphi)} \\ &= f(x) \sqrt{(f'(x))^2 + 1} \end{aligned}$$

wobei wir wieder benutzt haben, dass f nicht-negativ ist. Da dies stets positiv ist finden wir mit dem Satz von Tonelli die Oberfläche

$$\begin{aligned} \int_M d\sigma &= \int_\psi d\sigma = \int_{I \times (0, 2\pi)} \|\sigma_\psi(x, \varphi)\| d\lambda^2(x, \varphi) \\ &= \int_I \int_0^{2\pi} f(x) \sqrt{(f'(x))^2 + 1} d\varphi dx = 2\pi \int_I f(x) \sqrt{(f'(x))^2 + 1} dx \end{aligned}$$

q. e. d.

Aufgabe 4. (Oberflächenintegrale 3)

Zum Schluss wollen wir unser vorheriges Ergebnis benutzen um zu sehen, dass es Körper gibt, die ein endliches Volumen, aber eine unendliche Oberfläche haben. Wir betrachten dazu wie in Aufgabe 3 einen Rotationskörper

$$R = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 + z^2 \leq \frac{1}{x^2}, x \geq 1 \right\}$$

Die Oberfläche von R setzt sich aus der Mantelfläche

$$M = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 + z^2 = \frac{1}{x^2} \right\}$$

mit $f : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ und der Grundfläche O zusammen.

Behauptung. R hat eine unendliche Oberfläche.

Beweis. Es reicht aus die Mantelfläche zu betrachten, da die Grundfläche offensichtlich endlich ist. Für die Mantelfläche erhalten wir mit der vorherigen Aufgabe, da f auf $(1, \infty)$ stetig differenzierbar ist, die Oberfläche

$$\begin{aligned} \int_M d\sigma &= 2\pi \int_I f(x) \sqrt{(f'(x))^2 + 1} dx = 2\pi \int_1^\infty \frac{1}{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} dx \\ &\geq \int_1^\infty \frac{1}{x} dx = \ln(x) \Big|_1^\infty = \infty \end{aligned}$$

wobei wir die Monotonie des Integrals ausgenutzt haben.

q. e. d.

Entsprechend wollen wir noch zeigen, dass das Volumen von R endlich ist.

Behauptung. R hat endliches Volumen.

Beweis. Für die Berechnung des Volumens benutzen wir das Ergebnis aus Serie 01 Aufgabe 4. Dort haben wir mithilfe des Prinzip von Cavalieri gezeigt, dass das Volumen eines Rotationskörpers K (analog definiert zu R) durch

$$\lambda^3(K) = \pi \int_I f(x)^2 dx$$

gegeben ist. In unserem Fall ergibt das

$$\lambda^3(R) = \pi \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = \pi \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_1^\infty = \pi < \infty$$

q. e. d.

Serie 08: Oberflächenintegrale II

Bemerkung zu Flächen im \mathbb{R}^3

Sowohl in der Vorlesung als auch im Seminar wurde bereits das Konzept von gekrümmten Flächen (dabei meinen wir zweidimensionale Unter-Mannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^3). Bisher konnten wir dabei alle Flächen (bis auf Null-Mengen) mit einer einzigen Karte φ parametrisieren.

Leider ist dies im Allgemeinen nicht möglich (nicht mal bis auf Null-Mengen). Stattdessen muss man im Allgemeinen eine Familie von kompatiblen Karten, einen s.g. Atlas, für eine Fläche betrachten. In diesem Fall wird auch die Integration über diese Flächen komplizierter als der in der Vorlesung betrachtete Fall.

Im Laufe dieser Serie werden wir an zwei Stellen Aussagen über allgemeine Flächen aufstellen und beweisen. D.h. wir wissen in diesen Fällen nicht wie viele Karten ein Atlas für diese Flächen mindestens enthalten muss. Da wir mit unserem bisherigen Wissen den Fall, dass wir mehr als eine Karte brauchen, nicht behandeln können werden wir im Folgenden annehmen, dass die betrachteten Flächen durch eine einzige Karte parametrisiert werden können. Die Aussagen gelten aber auch allgemeiner.

Bemerkung zu Tangential-Ebenen und Normalenvektorfelder von Flächen

Des Weiteren betrachten wir in Aufgabe 3. dieser Serie orientierbare Flächen. Dieses Konzept wollen wir kurz ein wenig mehr beleuchten. An dieser Stellen wollen wir sogar ein wenig weiter ausholen um das Gesamtbild besser zu verstehen.

Bevor wir über eine Orientierung reden können überlegen wir uns was eine Tangente an einer Fläche ist.

Definition (Tangentenvektor und Tangential-Ebene).

Sei M eine Fläche im \mathbb{R}^3 und $p \in M$ ein Punkt der Fläche. Wir nennen $v \in \mathbb{R}^3$ einen Tangentenvektor zur Fläche M am Punkt p , Falls es eine differenzierbare Kurve

$$\gamma : I \rightarrow M$$

(I ein offenes Intervall s.d. $0 \in I$) gibt, s.d. $\gamma(0) = p$ und $\gamma'(0) = v$ ist. Die Menge aller Tangentenvektoren nennen wir die Tangential-Ebene $T_p M$ zur Fläche M am Punkt p .

Bemerkung.

- (i) Da die Ableitung eine lineare Operation ist, kann man sich leicht überzeugen, dass Linearkombinationen von Tangentenvektoren an einem Punkt wieder Tangentenvektoren an diesem Punkt sind.
- (ii) Man kann sogar zeigen, dass $T_p M$ einen zweidimensionalen Vektorraum bildet. Wir können uns die Tangential-Ebenen, der Intuition entsprechend, also als \mathbb{R}^2 vorstellen.
- (iii) Die Tangential-Ebenen $T_{p_1} M, T_{p_2} M$ von zwei verschiedenen Punkten $p_1, p_2 \in M$ sind als vollkommen unabhängig zu verstehen. Stellen wir sie uns als Ebenen im \mathbb{R}^3 vor schneiden sie sich zwar in der Regel, aber es ist nicht sinnvoll Tangentenvektoren von verschiedenen Punkten der Fläche M miteinander zu vergleichen.

Definition (Normalen und Normalenvektorfelder).

Sei M wieder eine Fläche im \mathbb{R}^3 und $T_p M$ die Tangential-Ebene zu einem Punkt $p \in M$. Dann ist der Vektor $n \in \mathbb{R}^3$ normal zur Fläche M am Punkt p , falls $\|n\| = 1$ und n orthogonal zur Ebene $T_p M$ steht, d.h.

$$\langle n | v \rangle = 0 \quad \forall v \in T_p M$$

Das Vektorfeld

$$\begin{aligned} n : M &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ p &\mapsto n(p) =: n_p \end{aligned}$$

heißt Normalenvektorfeld, falls für alle $p \in M$, n_p normal zur Fläche M bei p steht.

Wir nennen ein stetiges Normalenvektorfeld Orientierung von M . Falls für M eine Orientierung existiert nennen wir M orientierbar.

Bemerkung.

- (i) Nicht jede Fläche ist orientierbar. Das wahrscheinlich bekannteste Beispiel einer nicht orientierbaren Fläche ist das Möbius Band, welches wir im Seminar besprechen werden.
- (ii) Die meisten Flächen die wir besprechen sind orientierbar, z.B. die Oberflächen von Kugeln.
- (iii) Man kann sich leicht überlegen, dass es zu jedem Punkt in der Fläche nur zwei Normalenvektoren gibt. Man kann allgemeiner zeigen, dass für eine orientierbare Fläche M mit Orientierung n , $-n$ ebenfalls eine Orientierung ist und es keine weiteren Orientierungen gibt, vorausgesetzt M ist (weg-)zusammenhängend.

Aufgabe 1. (Integrierbarkeit über Flächen 1)

Voraussetzung. Wir betrachten eine Fläche $M \subset \mathbb{R}^3$ mit endlichem Flächeninhalt $A = \int_M d\sigma < \infty$ und eine beschränkte Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, d.h. $|f| \leq K$ für ein $K \in \mathbb{R}$.

Wie auch bei reellen Integralen (also Integralen über \mathbb{R}) gibt es bei der Integration über Flächen (bzw. Mannigfaltigkeiten) die Problematik, dass Integrale unter Umständen nicht wohldefiniert sein können. Allerdings kann man sich bereits im einfachen Fall leicht davon überzeugen, dass reelle Integrale von beschränkten Funktionen über beschränkte Gebiete dieser Problematik nicht unterliegen. Wir wollen dies nun verallgemeinern.

Behauptung. f ist über M integrierbar und es gilt

$$\left| \int_M f d\sigma \right| \leq KA$$

Beweis. Wir betrachten dazu das Integral von $|f|$ über M . Außerdem wollen wir die Monotonie und die Dreiecksungleichung für Oberflächenintegrale verallgemeinern. Wie in der Bemerkung am Anfang der Serie erläutert nehmen wir an, dass M vollständig durch eine Parametrisierung ($V \subset \mathbb{R}^2$ offen)

$$\varphi : V \rightarrow M$$

abgedeckt wird. Entsprechend existiert überall das Oberflächenelement σ_φ und wir können zeigen

$$\begin{aligned} \int_M |f| d\sigma &= \int_\varphi |f| d\sigma = \int_V |f(\varphi(t))| \|\sigma_\varphi(t)\| d\lambda^2(t) \leq K \int_V \|\sigma_\varphi(t)\| d\lambda^2(t) \\ &= KA \end{aligned}$$

wobei wir die uns bereits bekannte Monotonie für reelle Integrale benutzt haben. f ist demnach über M integrierbar. Wir zeigen die gewünschte Ungleichung durch Anwendung der bekannten Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} \left| \int_M f d\sigma \right| &= \left| \int_\varphi f d\sigma \right| = \left| \int_V f(\varphi(t)) \|\sigma_\varphi(t)\| d\lambda^2(t) \right| \\ &\leq \int_V |f(\varphi(t))| \|\sigma_\varphi(t)\| d\lambda^2(t) \leq KA \end{aligned}$$

q.e.d.

Aufgabe 2. (Integrierbarkeit über Flächen 2)

Als nächstes wollen wir die Integrierbarkeit von Vektorfeldern betrachten.

Voraussetzung. Es sei

$$E : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto \frac{1}{1+z^2}(1, 0, 0)$$

und $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

Behauptung. E ist über M integrierbar.

Beweis. Wir haben bereits gesehen, dass es sich bei M um einen, in diesem Fall unendlich langen, Zylinder um die z -Achse mit Radius 1 handelt. Wir wissen außerdem bereits, dass M , bis auf eine Gerade durch

$$\varphi : \mathbb{R} \times (0, 2\pi) \rightarrow M \\ (z, \theta) \mapsto (\cos(\theta), \sin(\theta), z)$$

parametrisiert werden kann. Da das Integral, welches wir betrachten wollen, die Gerade nicht sieht, können wir dies als Parametrisierung von ganz M auffassen. Wir erhalten analog zu der letzten Serie das Oberflächenelement

$$\sigma_\varphi(z, \theta) = \partial_z \varphi(z, \theta) \times \partial_\theta \varphi(z, \theta) = -(\cos(\theta), \sin(\theta), 0)$$

Damit ergibt sich

$$\int_{\mathbb{R} \times (0, 2\pi)} |\langle E(\varphi(z, \theta)) | \sigma_\varphi(z, \theta) \rangle| d\lambda^2(z, \theta) = \int_{\mathbb{R} \times (0, 2\pi)} \frac{|\cos(\theta)|}{1+z^2} d\lambda^2(z, \theta)$$

Da der Integrand nach Konstruktion stets positiv ist finden wir mit dem Satz von Tonelli

$$= \int_{\mathbb{R}} \int_0^{2\pi} \frac{|\cos(\theta)|}{1+z^2} d\theta dz$$

Für das θ Integral sehen wir sofort

$$\int_0^{2\pi} |\cos(\theta)| d\theta \leq \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi < \infty$$

Für das z -Integral finden wir analog zur vorherigen Serie die Stammfunktion \arctan und damit

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+z^2} dz = \lim_{z \rightarrow \infty} (\arctan(z) - \arctan(-z)) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi < \infty$$

Insgesamt ist das Integral über $|\langle E \circ \varphi | \sigma_\varphi \rangle|$ also endlich und E ist über M integrierbar. *q. e. d.*

Nachdem wir die Integrierbarkeit sichergestellt haben wollen wir noch das Integral von E über M berechnen. Analog zu oben finden wir dafür

$$\begin{aligned}\int_M \langle E | d\sigma \rangle &= \int_{\mathbb{R} \times (0, 2\pi)} \langle E(\varphi(z, \theta)) | \sigma_\varphi(z, \theta) \rangle d\lambda^2(z, \theta) \\ &= - \int_{\mathbb{R} \times (0, 2\pi)} \frac{\cos(\theta)}{1+z^2} d\lambda^2(z, \theta)\end{aligned}$$

Da wir bereits gezeigt haben, dass dies integrierbar ist können wir den Satz von Fubini anwenden und finden

$$\int_M \langle E | d\sigma \rangle = - \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+z^2} dz \int_0^{2\pi} \cos(\theta) d\theta = -\pi \cdot 0 = 0$$

Aufgabe 3. (Orientierbare Flächen)

Zum Abschluss betrachten wir den Zusammenhang zwischen dem Flächenelementen und Normalenvektorfeldern auf orientierbaren Flächen.

Voraussetzung. Sei M eine orientierbare Fläche mit Orientierung n , d.h. ein stetiges Vektorfeld welches überall normiert ist und senkrecht zur Fläche steht. Sei außerdem E ein Vektorfeld auf M .

Behauptung.

$$\int_M \langle E | d\sigma \rangle = \int_M \langle E | n \rangle d\sigma$$

Beweis. Gemäß der Bemerkung am Anfang nehmen wir an, dass M vollständig durch eine Karte $\varphi : V \rightarrow M$, $V \subset \mathbb{R}^2$ offen, parametrisiert werden kann. Des Weiteren können wir o.B.d.A. annehmen, dass M (weg)zusammenhängend ist. Ist M nicht zusammenhängend so kann das folgende Argument jeweils für die Zusammenhangskomponenten gemacht werden.

Aus diesen Annahmen folgt, dass die einzigen beiden möglichen Orientierungen von M durch n und $-n$ gegeben sind. Als nächstes betrachten wir die Flächenelemente σ_φ und $\|\sigma_\varphi\|$. Nach Definition sind $v_1 := \partial_1 \varphi$ und $v_2 := \partial_2 \varphi$ überall linear unabhängig, womit überall $\sigma_\varphi \neq 0$ gelten muss. Außerdem sind für $t \in V$ die Vektoren $v_1(t)$ und $v_2(t)$ tangential zur Fläche am Punkt $\varphi(t) \in M$ womit

$$\sigma_\varphi := v_1 \times v_2$$

überall senkrecht zur Fläche steht. Ausgehend davon kann man sich leicht überzeugen, dass es sich bei

$$N(\varphi(t)) := \frac{\sigma_\varphi(t)}{\|\sigma_\varphi(t)\|}$$

um ein stetiges Normalenvektorfeld auf M , also eine Orientierung, handelt. Wir können daher o.B.d.A. annehmen, dass $N = n$ bzw. $\sigma_\varphi = n\|\sigma_\varphi\|$ ist. Ansonsten können wir dies immer erreichen indem wir die Koordinaten von φ vertauschen, wodurch sich im Kreuzprodukt ein Minus ergibt. Wir nennen eine Parametrisierung, die dies erfüllt, auch orientierte Parametrisierung. Für unsere Behauptung ergibt sich daraus aus den Definitionen der Oberflächenintegrale

$$\begin{aligned}\int_M \langle E|d\sigma \rangle &= \int_\varphi \langle E|d\sigma \rangle = \int_V \langle E(\varphi(t))|\sigma_\varphi(t) \rangle d\lambda^2(t) \\ &= \int_V \langle E(\varphi(t))|n(\varphi(t)) \rangle \|\sigma_\varphi(t)\| d\lambda^2(t) \\ &= \int_V \langle E|n \rangle(\varphi(t)) \|\sigma_\varphi(t)\| d\lambda^2(t) = \int_M \langle E|n \rangle d\sigma\end{aligned}$$

q. e. d.

Zum Schluss wollen wir dieses Wissen benutzen um das folgende Oberflächenintegral zu berechnen. Es sei $M = \partial B_1(0) =: \mathbb{S}^2$ (da es sich hier um eine zweidimensionale (Unter)Mannigfaltigkeit handelt) die Einheitskugel im \mathbb{R}^3 und das Vektorfeld E gegeben durch

$$\begin{aligned}E : \mathbb{S}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ x &\mapsto \frac{x}{\|x\|^3}\end{aligned}$$

Man denke z.B. an die Kraftfelder, welche von Punktmassen/-ladungen erzeugt werden. Wir wollen für diesen Fall das Oberflächenintegral berechnen. Man überzeuge sich leicht, dass \mathbb{S}^2 orientierbar ist mit Orientierung

$$n(x) := \frac{x}{\|x\|}$$

Aus der zuvor gezeigten Aussage folgt damit

$$\int_M \langle E|d\sigma \rangle = \int_M \langle E|n \rangle d\sigma$$

wobei

$$\langle E(x)|n(x) \rangle = \frac{\langle x|x \rangle}{\|x\|^4} = \frac{1}{\|x\|^2}$$

für alle $x \in \mathbb{S}^2$ ist. Da $\|x\|$ auf \mathbb{S}^2 nach Definition außerdem stets 1 ist und wir die Oberfläche der Kugel bereits kennen, ergibt sich

$$\int_M \langle E|d\sigma \rangle = \int_M 1 d\sigma = 4\pi$$

Serie 09: Komplexe Differenzierbarkeit und Wegintegrale

Bemerkung zu Komplexen Zahlen

In der Vergangenheit haben wir für komplexe Zahlen $z \in \mathbb{C}$ immer die Darstellung $z = z_1 + iz_2$ gewählt. Dabei ist i , definiert durch $i^2 = -1$, die imaginäre Einheit, $z_1 = \operatorname{Re}(z) \in \mathbb{R}$ der Realteil und $z_2 = \operatorname{Im}(z) \in \mathbb{R}$ der Imaginärteil von z .

Hierbei ist es wichtig zu verstehen, dass Real- und Imaginärteil als unabhängig voneinander zu sehen sind. D.h. zwei komplexe Zahlen $z, w \in \mathbb{C}$ sind genau dann gleich, wenn sowohl ihre Realteile als auch Imaginärteile übereinstimmen:

$$z = w \iff \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(w), \operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(w)$$

Dies motiviert die häufig verwendete geometrische Darstellung der komplexen Zahlen in der s.g. Gaußschen Zahlenebene: Da sich jede komplexe Zahl offenbar durch zwei unabhängige reelle Zahlen charakterisieren lässt, können wir uns \mathbb{C} also wie einen \mathbb{R}^2 vorstellen. Dabei identifizieren wir die Vektoren e_1, e_2 der Standardbasis vom \mathbb{R}^2 mit $1 + i0$ bzw. $0 + i1$. Daraus ergibt sich eine (lineare) eins-zu-eins Korrespondenz zwischen Vektoren in der Ebene und komplexen Zahlen mit

$$a + ib \in \mathbb{C} \longleftrightarrow (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

Wie auch reelle Zahlen lassen sich komplexe Zahlen addieren (subtrahieren) und multiplizieren (dividieren). Es ergeben sich daher folgende 'Rechenregeln'

$\forall z, w \in \mathbb{C}$

- $z \pm w = (z_1 \pm w_1) + i(z_2 \pm w_2)$
- $z \cdot w = (z_1 + iz_2) \cdot (w_1 + iw_2) = (z_1w_1 - z_2w_2) + i(z_1w_2 + z_2w_1)$
- $\bar{z} = \overline{z_1 + iz_2} := z_1 - iz_2$ (komplexe Konjugation, manchmal auch z^*)
- $z\bar{z} = |z|^2 := z_1^2 + z_2^2$ (Betrag)
- Falls $z \neq 0$

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{z_1}{z_1^2 + z_2^2} - i \frac{z_2}{z_1^2 + z_2^2}$$

- Falls $z \neq 0$: $w/z = w \cdot z^{-1}$

Die Addition lässt sich direkt auf die Darstellung im \mathbb{R}^2 übertragen. Die komplexe Konjugation entspricht einer Spiegelung an der x -Achse und der Betrag entspricht der euklidischen Norm. Das Produkt zwischen komplexen Zahlen lässt sich allerdings nicht ganz so direkt auf den \mathbb{R}^2 übertragen.

Wir betrachten daher die Koordinatendarstellung von $z \cdot w$, also den (Spalten-)Vektor, wobei wir z jetzt als fest ansehen.

$$\begin{pmatrix} z_1 w_1 - z_2 w_2 \\ z_1 w_2 + z_2 w_1 \end{pmatrix} = w_1 \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + w_2 \begin{pmatrix} -z_2 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 & -z_2 \\ z_2 & z_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

Wir können uns also die Multiplikation der komplexen Zahl z an ein beliebiges w als Matrixmultiplikation von einer reellen Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

von links an einen Spaltenvektor vorstellen. Geometrisch entspricht dies einer Drehstreckung. Später werden wir sehen, dass sich bei der Multiplikation von komplexen Zahlen sich ihre Phasen (Winkel zur reellen Achse) addieren (\rightarrow Drehung) und ihre Längen multiplizieren (\rightarrow Streckung).

Aufgabe 1. (Komplexe Differenzierbarkeit)

Im Anschluss an die Bemerkung untersuchen wir die folgende Aussage.

Voraussetzung. Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ und definiere die \mathbb{R} -lineare Abbildung

$$T_A : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

\mathbb{R} -linear bedeutet, dass

$$T_A(z + \lambda w) = T_A(z) + \lambda T_A(w) \quad \forall z, w \in \mathbb{C} \text{ und } \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Behauptung. Die Abbildung T_A ist \mathbb{C} -linear

$$\iff A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

wobei $a = a_{11} = a_{22}$ und $b = a_{21} = -a_{12}$ sein soll.

\mathbb{C} -linear bedeutet analog, dass

$$T_A(z + \xi w) = T_A(z) + \xi T_A(w) \quad \forall z, w \in \mathbb{C} \text{ und } \forall \xi \in \mathbb{C}$$

Beweis. Wir identifizieren wie in der Bemerkung beschrieben \mathbb{C} mit \mathbb{R}^2 durch

$$a + ib \in \mathbb{C} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

Entsprechend ist $\forall z \in \mathbb{C}$

$$T_A(z) = A \cdot z = \begin{pmatrix} z_1 a_{11} + z_2 a_{12} \\ z_1 a_{21} + z_2 a_{22} \end{pmatrix}$$

Wenn A die oben geforderte Form hat können wir die Matrixmultiplikation mit A , gemäß der obigen Bemerkung, mit der Multiplikation mit $w = a + ib$ identifizieren. D.h. $T_A(z) = w \cdot z \forall z \in \mathbb{C}$, was offensichtlich eine \mathbb{C} -lineare Abbildung ist.

Ist T_A hingegen eine \mathbb{C} -lineare Abbildung, so ist

$$\begin{aligned} T_A(1) &= T_A(1 + i0) = a_{11} + ia_{21} \\ \Rightarrow T_A(i) &= T_A(0 + i1) = a_{12} + ia_{22} \\ &= iT_A(1) = -a_{21} + ia_{11} \end{aligned}$$

womit die Aussage folgt.

q.e.d.

Wir wollen dieses Ergebnis benutzen um den Zusammenhang zwischen komplexer und reeller Differenzierbarkeit herzustellen.

Voraussetzung. Sei $U \subset \mathbb{C}$ nichtleer und offen, und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$. Setze $\operatorname{Re}(f) \equiv u$ und $\operatorname{Im}(f) \equiv v$. Sei außerdem $z_0 \in U$ beliebig.

Behauptung. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (i) f ist komplex differenzierbar in z_0 .
- (ii) f ist reell differenzierbar in z_0 und $Df(z_0)$ ist \mathbb{C} -linear.
- (iii) f ist reell differenzierbar in z_0 und es gelten die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen

$$\partial_x u(z_0) = \partial_y v(z_0), \quad \partial_y u(z_0) = -\partial_x v(z_0)$$

Beweis. Wir argumentieren zuerst (i) \Leftrightarrow (ii). f ist genau dann komplex differenzierbar in z_0 , wenn $\exists a \in \mathbb{C}$ s.d.

$$f(z) = f(z_0) + a(z - z_0) + \mathbf{o}(|z - z_0|)$$

für $z \in U$. Wir identifizieren a mit der \mathbb{C} -linearen reellen Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ und \mathbb{C} mit \mathbb{R}^2 . Damit ist die vorherige Aussage äquivalent zu

$$f(z) = f(z_0) + A(z - z_0) + \mathbf{o}(\|z - z_0\|)$$

mit A \mathbb{C} -linear $\Leftrightarrow f$ ist (reell) total differenzierbar in z_0 mit $Df(z_0) = A$ \mathbb{C} -linear.

Wir zeigen nun noch $(ii) \Leftrightarrow (iii)$. Aus der vorherigen Aufgabe folgt, dass $Df(z_0)$ genau dann \mathbb{C} -linear ist, wenn $Df(z_0) = A$ die Form $a_{11} = a_{22}$ und $a_{12} = -a_{21}$ hat. Da

$$A = Df(z_0) = \begin{pmatrix} \partial_x u(z_0) & \partial_y u(z_0) \\ \partial_x v(z_0) & \partial_y v(z_0) \end{pmatrix}$$

gilt, ist dies äquivalent zu den Cauchy-Riemann Differentialgleichungen. *q. e. d.*

Zum Schluss wollen wir dies für die Funktion

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, (x + iy) \mapsto x^3 y^2 + ix^2 y^3$$

anwenden. Offensichtlich ist sie reell differenzierbar. Wir betrachten daher die Cauchy-Riemann Differentialgleichung. Wir finden

$$\begin{aligned} \partial_x u(x + iy) &= 3x^2 y^2 \stackrel{!}{=} \partial_y v(x + iy) = 3x^2 y^2 \\ \partial_y u(x + iy) &= 2x^3 y \stackrel{!}{=} -\partial_x v(x + iy) = -2xy^3 \end{aligned}$$

Während erstere überall erfüllt ist, gilt letztere nur falls x oder y Null ist, also auf den Koordinatenachsen. Dementsprechend ist f dort komplex differenzierbar. Allerdings ist f niemals holomorph, da es keine offene Menge $U \subset \mathbb{C}$ gibt, auf der f komplex differenzierbar ist.

Aufgabe 2. (Holomorphe Funktionen und Wegintegrale)

Wir bleiben beim Begriff der Holomorphie.

Voraussetzung. Sei $\zeta = a + ib \in \mathbb{C}$ ($a, b \in \mathbb{R}$) und betrachte die Funktion

$$f : \mathbb{C} \setminus \{\zeta\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{1}{z - \zeta}$$

Wie zuvor setzen wir u, v für Real- und Imaginärteil von f .

Wir solche Funktionen noch öfters betrachten.

Behauptung. f ist auf $\mathbb{C} \setminus \{\zeta\}$ holomorph.

Beweis. Zunächst argumentieren wir, dass der betrachtete Definitionsbereich eine offene Teilmenge von \mathbb{C} ist. Dies folgt direkt daraus, dass $\{\zeta\} \subset \mathbb{C}$ als einzelner Punkt abgeschlossen ist, da das Komplement einer abgeschlossenen Menge immer offen ist. Insbesondere ist hier f wohldefiniert, da die Singularität bei $z = \zeta$ ausgeschlossen wurde. Für $z \neq \zeta$ überprüfen wir die

Cauchy-Riemann Differentialgleichungen.

Dazu bestimmen wir mit Hilfe der in der Bemerkung aufgeführten Rechenregeln zunächst u, v . Für $z = x + iy \neq \zeta$ gilt

$$\begin{aligned} f(x + iy) &= \frac{1}{(x - a) + i(y - b)} = \frac{x - a}{(x - a)^2 + (y - b)^2} - i \frac{y - b}{(x - a)^2 + (y - b)^2} \\ &\stackrel{!}{=} u(x, y) + iv(x, y) \end{aligned}$$

also

$$u(x, y) = \frac{x - a}{(x - a)^2 + (y - b)^2}, \quad v(x, y) = -\frac{y - b}{(x - a)^2 + (y - b)^2}$$

Da die Nenner auf dem angegebenen Definitionsbereich niemals 0 werden können sind diese Funktionen stetig differenzierbar. Wir finden für die partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned} \partial_x u(x, y) &= \frac{(b - y)^2 - (a - x)^2}{((a - x)^2 + (b - y)^2)^2} \\ \partial_y v(x, y) &= \frac{(b - y)^2 - (a - x)^2}{((a - x)^2 + (b - y)^2)^2} = \partial_x u(x, y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_y u(x, y) &= -\frac{2(x - a)(y - b)}{((x - a)^2 + (y - b)^2)^2} \\ \partial_x v(x, y) &= \frac{2(x - a)(y - b)}{((a - x)^2 + (b - y)^2)^2} = -\partial_y u(x, y) \end{aligned}$$

Die Cauchy-Riemann DGs sind also überall auf dem offenen Definitionsbereich von f erfüllt und da f dort reell differenzierbar ist, ist sie sogar holomorph. *q.e.d.*

Als nächstes wollen wir das komplexe Wegintegral von f entlang $\partial B_R(\zeta)$, $R > 0$, berechnen. Wir fassen dies als (vektorwertiges) Wegintegral im \mathbb{R}^2 auf. Wir parametrisieren $\partial B_R(\zeta)$ zunächst *gegen den Uhrzeigersinn*. Dazu nehmen wir die uns bereits bekannte Parametrisierung eines Kreises und verschieben diese zu $\zeta = a + ib$. Wir haben also

$$\phi(\varphi) = (R \cos(\varphi)) + i(R \sin(\varphi)) + a + ib = (R \cos(\varphi) + a) + i(R \sin(\varphi) + b)$$

und

$$\phi(\varphi)' = (-R \sin(\varphi)) + i(R \cos(\varphi)) \neq 0 \quad \forall \varphi \in \mathbb{R}$$

Für eine Umdrehung finden wir daher das Wegintegral

$$\begin{aligned}
 \int_{\phi} f(z) dz &= \int_0^{2\pi} f(\phi(\varphi)) \phi'(\varphi) d\varphi \\
 &= \int_0^{2\pi} \frac{R \cos(\varphi) - iR \sin(\varphi)}{(R \cos(\varphi))^2 + (R \sin(\varphi))^2} (-R \sin(\varphi) + iR \cos(\varphi)) d\varphi \\
 &= \int_0^{2\pi} \frac{R \cos(\varphi) - iR \sin(\varphi)}{R^2} (-R \sin(\varphi) + iR \cos(\varphi)) d\varphi \\
 &= \int_0^{2\pi} \frac{i(R^2(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)))}{R^2} d\varphi = 2\pi i
 \end{aligned}$$

Für den Umlauf *im Uhrzeigersinn* ersetzen wir φ durch $-\varphi$. Für n Umläufe ergibt sich

$$\int_0^{n \cdot 2\pi} i d(-\varphi) = -n \cdot 2\pi i$$

Zum Vergleich berechnen wir noch das entsprechende reelle Kurvenintegral. Der Unterschied zur vorherigen Rechnung ist, dass wir hier das Produkt das Skalarprodukt verwenden, während wir zuvor komplexe Zahlen multipliziert haben. Mit analoger Parametrisierung finden wir mit $g(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$

$$\begin{aligned}
 \int_{\phi} g ds &= \int_0^{2\pi} \langle g(\phi(\varphi)) | \phi'(\varphi) \rangle d\varphi \\
 &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{R^2} (-R^2 \sin(\varphi) \cos(\varphi) - R^2 \sin(\varphi) \cos(\varphi)) d\varphi \\
 &= - \int_0^{2\pi} (\sin(\varphi) \cos(\varphi) + \sin(\varphi) \cos(\varphi)) d\varphi = - \sin^2(x) \Big|_0^{2\pi} = 0
 \end{aligned}$$

Wer die oben verwendete Stammfunktion nicht kennt kann dieses Integral auch mit der Substitution $u = \sin(\varphi)$ lösen.

Aufgabe 3. (Komplexe Differenzierbarkeit und harmonische Funktionen)

Wir machen weiter mit harmonischen Funktionen. Sei $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^2$ offen und (weg-)zusammenhängend und $u : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{C}$ zweimal stetig differenzierbar ($u \in \mathbf{C}^2(\tilde{U})$). u heißt harmonisch, falls es die Laplace-Gleichung

$$\Delta u = \partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0$$

erfüllt.

Voraussetzung. Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet (offen und (weg-)zusammenhängend) und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Bezeichne mit u, v wieder Real- und Imaginärteil von f . Wir setzen voraus, dass $u, v \in \mathbf{C}^2(U)$ ist.

Behauptung. u und v sind harmonisch.

Beweis. f ist holomorph, also insbesondere komplex differenzierbar auf ganz U . Damit erfüllen u und v die Cauchy-Riemann-DGLs. Es gilt daher

$$\begin{aligned}\Delta u &= \partial_x^2 u + \partial_y^2 u = \partial_x \partial_y v - \partial_y \partial_x v = 0 \\ \Delta v &= \partial_x^2 v + \partial_y^2 v = -\partial_x \partial_y u + \partial_y \partial_x u = 0\end{aligned}$$

Für den letzten Schritt haben wir jeweils verwendet, dass wir die Reihenfolge der partiellen Ableitungen mit Hilfe des Satzes von Schwarz vertauschen können, da $u, v \in \mathbf{C}^2(U)$ sind. *q. e. d.*

Voraussetzung. Sei nun $u : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $u(x, y) := \ln(\sqrt{x^2 + y^2})$

Behauptung. u ist harmonisch, aber es gibt keine holomorphe Funktion f auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ deren Realteil durch u gegeben ist.

Beweis. Den ersten Teil der Behauptung überprüfen wir direkt. Es sei $(x, y) \neq 0$, dann ist u stetig differenzierbar mit

$$\partial_x u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \partial_y u(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

Für $(x, y) \neq 0$ ist dies abermals stetig differenzierbar und wir finden

$$\begin{aligned}\Delta u(x, y) &= \partial_x \frac{x}{x^2 + y^2} + \partial_y \frac{y}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{2(x^2 + y^2) - 2(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = 0\end{aligned}$$

Offensichtlich ist $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ offen und (weg-)zusammenhängend. Für den zweiten Teil der Behauptung verwenden wir wieder die Cauchy-Riemann DGLs. Angenommen es gibt ein f wie in der Behauptung. Dann muss der Imaginärteil v von f

$$\partial_x u = \partial_y v, \quad \partial_y u = -\partial_x v$$

erfüllen. Integrieren wir die erste Gleichung nach y mit der Substitution $u = y/x$ finden wir die bereits häufiger aufgetretene Stammfunktion

$$v(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + c(x)$$

Man überprüfe leicht, dass dies auch die zweite Gleichung erfüllt, falls $c(x)$ konstant ist. Da f nach Annahme insbesondere stetig ist, muss auch v stetig auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ sein, allerdings hat v bei $x = 0$ eine Unstetigkeit, womit f nicht holomorph sein kann. *q. e. d.*

Als nächstes untersuchen wir zwei weitere Funktion darauf ob sie holomorph sind.

- (i) Sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(x + iy) = e^x \cos(y) + ie^x \sin(y)$ ($= e^z$). Offensichtlich ist f reell differenzierbar. Wir betrachten also abermals die Cauchy-Riemann DGls. Es gilt

$$\partial_x u(x, y) = e^x \cos(y) = \partial_y v(x, y)$$

und

$$\partial_y u(x, y) = -e^x \sin(y) = -\partial_x v(x, y)$$

Damit ist f überall auf \mathbb{C} komplex differenzierbar und damit holomorph (sogar ganz).

- (ii) Sei $g : \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) = 0\} \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$g(x + iy) = \ln\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) + i \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad (= \log(z) \text{ für } \operatorname{Re}(z) > 0)$$

Der Definitionsbereich von g ist das Komplement der imaginären Achse. Da diese abgeschlossen ist ist der Definitionsbereich offen. Wir erinnern uns, dass Real- und Imaginärteil von g mit u und v aus der vorherigen Teilaufgabe (b)) übereinstimmen, wo wir bereits gezeigt haben, dass diese die Cauchy-Riemann DGls erfüllen. Da g insbesondere für $x \neq 0$, was auf dem gegebenen Definitionsbereich erfüllt ist, reell differenzierbar ist, ist g auf den Halbebenen $\{z \in \mathbb{C} \mid \pm \operatorname{Re}(z) > 0\}$ holomorph.

Zum Schluss wollen wir alle ganzen (auf ganz \mathbb{C} holomorphen) Funktionen finden, deren Realteil durch $u(x, y) = e^x \sin(y)$ gegeben sind und $f(0) = 0$ erfüllen. Dazu integrieren wir die Cauchy-Riemann DGls

$$\partial_x u = \partial_y v, \quad \partial_y u = -\partial_x v$$

Aus der ersten Gleichung erhalten wir $v(x, y) = -e^x \cos(y) + c(x)$, aus der zweiten ergibt sich dann

$$\partial_x v(x, y) = -e^x \cos(y) + c'(x) \stackrel{!}{=} -e^x \cos(y)$$

womit $c(x) \equiv c \in \mathbb{C}$ konstant sein muss. Alle Lösungen müssen diese Form haben. Aus der 'Anfangsbedingung' $f(0) = 0$ ergibt sich schließlich

$$f(0) = -i(1 + C) \stackrel{!}{=} 0 \implies C = 1$$

und damit

$$f(x + iy) = e^x \sin(y) + i(1 - e^x \cos(y)) \quad (= i(1 - e^z))$$

Aufgabe 4. (Potenzreihen sind analytisch)

Zum Schluss wollen wir ein Ergebnis von reellen Potenzreihen für die komplexen Zahlen nachvollziehen. Wir werden zeigen, dass komplexe Potenzreihen, wo sie konvergieren, beliebig oft komplex differenzierbar sind. Im Seminar werden wir dann besprechen, dass sie sogar analytisch sind.

Wir werden dafür Induktion verwenden. Der Induktionsanfang ist die folgende Aussage:

Voraussetzung. Es sei $(a_n) \subset \mathbb{C}$ und $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe, die auf $B_\rho(0)$, $\rho > 0$, konvergiert. Es sei dazu

$$g(z) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n n z^{n-1}$$

eine weitere Potenzreihe.

Behauptung. g konvergiert ebenfalls auf $B_\rho(0)$ und es gilt $f' = g$ auf $B_\rho(0)$.

Beweis. Für den Konvergenzradius verwenden wir eine Formel die wir im zweiten Semester kennengelernt haben. Es gilt

$$\rho = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Bezeichne mit $R \geq 0$ den Konvergenzradius von g , dann gilt analog

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n|a_n|}} = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \sqrt[n]{n}}$$

Wir erinnern uns, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ ist, womit $R = \rho > 0$ folgt. Für den zweiten Teil der Aussage folgen wir dem Hinweis der Aufgabenstellung. Es sei

$$q_N(z) := \sum_{k=0}^{N-1} z^{N-k-1} \zeta^k$$

für ein $\zeta \in B_\rho(0)$. Dies können wir als Teleskopsumme schreiben (siehe geometrische Reihe) und erhalten für $z \neq 0$

$$q_N(z)(1 - \zeta/z) = z^{N-1}(1 - \zeta/z) \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{\zeta}{z}\right)^k = z^{N-1}(1 - \frac{\zeta^N}{z^N})$$

und damit

$$q_N(z)(z - \zeta) = z^N - \zeta^N$$

Für $z = 0$ folgt dies direkt durch einsetzen. Wir verwenden dies um die Ableitung von f an der Stelle $\zeta \in B_\rho(0)$ (beliebig) zu berechnen. Es gilt für $z \in B_\rho(0)$

$$f(z) - f(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z^n - \zeta^n) = (z - \zeta) \sum_{n=1}^{\infty} a_n q_n(z)$$

Wir setzen nun $h(z) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n q_n(z)$. Wir wollen h weiter untersuchen. Es gilt

$$h(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \zeta^{n-1} = g(\zeta)$$

Des Weiteren ist für $0 \leq |\zeta| < r < R$ auf $B_r(0)$

$$|h(z)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n q_n(z) \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n q_n(z)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n r^{n-1}$$

da $|q_n(z)| \leq n r^{n-1}$ gilt, womit h auf $B_r(0)$ konvergent ist. Auf dieser Kreisscheibe ist h daher insbesondere stetig und es folgt

$$f'(\zeta) = \lim_{z \rightarrow \zeta} \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} = \lim_{z \rightarrow \zeta} h(z) = h(\zeta) = g(\zeta)$$

Da $\zeta \in B_\rho(0)$ beliebig war, gilt damit auf ganz $B_\rho(0)$ $f' = g$. *q.e.d.*

Wir haben also gezeigt, dass Potenzreihen, dort wo sie konvergieren, $k = 1$ -mal komplex differenzierbar sind. Wir verallgemeinern dieses Ergebnis durch den Induktionsschritt:

Voraussetzung. Es sei die Potenzreihe f von oben $k \in \mathbb{N}$ mal komplex differenzierbar mit

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n z^{n-k}$$

wieder eine Potenzreihe, welche auf $B_\rho(0)$ konvergiert. Sei außerdem

$$g_k(z) = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{n!}{(n-k-1)!} a_n z^{n-k-1}$$

eine weitere Potenzreihe.

Behauptung. Die Potenzreihe g_k konvergiert ebenfalls auf $B_\rho(0)$ und es gilt

$$\left(f^{(k)} \right)'(z) = f^{(k+1)}(z) = g_k(z)$$

Beweis. Wir verwenden das vorherige Ergebnis. Verschieben wir den Index der Reihen finden wir

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k} z^n$$

und

$$g_k(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+k)!}{(n-1)!} a_{n+k} z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!} n \cdot a_{n+k} z^{n-1}$$

Wir können also die zuvor gezeigte Aussage anwenden und finden, dass g_k ebenfalls auf $B_\rho(0)$ konvergiert und dort $f^{(k+1)} = g_k$ gilt. *q.e.d.*

Durch Induktion folgt, dass f auf $B_\rho(0)$ beliebig komplex differenzierbar ist mit

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n z^{n-k}, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Serie 10: Komplexer Logarithmus, Cauchy-Integral und der Identitätssatz

Bemerkung zur komplexen Polardarstellung

Wir haben in der Vergangenheit bereits häufiger die s.g. Eulersche Formel

$$e^{iy} = \cos(y) + i \sin(y) \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

verwendet. Für eine komplexe Zahl $z = x + iy \in \mathbb{C}$ lässt sich daraus der allgemeine Zusammenhang

$$e^z = e^x (\cos(y) + i \sin(y))$$

schließen. Erstere Identität wird auch verwendet um die Polardarstellung vom \mathbb{R}^2 auf \mathbb{C} zu übertragen. Wir wissen bereits, dass wir jeden Vektor im \mathbb{R}^2 durch einen Winkel φ und dessen Länge r beschreiben können. In der Regel wählt man dafür die Darstellung

$$\mathbb{R}^2 \ni v(r, \varphi) = r(\cos(\varphi), \sin(\varphi))$$

Den Winkel messen wir dabei vom positiven Teil der x -Achse aus gegen den Uhrzeigersinn. Entsprechend finden wir für \mathbb{C}

$$\mathbb{C} \ni z(r, \varphi) = r e^{i\varphi}$$

Aus den üblichen Gründen lässt sich damit nicht ganz \mathbb{C} problemlos parametrisieren, da wir insbesondere für φ einen offenen Definitionsbereich wollen, welcher sich unter Beachtung der (2π) -Periodizität nicht selber schneidet. In der Regel wählt man daher $\varphi \in (-\pi, \pi)$, wodurch die negative Hälfte der reellen Achse nicht erreicht werden kann.

Aufgabe 1. (Komplexer Logarithmus und komplexe Potenz)

Den komplexen Logarithmus zu konstruieren ist daher leider nicht so direkt, wie für die Exponentialfunktion. In der Vorlesung wurde die folgende Definition (des s.g. Hauptzweiges) eingeführt:

Es Sei $f : \mathbb{C}_- \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) := 1/z$. Der Definitionsbereich

$$\mathbb{C}_- := \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) = 0, \operatorname{Re}(z) \leq 0\}$$

ist gerade der Bereich von \mathbb{C} , der durch die zuvor besprochene Polardarstellung parametrisiert werden kann. Wir bezeichnen den Polarwinkel von $z \in \mathbb{C}_-$ mit $\arg(z)$ und erinnern uns, dass $r = |z| > 0$ gilt. Wir definieren dann den komplexen Logarithmus, ähnlich zum reellen Fall, als Stammfunktion von f wie folgt

$$\log(z) = \int_{\gamma: 1 \rightarrow z} f(z') dz' = \int_{\gamma: 1 \rightarrow z} \frac{1}{z'} dz'$$

wobei $\gamma : 1 \rightarrow z$ die Integration entlang einer beliebigen Kurve in \mathbb{C}_- von 1 zu z meint.

Behauptung. Aus dieser Definition ergibt sich $\log(1) = 0$ und

$$\log(z) = \ln(|z|) + i \arg(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}_-$$

Beweis. Wir verwenden dafür die Polardarstellung $z = re^{i\varphi} = |z|e^{i\arg(z)}$. Es sei $z \in \mathbb{C}_-$ fest. Da \mathbb{C}_- offen und einfach zusammenhängend ist, folgt aus Korollar 10.10. aus der Vorlesung, dass wir für die Integration eine beliebige (stückweise) \mathbf{C}^1 Kurve von $1 = 1 + i0 = e^0$ zu $z = x + iy = re^{i\varphi}$ verwenden können. Des Weiteren folgt aus der Definition sofort $\log(1) = 0$, da in diesem Fall $\gamma : 1 \rightarrow 1$ eine geschlossene Kurve beschreibt.

Wir unterteilen die Integration in zwei Stücke $\gamma_1 : 1 \rightarrow r$ und $\gamma_2 : r \rightarrow z$, wobei die Integration entlang ersterer einem reellen Integral entspricht. Wir erhalten daher

$$\int_{\gamma_1:1 \rightarrow r} \frac{1}{z} dz = \int_1^r \frac{1}{x} dx = \ln(r) = \ln(|z|)$$

Für den zweiten Teil integrieren wir entlang einer Kurve mit konstantem Abstand zur 0, d.h. $|z'| = \text{konst.} = r$ und erhalten

$$\int_{\gamma_2:r \rightarrow z} f(z') dz' = \int_0^\varphi f(\gamma_2(\varphi')) \gamma_2'(\varphi') d\varphi' = \int_0^\varphi \frac{1}{r} e^{-i\varphi'} \cdot ire^{i\varphi'} d\varphi' = i\varphi$$

Insgesamt ergibt sich

$$\log(z) = \int_{\gamma_1} f(z') dz' + \int_{\gamma_2} f(z') dz' = \ln(|z|) + i \arg(z)$$

da $\varphi = \arg(z)$.

q.e.d.

Wir verwenden dieses Ergebnis um die komplexe Potenz für eine beliebige Basis zu definieren. Analog zum reellen Fall setzen wir für $z \in \mathbb{C}_-$ und $\alpha \in \mathbb{C}$

$$z^\alpha := e^{\alpha \log(z)}$$

Allerdings lassen sich viele Rechenregeln aus dem reellen nur bedingt übertragen, wie wir jetzt sehen werden.

(i) Im reellen gilt für $x, y > 0$

$$\ln(x) + \ln(y) = \ln(xy)$$

Im komplexen haben wir für $z = re^{i\varphi}, w = se^{i\phi} \in \mathbb{C}_-$

$$\log(z) + \log(w) = \ln(r) + \ln(s) + i(\varphi + \phi) = \ln(rs) + i(\varphi + \phi)$$

und, **nur falls** $\arg(zw) \in (-\pi, \pi)$

$$\log(zw) = \log\left(rse^{i(\varphi+\phi)}\right) = \ln(rs) + i(\varphi + \phi)$$

Die Gleichheit gilt also nur dann, wenn $\arg(z)+\arg(w) \in (-\pi, \pi)$ ist. Ein Gegenbeispiel ist daher $z = e^{i\frac{3}{4}\pi}$ und $w = e^{i\frac{\pi}{2}}$. In diesem Fall ist

$$\log(z) + \log(w) = i\frac{5}{4}\pi \neq \log(zw) = \log\left(e^{i\frac{5}{4}\pi}\right) = \log\left(e^{-i\frac{3}{4}\pi}\right) = -i\frac{3}{4}\pi$$

(ii) Im reellen gilt $\forall a, b \in \mathbb{R}$ und $c > 0$

$$c^a c^b = c^{a+b}$$

Für $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{C}_-$ finden wir stets

$$z^\alpha z^\beta = e^{\alpha \log(z)} e^{\beta \log(z)} = e^{(\alpha+\beta) \log(z)} = z^{\alpha+\beta}$$

(iii) Im reellen gilt $\forall a, b \in \mathbb{R}$ und $c > 0$

$$(c^a)^b = c^{ab}$$

Für $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{C}_-$ gilt falls $z^\alpha \in \mathbb{C}_-$

$$(z^\alpha)^\beta = e^{\beta \log(z^\alpha)} = e^{\beta \log(e^{\alpha \log(z)})}$$

Fordern wir also, dass $\arg(z^\alpha) \in (-\pi, \pi) \Leftrightarrow \text{Im}(\alpha \log(z)) \in (-\pi, \pi)$ ergibt sich daraus

$$(z^\alpha)^\beta = e^{\alpha\beta \log(z)} = z^{\alpha\beta}$$

Ein Gegenbeispiel ergibt sich daher falls $\alpha = 3$ und $z = e^{i\frac{\pi}{2}}$ für z.B. $\beta = 1/2$. Dann haben wir

$$(z^\alpha)^\beta = \left(e^{i\frac{3}{2}\pi}\right)^{1/2} = (-i)^{1/2} = e^{\frac{1}{2} \log\left(e^{-i\frac{\pi}{2}}\right)} = e^{-i\frac{1}{4}\pi} \neq z^{\alpha\beta} = e^{i\frac{3}{4}\pi}$$

Aufgabe 2. (Gauß-Integral)

In der zweiten Aufgabe wollen wir unsere bisherigen Hilfsmittel benutzen um das Gauß-Integral auf das Komplexe zu verallgemeinern.

Voraussetzung. Sei $\alpha = a_1 + ia_2, \beta = b_1 + ib_2 \in \mathbb{C}$ s.d. $\text{Re}(\alpha^2) = a_1^2 - a_2^2 > 0$ ist.

Behauptung.

$$I := \int_{\mathbb{R}} e^{-(\alpha x + \beta)^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}$$

Beweis. Wir wissen bereits, dass wir im reellen, also $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $\alpha^2 > 0$

$$\int_{\mathbb{R}} e^{\alpha x + \beta} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}$$

haben. Ein Beweis dafür basiert auf der Transformationsformel und wurde bereits vorgestellt. Wir nehmen daher ab jetzt $a_2 = \text{Im}(\alpha) \neq 0$ an (insbesondere ist dann $a_1 \neq 0$ wegen $\text{Re}(\alpha^2) = a_1^2 - a_2^2 > 0$). Wir gehen wie folgt vor: Wir können I als ein komplexes Wegintegral mit der Parametrisierung $z = \gamma(x) = \alpha x + \beta$ auffassen. Wir fixieren zunächst ein $R > 0$. Dafür finden wir

$$\int_{-R}^R e^{-(\alpha x + \beta)^2} dx = \frac{1}{\alpha} \int_{\gamma} e^{-z^2}$$

und definieren die geraden Kurven

$$\begin{aligned} \gamma_1 : -a_1 R &\rightarrow a_1 R; & \gamma_2 : a_1 R &\rightarrow \alpha R + \beta; \\ \gamma_3 : \alpha R + \beta &\rightarrow -\alpha R + \beta; & \gamma_4 : -\alpha R + \beta &\rightarrow -a_1 R \end{aligned}$$

Insgesamt handelt es sich hierbei also um eine geschlossene Kurve. Hinzu kommt, dass wir eine holomorphe Funktion integrieren wollen. Das Integral über alle vier Kurven muss also insgesamt 0 ergeben

$$\int_{\gamma_1} e^{-z^2} dz + \int_{\gamma_2} e^{-z^2} dz + \int_{\gamma_3} e^{-z^2} dz + \int_{\gamma_4} e^{-z^2} dz = 0$$

Für $R \rightarrow \infty$ finden wir bei der Integration über γ_1 das reelle Gauß-Integral wieder, während die γ_3 Integration, bis auf ein Minus wegen der Integrationsrichtung, das Integral ist, welches wir suchen. Falls wir also zeigen können, dass die Integration bzgl. $\gamma_{2/4}$ für $R \rightarrow \infty$ keine Rolle mehr spielen haben wir

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_1} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi} = \lim_{R \rightarrow \infty} - \int_{\gamma_3} e^{-z^2} dz = \alpha I$$

was wir zeigen wollen. D.h. wir müssen nur noch zeigen, dass

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_{2/4}} e^{-z^2} dz = 0$$

Wir finden für endliche $R > 0$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_{2/4}} e^{-z^2} dz \right| &= \left| \int_0^1 (ia_2 R + \beta) e^{-(\pm(a_1 + isa_2)R + s\beta)^2} ds \right| \\ &\leq \int_0^1 (|a_2|R + |\beta|) \left| e^{-(\pm(a_1 + isa_2)R + s\beta)^2} \right| ds \end{aligned}$$

Für die Exponenten haben wir dabei

$$-(\pm(a_1 + isa_2)R + s\beta)^2 = (a_1^2 - s^2 a_2^2)R^2 + i2a_1 a_2 R^2 \pm 2(a_1 + isa_2)\beta R + s^2 \beta^2$$

Da die Parametrisierung derart gewählt ist, dass stets $s \in [0, 1]$ gilt, folgt

$$a_1^2 - s^2 a_2^2 \geq a_1^2 - a_2^2 = \operatorname{Re}(\alpha^2) > 0$$

Durch den Betrag um die Exponentialfunktion liefern die imaginären Anteile im Exponenten keinen Anteil womit sich insgesamt

$$(|a_2|R + |\beta|) \left| e^{-(\pm(a_1 + isa_2)R + s\beta)^2} \right| = (|a_2|R + |\beta|) \left| e^{-(a_1^2 - s^2 a_2^2)R^2 \pm 2a_1\beta R + s^2 \beta^2} \right|$$

ergibt. Das Grenzwertverhalten dieses Ausdrucks wird durch $e^{-(a_1^2 - s^2 a_2^2)R^2}$ bestimmt und da wir gezeigt haben, dass der Koeffizient von R^2 stets negativ ist, konvergiert dieser Ausdruck überall punktweise gegen 0 für $R \rightarrow \infty$. Mithilfe des Satzes von Lebesgue folgt daraus, dass $\int_{\gamma_{2/4}} e^{-z^2} dz \rightarrow 0$ für $R \rightarrow \infty$, womit wir das gewünschte Ergebnis erhalten. *q. e. d.*

Aufgabe 3. (Cauchy-Integralformel)

Wir wollen unsere bisher bekannten Tricks gleich weiter verwenden um das Folgende Integral so einfach wie möglich zu berechnen. Wir betrachten

$$\int_{\partial B_r(2)} \frac{e^{z^2}}{z^2 - 6z} dz$$

für $r = 1, 3, 5$.

Wir wissen, dass solche Integrale entlang von geschlossenen (null-homotopen) Kurven verschwinden, wenn der Integrand auf dem umschlossenen Gebiet holomorph ist. Bei uns besitzt die zu integrierende Funktion zwei Pole bei $z_1 = 0$ und $z_2 = 6$ (Nullstellen des Nenners). Mittels Partialbruchzerlegung finden wir daher

$$\frac{1}{z^2 - 6z} = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{z - 6} - \frac{1}{z} \right)$$

Für $r = 1$ liegen die Pole nicht in $B_1(2)$. Daher haben wir ohne rechnen zu müssen

$$\int_{\partial B_1(2)} \frac{e^{z^2}}{z^2 - 6z} dz = 0$$

Für $r = 3$ liegt $0 \in B_3(2)$. Betrachten wir die Partialbruchzerlegung von oben liefert der erste Teil wegen der selben Begründung wie bei $r = 1$ keinen Beitrag. Für den zweiten Teil verwenden wir die Cauchy-Integralformel

$$\int_{\partial B_3(2)} \frac{e^{z^2}}{z^2 - 6z} dz = - \int_{\partial B_3(2)} \frac{1}{6} \frac{e^{z^2}}{z} dz = -2\pi i \frac{e^0}{6} = -i \frac{\pi}{3}$$

Für $r = 5$ liegen beide Pole im Gebiet. Unter der Verwendung der Partialbruchzerlegung sind die Polstellen jedoch jeweils nur Polstellen von einem

der Terme. Daher bekommen wir

$$\int_{\partial B_5(2)} \frac{e^{z^2}}{z^2 - 6z} dz = \frac{1}{6} \int_{\partial B_5(2)} e^{z^2} \left(\frac{1}{z - 6} - \frac{1}{z} \right) dz = \frac{2\pi i}{6} (e^{36} - e^0) = \frac{\pi i}{3} (e^{36} - 1)$$

Zum Abschluss der Aufgabe wollen wir Korollar 10.12. aus der Vorlesung beweisen.

Voraussetzung. Es sei $U \subset \mathbb{C}$ und $a \in U$ und $r > 0$ s.d. $\overline{B_r(a)} \subset U$. Dazu sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph.

Behauptung. *Es gilt*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it}) dt$$

Beweis. Mithilfe der Cauchy-Integralformel sehen wir sofort

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(a)} \frac{f(z)}{z - a} dz$$

Wobei wir $\partial B_r(a)$ gegen den Uhrzeigersinn durch $z = a + re^{it}$ für $t \in [0, 2\pi]$ parametrisieren. Es ergibt sich daher

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} rie^{it} \frac{f(a + re^{it})}{a + re^{it} - a} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it}) dt$$

q. e. d.

Aufgabe 4. (Anwendungen des Identitätssatzes)

In der letzten Aufgabe wollen wir uns eine Anwendung des Identitätssatzes angucken. Die Frage dazu lautet, wie viele im Ursprung holomorphe (d.h. holomorph auf einer offenen, möglicherweise sehr kleinen, Umgebung $\neq \emptyset$ um 0) Funktionen f gibt es, s.d. jeweils eine der folgenden Eigenschaften $\forall n \in \mathbb{N}$ erfüllt ist

(i) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2 - 1}$

(ii) $f\left(\frac{1}{n}\right) = (-1)^n \frac{1}{n}$

(iii) $f(\pi n) = 0$

(iv) $f^{(n)}(0) = (n!)^2$

(i) Man sieht leicht, dass die Funktion $g : B_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(0) \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$g(z) = \frac{1}{\frac{1}{z^2} - 1} = \frac{z^2}{1 - 2z^2}$$

die gewünschte Eigenschaft erfüllt und wegen $|z| < \frac{1}{\sqrt{2}}$ dort auch holomorph ist. Aus dem Identitätssatz folgt, dass zwei holomorphe Funktionen (auf einem zusammenhängenden Gebiet) identisch sind, sobald sie auf einer Menge mit Häufungspunkt gleich sind. Da $\left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ den Häufungspunkt 0 besitzt und wir nur an Funktionen interessiert sind, die auf dieser Menge identisch sind, ist g automatisch die eindeutige Lösung. Es gibt also nur eine.

(ii) Für $n = 2m$, $m \in \mathbb{N}$ (also n gerade) findet man

$$f\left(\frac{1}{2m}\right) = \frac{1}{2m}$$

Wir haben also auf einer Menge mit Häufungspunkt 0, dass $f(z) = z$ ist, wodurch dies wieder auf einer ganzen Umgebung um 0 gelten muss. Allerdings ist dies ein Widerspruch zu

$$f\left(\frac{1}{2m+1}\right) = -\frac{1}{2m+1} \neq \frac{1}{2m+1}$$

also kann f nicht holomorph sein. Die Antwort lautet daher: keine.

(iii) Wir sehen sofort, dass für jedes $c \in \mathbb{C}$ $f(z) = c \sin(z)$ diese Eigenschaft erfüllt. Es gibt daher unendlich viele.

(iv) Da f insbesondere in 0 analytisch sein muss finden wir die Potenzreihendarstellung auf einer offenen Umgebung um 0

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$$

Allerdings sieht man wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$, dass diese Reihe nur in $z = 0$ konvergiert, da der Konvergenzradius $r = 0$ ist. Dies ist aber ein Widerspruch dazu, dass f analytisch ist, wodurch die Antwort 'keine' ist.

Zum Abschluss wollen wir sehen, dass es für den Identitätssatz wichtig ist, dass die betrachtete Menge ein Gebiet, also insbesondere (einfach) zusammenhängend, ist.

Voraussetzung. Sei $f(z) = \log(z)$ der Hauptzweig des komplexen Logarithmus (insbesondere $z \in \mathbb{C}_-$) und $g(z) = \log(-z) + i\pi$ (d.h. für $-z \in \mathbb{C}_-$). Ferner definiere

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$$

also die obere Halbebene von \mathbb{C} .

Behauptung. Für $z \in \mathbb{H}$ gilt $f(z) = g(z)$, aber auf $\mathbb{C}_- \cap (-\mathbb{C}_-)$ sind f und g verschieden.

Beweis. Wir benutzen das Ergebnis aus Aufgabe 1. Für $z = re^{i\phi} \in \mathbb{H}$ gilt $\phi \in (0, \pi)$ und folglich

$$f(z) = \log(re^{i\phi}) = \ln(r) + i\phi$$

$$g(z) = \log(-re^{i\phi}) + i\pi = \log(re^{i(\phi-\pi)}) + i\pi = \ln(r) + i\phi - i\pi + i\pi = f(z)$$

Für $-i = e^{-i\pi/2} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{H}$ gilt $f(-i) = -i\frac{\pi}{2}$ und

$$g(-i) = \log(i) + i\pi = i\frac{\pi}{2} + i\pi = i\frac{3\pi}{2} \neq -i\frac{\pi}{2}$$

q.e.d.

Natürlich handelt es sich hier nicht um einen Widerspruch zum Identitätssatz, da \mathbb{H} und $-\mathbb{H}$ disjunkt sind und damit $\mathbb{H} \cup (-\mathbb{H}) = \mathbb{C}_- \cap (-\mathbb{C}_-)$ nicht (einfach) zusammenhängend sein kann. Dementsprechend können wir mit Hilfe des Identitätssatz keine Aussagen von \mathbb{H} aus über $-\mathbb{H}$ treffen.

Aufgabe 5 (Zusatz) wird im Seminar besprochen.

Serie 11: Analytische Fortsetzungen, Pole und Laurent-Reihen

Aufgabe 1. (Analytische Fortsetzung)

Als erstes beschäftigen wir uns mit analytischen Fortsetzungen. Es stellt sich heraus, dass sich holomorphe Funktionen, die wir ursprünglich nur auf einem bestimmten, möglicherweise sehr kleinen, Gebiet definieren können auf größere Gebiete erweitern lassen. In irgendeiner Weise ist das natürlich immer möglich, aber das besondere hier ist, dass die Fortsetzung analytisch sein soll. Insbesondere können wir in vielen Fällen mit Hilfe des Identitätssatzes die Eindeutigkeit der Fortsetzungen, falls diese existiert, garantieren.

Wir betrachten dazu die Funktion

$$f : B_1(0) \rightarrow \mathbb{C}; \quad z \mapsto f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} nz^n$$

Man überzeuge sich leicht, dass diese Reihe Konvergenzradius $r = 1$ hat und damit überall auf ihrem Definitionsbereich konvergiert, also insbesondere analytisch ist. Wir wollen versuchen eine Funktion zu finden, die auf $B_1(0)$ mit f übereinstimmt, aber auf einem größtmöglichen Gebiet analytisch bleibt. Innerhalb des Konvergenzradiuses gilt

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} nz^n = 0 + \sum_{n=1}^{\infty} nz^n = z \sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1} = z \frac{d}{dz} \sum_{n=0}^{\infty} z^n = z \frac{d}{dz} \frac{1}{1-z} \\ &= \frac{z}{(1-z)^2} =: \tilde{f}(z) \end{aligned}$$

Allerdings ist \tilde{f} auf ganz $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ holomorph, also auch analytisch. Diese Fortsetzung ist demnach eindeutig und auch maximal, da bei $z = 1$ ein Pol liegt.

Als nächstes wollen wir analytische Fortsetzungen entlang von Kurven betrachten. Dazu sei

- (i) $\gamma_1 : [0, 2] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto \gamma_1(t) = t$
- (ii) $\gamma_2 : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto \gamma_2(t) = 1 - e^{-it}$

Erstere beschreibt einen geraden Weg entlang der reellen Achse. Zweitere eine (halbe) Kreisbahn um 1 im Uhrzeigersinn. Da bei beiden Kurven die Anfangspunkte in $B_1(0)$ liegen lässt sich die Fortsetzung in beiden Fällen anfangen.

- (i) Wir haben allerdings festgestellt, dass f sich nicht analytisch in $z = 1$ fortsetzen lässt. γ_1 verläuft aber gerade durch diesen Pol. Daher lässt sich f entlang von γ_1 nur für $t < 1$ analytisch fortsetzen.

- (ii) γ_2 hingegen umkreist den Pol von f mit einem konstanten Abstand von 1. Da wir bereits wissen, dass f auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ analytisch fortgesetzt werden kann können wir für die Fortsetzung entlang von γ_2 in jeden Punkt die Potenzreihenentwicklung (mit Konvergenzradius $r < 1$) von \tilde{f} annehmen, welche die Verträglichkeit automatisch erfüllt. Der Endwert ist entsprechend einfach $\tilde{f}(\gamma_2(\pi)) = \tilde{f}(2) = 2$.

Aufgabe 2. (Nullstellen und Pole)

Als nächstes wollen wir uns mit Nullstellen bzw. Polen und deren Vielfachheiten bzw. Ordnung befassen. Wir sagen $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, $U \subset \mathbb{C}$ offen, hat eine $n \in \mathbb{N}$ -fache Nullstelle in $z_0 \in U$, falls

$$f^{(k)}(z_0) = 0 \forall k \leq n - 1 \text{ und } f^{(n)}(z_0) \neq 0$$

Ein Pol $m \geq 1$ Ordnung ist hingegen eine isolierte Singularität $z_0 \in \mathbb{C} \setminus U$ (d.h. für ein $\epsilon > 0$ $B_\epsilon(z_0) \setminus \{z_0\} \subset U$) s.d. $(z - z_0)^m f(z)$ sich analytisch auf $U \cup z_0$ fortsetzen lässt (wir sagen eine hebbare Singularität besitzt) und wenn m gleichzeitig die kleinste natürliche Zahl ist, für die das erfüllbar ist.

Voraussetzung. Wir betrachten $U \subset \mathbb{C}$ offen und nicht-leer, f wie oben, mit einer $k \in \mathbb{N}_0$ -fachen Nullstelle bei $z_0 \in U$

Behauptung. Es existiert $\tilde{f} : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph s.d. $\tilde{f}(z_0) \neq 0$, aber

$$f(z) = (z - z_0)^k \tilde{f}(z) \forall z \in U$$

Beweis. Für Polynome haben wir diese Aussage in einem der vorhergehenden Semestern bereits bewiesen. Außerdem ist die Aussage für $k = 0$ trivial. Für $k > 0$ und $z \neq z_0$ definieren wir

$$\tilde{f}(z) := \frac{f(z)}{(z - z_0)^k}$$

Offensichtlich hat \tilde{f} in z_0 eine isolierte Singularität. Wir müssen zeigen, dass diese hebbbar ist und das $\tilde{f}(z_0) \neq 0$ ist. Da f in z_0 eine k -fache Nullstelle besitzt, müssen die ersten $k - 1$ Terme in der Potenzreihenentwicklung von f verschwinden, womit wir also für $(a_n) \subset \mathbb{C}$ und $B_\epsilon(z_0) \subset U$ für ein $\epsilon > 0$

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

mit $a_k \neq 0$ haben und damit

$$\tilde{f}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{(n+k)} (z - z_0)^n \quad \forall z \in B_\epsilon(z_0)$$

\tilde{f} besitzt also auf $B_\epsilon(z_0)$ eine analytische Fortsetzung und wir haben $\tilde{f}(z_0) = a_k \neq 0$. q. e. d.

Voraussetzung. Sei nun, zusätzlich zu den vorherigen Voraussetzungen, $g : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit einer $l \in \mathbb{N}_0$ -fachen Nullstelle in z_0 .

Behauptung. Für $k \geq l$ besitzt (die analytische Fortsetzung von) $h := \frac{f}{g}$ eine $(k-l)$ -fache Nullstelle in z_0 .

Für $k < l$ besitzt h einen Pol $(l-k)$ -ter Ordnung in z_0 .

Beweis. Wir betrachten zuerst $k \geq l$. Aus dem vorhergehenden Beweis finden wir $\tilde{f}, \tilde{g} : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph s.d. $\tilde{f}(z_0), \tilde{g}(z_0) \neq 0$ und damit (wegen $k-l \geq 0$) die analytische Fortsetzung von h auf ganz U

$$h(z) = \frac{f(z)}{g(z)} = (z - z_0)^{k-l} \frac{\tilde{f}(z)}{\tilde{g}(z)}$$

Um z_0 finden wir daher die Potenzreihenentwicklung $((a_n) \subset \mathbb{C})$

$$h(z) = (z - z_0)^{k-l} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n+(k-l)} = \sum_{n=k-l}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$$

für $(b_n) \subset \mathbb{C} (= (a_{n-(k-l)})_{n \in \mathbb{N}})$ womit h in z_0 eine $k-l$ -fache Nullstelle haben muss (da die ersten $k-l-1$ Terme der Potenzreihe verschwinden). Insbesondere ist für $k=l$ z_0 keine Nullstelle (und auch kein Pol) von h .

Für $k < l$ hat die obige Darstellung von h wiederum eine isolierte Singularität in z_0 . Wir finden für $m \in \mathbb{Z}$

$$(z - z_0)^m h(z) = (z - z_0)^{-(l-k)+m} \frac{\tilde{f}(z)}{\tilde{g}(z)}$$

Offensichtlich lässt dies sich genau dann in z_0 analytisch fortsetzen, wenn $m \geq l-k$ ist, womit es sich bei z_0 um einen Pol $(l-k)$ -ter Ordnung von h handelt. *q.e.d.*

Zum Schluss wollen wir uns noch kurz angucken, wie man Singularitäten charakterisiert. Wir haben bereits gesehen, dass eine isolierte Singularität hebbar oder ein Pol einer bestimmten Ordnung sein kann. Es kann aber auch der Fall eintreten, dass eine isolierte Singularität weder hebbar, noch ein Pol ist. In diesem Fall nennen wir sie wesentliche Singularität. Wir betrachten dazu die Funktionen

$$f(z) = \frac{e^z}{1 + e^{z/2}}; \quad g(z) = \frac{z^3 + 1}{z^2(z + 1)}$$

Da auch die komplexe Exponentialfunktion keine Nullstellen hat, reicht es für f aus den Nenner zu betrachten. Wir haben isolierte Singularitäten

$\Leftrightarrow e^{z/2} = -1 \Leftrightarrow z = 2\pi i(2k+1), k \in \mathbb{Z}$. Betrachten wir dazu die Reihenentwicklung des Nenners in $z_k := 2\pi i(2k+1), k \in \mathbb{Z}$ finden wir $\forall k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} 1 + e^{z/2} &= 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left. \frac{d^n}{dz^n} e^{z/2} \right|_{z=z_k}}{n!} (z - z_k)^n = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\frac{1}{2^n} (-1)}{n!} (z - z_k)^n \\ &= 1 + (-1) + \left(-\frac{1}{2}\right) (z - z_0) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2^n} (-1)}{n!} (z - z_k)^n \end{aligned}$$

Es handelt sich also stets um eine einfache Nullstelle des Nenners und nach dem vorhergehenden Satz hat f demnach in $z_k, \forall k \in \mathbb{Z}$ Pole erster Ordnung.

Betrachten wir g finden wir für den Zähler die Nullstellen

$$z^3 = -1 \Leftrightarrow z \in \left\{ e^{i(\pi + \frac{2}{3}\pi k)} \right\}_{k=-1,0,1}$$

und für den Nenner die Nullstellen $z = 0$ und $z = -1$. D.h. -1 ist (einfache) Nullstelle sowohl vom Zähler, als auch vom Nenner von g , womit dort eine hebbare Singularität vorliegt. Bei $z = 0$ handelt es sich um eine zweifache Nullstelle des Nenners und da der Zähler dort keine Nullstelle hat, ist $z = 0$ ein Pol zweiter Ordnung von g .

Aufgabe 3. (Laurent-Reihen)

In der dritten Aufgabe wollen wir die Laurentreihenentwicklung (mit Konvergenzgebiet) von drei Funktionen bestimmen. Bei Laurentreihen handelt es sich um eine Verallgemeinerung von Potenzreihen, bei der wir auch negative Potenzen der Entwicklungsvariable zulassen. Eine Laurentreihe hat daher die Form

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z - z_0)^n := \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z - z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

Wir nennen den ersten Term (mit negativen Potenzen) Haupt- und den zweiten Term Nebenteil der Laurentreihe. In der Vorlesung wurde bereits diskutiert, dass solche Reihen in der Regel nur auf einem Gebiet der Form $(0 < r < R)$

$$K_{r,R}(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R\} = B_R(z_0) \setminus K_r(z_0)$$

konvergieren. In der Vorlesung wurde dazu gezeigt, dass sich die Koeffizienten $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ der Laurentreihenentwicklung einer holomorphen Funktion f durch

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

ergeben. Im Allgemeinen ist diese Methode um die Reihenentwicklung zu bestimmen aber sehr umständlich, da diese Integrale sehr kompliziert werden können. Wir wollen daher stets versuchen die Laurentreihenentwicklung durch Einsatz bereits bekannter Reihendarstellung zu bestimmen.

(i) Wir betrachten zuerst

$$f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-1)^3}$$

um den Entwicklungspunkt $z_0 = 1$. Für den Zähler finden wir

$$e^{2z} = e^{2z-2+2} = e^{2(z-1)}e^2 = e^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} (z-1)^n$$

Teilen wir nun durch $(z-1)^3$ um f zu erhalten finden wir

$$\begin{aligned} f(z) &= e^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} (z-1)^{n-3} = \sum_{n=-3}^{\infty} \frac{e^2 2^{n+3}}{(n+3)!} (z-1)^n \\ &= \sum_{n=-3}^{-1} \frac{e^2 2^{n+3}}{(n+3)!} (z-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^2 2^{n+3}}{(n+3)!} (z-1)^n \end{aligned}$$

Der Hauptteil der Reihe konvergiert offensichtlich auf $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Der Nebenteil sogar auf ganz \mathbb{C} . Das Konvergenzgebiet ist also insgesamt $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.

(ii) Für das zweite Beispiel betrachten wir

$$f(z) = \frac{z - \sin(z)}{z^3}$$

mit dem Entwicklungspunkt $z_0 = 0$. Für den Zähler finden wir sofort

$$z - \sin(z) = z - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = z - z + \frac{1}{3}z^3 - \dots = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$$

Teilen wir durch z^3 finden wir die Reihendarstellung von f zu

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z - \sin(z)}{z^3} = - \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}}{z^3} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n-2} \\ &= - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)!} z^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+3)!} z^{2n} \end{aligned}$$

Diese Laurentreihe besitzt demnach keinen Hauptteil und ist auf ganz \mathbb{C} konvergent.

(iii) Zum Schluss betrachten wir die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

bei den Punkten $z_0 = 0, z_1 = 1$ und $z_2 = 2$. Wir zerlegen zunächst f in Partialbrüche und finden

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z}$$

Wie schon im ersten Beispiel werden wir versuchen bereits bekannte Reihendarstellungen zu verwenden. Wir haben für $|\zeta| < 1, \zeta \in \mathbb{C}$

$$\frac{1}{1-\zeta} = \sum_{n=0}^{\infty} \zeta^n$$

Ähnlich finden wir für $a \neq 0, \zeta \in \mathbb{C}$ s.d. $|\zeta/a| < 1 \Leftrightarrow |\zeta| < |a|$

$$\frac{1}{a-\zeta} = \frac{1}{a} \frac{1}{1-\zeta/a} = \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta}{a}\right)^n$$

Für den Entwicklungspunkt $z_0 = 0$ finden wir so sofort

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}\right) z^n$$

auf dem Konvergenzgebiet $B_1(0) \cap B_2(0) = B_1(0)$.

Für $z_1 = 1$ schreiben wir

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{z-1} - \frac{1}{2-z} = -\frac{1}{z-1} - \frac{1}{1-(z-1)} \\ &= -(z-1)^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} -(z-1)^n \end{aligned}$$

mit dem Konvergenzgebiet $B_1(1) \setminus \{1\}$.

Für $z_2 = 2$ finden wir

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z-2} + \frac{1}{1-z} = (z-2)^{-1} + \frac{1}{1-(-(z-2))} \\ &= (z-2)^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-(z-2))^n = (z-2)^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-2)^n \end{aligned}$$

mit dem Konvergenzgebiet $B_1(2) \setminus \{2\}$

Aufgabe 4. (Wiederholung: Integralsatz von Gauß)

Da dies in der Vergangenheit ein wenig zu kurz gekommen ist wollen wir, beginnend in dieser Serie, die Integralsätze (vor allem Gauß und Stokes) wiederholen. Für dieses Mal nehmen wir uns den Satz von Gauß vor.

Nach Satz 9.40 (im alten Skript von Konrad) gilt für eine **geschlossene** Fläche $M \subset \mathbb{R}^3$, die ein Gebiet $U \subset \mathbb{R}^3$ umschließt (d.h. $\partial U = M$) und ein stetig differenzierbares Vektorfeld $E : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\int_U \operatorname{div}(E) d\lambda^3 = \int_M \langle E | d\sigma \rangle$$

In der Physik schreibt man gerne dafür auch

$$\int_U \nabla \cdot \vec{E} dV = \int_{\partial U} \vec{E} d\vec{A}$$

mit dem symbolischen Nabla-'Operator' $\nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$, dem s.g. Volumenelement dV und dem gerichteten Oberflächenelement $d\vec{A}$. Diese Schreibweise ist aber oft nur symbolischer Natur.

Anschaulich kann man sich darunter vorstellen, dass die Gesamtheit der Quellen/Senken von E (beschrieben durch $\operatorname{div}(E)$) im Inneren des Gebiets dem Fluss durch die Berandung entspricht. Zusammen mit der s.g. Kontinuitätsgleichung wird dies in der Physik häufig eingesetzt um Erhaltungssätze zu formulieren (z.B. Energie, Ladung, Masse, Wahrscheinlichkeit etc.).

Wir betrachten dazu den Ellipsoid ($a, b, c > 0$)

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}$$

Wir haben dieses Objekt bereits betrachtet, als wir uns mit Diffeomorphismen und der Transformationsformel für Integrale beschäftigt haben. Dabei haben wir gesehen, dass es sich bei E lediglich um eine verzerrte Kugel handelt. Dazu betrachten wir die Vektorfelder (schreibe $\underline{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}$)

$$A_1(\underline{x}) = \alpha \underline{x}; \quad A_2(\underline{x}) = e^{-\alpha \|\underline{x}\|} (-y, x, 0)$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\|\cdot\|$ die Standardnorm vom \mathbb{R}^3 . Wir wollen nun die Oberflächenintegrale von A_1, A_2 über den Rand von E berechnen. Wir schreiben

$$M = \partial E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}$$

Dies mit der bereits bekannten Parametrisierung von M direkt zu berechnen ist jedoch ziemlich umständlich. Stattdessen wollen wir den Satz von Gauß verwenden. Dafür berechnen wir

$$\operatorname{div}(A_1) = \alpha(\partial_x x + \partial_y y + \partial_z z) = \alpha(1 + 1 + 1) = 3\alpha$$

und mit $\partial_i \|\underline{x}\| = \frac{x_i}{\|\underline{x}\|}$ für $\underline{x} \neq 0$

$$\operatorname{div}(A_2) = -\partial_x e^{-\alpha \|\underline{x}\|} y + \partial_y e^{-\alpha \|\underline{x}\|} x = \frac{\alpha e^{-\alpha \|\underline{x}\|}}{\|\underline{x}\|} (xy - xy) = 0$$

Daher finden wir für A_1

$$\int_M \langle A_1 | d\sigma \rangle = \int_E \operatorname{div}(A_1) d\lambda^3 = 3\alpha \int_E d\lambda^3 = 3\alpha \frac{4}{3} \pi abc = 4\pi \alpha abc$$

wobei wir das früher bereits hergeleitete Volumen für E verwendet haben. Für A_2 finden wir direkt

$$\int_M \langle A_2 | d\sigma \rangle = \int_E \operatorname{div}(A_2) d\lambda^3 = \int_E 0 d\lambda^3 = 0$$

Als weiteres Beispiel betrachten wir den Zylinder (Radius $R = 2$, Höhe $h = 3$)

$$Z = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq R^2, z \in [0, h] \right\} = B_R^2(0) \times [0, h]$$

Dazu haben wir das Vektorfeld

$$F(\underline{x}) = (4x, -2y^2, z^2)$$

gegeben. Wir berechnen das Oberflächenintegral von F über den Rand von Z einmal mit und einmal ohne den Satz von Gauß.

Für den Satz von Gauß haben wir

$$\operatorname{div}(F) = 4 - 4y + 2z$$

Unter Anwendung der bereits häufiger verwendeten Zylinder Koordinaten $(x, y, z) = (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi), z) = \psi(r, \varphi, z)$ finden wir

$$\begin{aligned} \int_{\partial Z} \langle F | d\sigma \rangle &= \int_Z \operatorname{div}(F) d\lambda^3 = \int_Z (4 - 4y + 2z) d\lambda^3 \\ &= \int_0^3 \int_0^2 \int_0^{2\pi} (4 - 4r \sin(\varphi) + 2z) r d\varphi dr dz \\ &= 2\pi \int_0^3 \int_0^2 (4 - 0 + 2z) r dr dz \\ &= 2\pi \int_0^3 (4 + 2z) \frac{2^2}{2} dz \\ &= 4\pi(4 \cdot 3 + 3^2) = 84\pi \end{aligned}$$

Für die direkte Berechnung verwenden wir den früher bereits bewiesenen Zusammenhang zwischen Oberflächenintegral und Normalenfeld n

$$\int_{\partial Z} \langle F | d\sigma \rangle = \int_{\partial Z} \langle F | n \rangle d\sigma$$

Als Orientierung wählen wir das nach außen gerichtete Feld gegeben durch

$$n_M(\underline{x}) = \frac{1}{R}(x, y, 0)$$

auf der Mantelfläche und

$$n_{\pm}(\underline{x}) = (0, 0, \pm 1)$$

auf dem oberen bzw. unteren Deckel. Als Oberflächenelemente finden wir entsprechend

$$\|\sigma_M\| = \|\partial_\varphi\psi \times \partial_z\psi\| = 2(= R); \quad \|\sigma_{\pm}\| = \|\partial_r\psi \times \partial_\varphi\psi\| = r$$

Für den unteren Deckel finden wir $\langle F|n \rangle = -z^2 = 0$, da hier $z = 0$ ist. Für den oberen Deckel ergibt sich $\langle F|n \rangle = z^2 = h^2 = 9$ und damit das Integral

$$\int_{\text{oberer Deckel}} \langle F|n \rangle d\sigma = 9\pi R^2 = 36\pi$$

Für den Mantel finden wir, da hier $r = \text{konst.} = R$ ist,

$$\langle F|n \rangle = \frac{1}{R}(4x^2 - 2y^3)$$

und damit

$$\begin{aligned} \int_{\text{Mantel}} \langle F|n \rangle d\sigma &= \int_0^3 \int_0^{2\pi} \frac{1}{R} (4R^2 \cos^2(\varphi) - 2R^3 \sin^3(\varphi)) R d\varphi dz \\ &= 3 \int_0^{2\pi} (16 \cos^2(\varphi) - 16 \sin^3(\varphi)) d\varphi = 3 \cdot 16\pi(1 - 0) = 48\pi \end{aligned}$$

Wie zu erwarten war ergibt sich damit insgesamt

$$\int_{\partial Z} \langle E|d\sigma \rangle = 48\pi + 36\pi = 84\pi$$

Die trigonometrischen Integrale von $\cos^2(\varphi)$ und $\sin^3(\varphi)$ kann man dabei wie folgt bestimmen:

Wie auch der Sinus besitzt \sin^3 die Eigenschaft $\sin^3(-x) = -\sin^3(x)$, ist also antisymmetrisch. Verschieben wir das Integrationsintervall zu $(-\pi, \pi)$ erhalten wir $\sin^3(x - \pi) = -\sin^3(x)$. Wegen der Antisymmetrie muss das Integral darüber verschwinden.

Für das $\cos^2(\varphi)$ Integral gibt es mehrere Möglichkeiten. Zum Beispiel lässt sich das Integral über

$$\cos^2(\varphi) = \frac{1}{2}(\cos(2\varphi) + 1)$$

(folgt direkt aus den Additionstheoremen) leicht berechnen. Man findet die Stammfunktion

$$\frac{\cos(\varphi) \sin(\varphi) + \varphi}{2}$$

und damit das obige Ergebnis.

Serie 12: Residuen und Anwendung für die Berechnung reeller Integrale

Aufgabe 1. (Residuen)

In der Vorlesung wurde das Residuum als verallgemeinerte Bezeichnung für die Integration um eine isolierte Singularität einer holomorphen Funktion eingeführt. Ist also $f : K_{0,r}(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph für ein $z_0 \in \mathbb{C}$ und $r > 0$, dann ist für $0 < \rho < r$

$$\operatorname{Res}_{z_0}(f) := \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} f(z) dz$$

das Residuum von f bei z_0 . Für den Fall das die Singularität von f bei z_0 hebbar oder ein Pol erster Ordnung ist kennen wir das Ergebnis bereits. Allerdings wollen wir noch ein paar weitere Möglichkeiten kennenlernen das Residuum zu berechnen, ohne das Integral aus der Definition explizit ausführen zu müssen.

- Kennen wir für f die Laurent-Reihe $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n$ so ist

$$\operatorname{Res}_{z_0}(f) = a_{-1}$$

- Hat f bei z_0 ein Pol $k \in \mathbb{N}$ -ter Ordnung, so ist

$$\operatorname{Res}_{z_0}(f) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left((z - z_0)^k f(z) \right)$$

- Betrachten wir ähnlich zur zweiten Aufgabe des letzten Blatts Funktionen der Form $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ mit g, h holomorph s.d. $h(z_0) = 0$ aber $g(z_0) \neq 0$ ist, so finden wir

$$\operatorname{Res}_{z_0}(f) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

Wir wollen dies verwenden um die Residuen der folgenden Funktionen zu ermitteln. Dazu bestimmen und charakterisieren wir zunächst alle isolierten Singularitäten.

(i) $f_n(z) = (z^2 + 1)^{-n}$, $n \in \mathbb{N}_0$

(ii) $g_n(z) = \frac{1}{z^n - c}$, $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$

(iii) $h_n(z) = z^n e^{\frac{1}{z}}$, $n \in \mathbb{Z}$

(iv) $H(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z(1-z)} = \frac{h_{(-1)}(z)}{1-z}$

Nun zu den Lösungen

- (i) Für f_n faktorisieren wir zuerst $z^2 + 1$ zu $(z + i)(z - i) = z^2 + 1$ und erhalten

$$f_n(z) = \frac{1}{(z + i)^n} \frac{1}{(z - i)^n}$$

Wir finden demnach Pole der Ordnung n bei $\pm i$ (wobei für $n = 0$ natürlich gar keine Pole vorliegen). Nach den obigen Bemerkungen finden wir die Residuen

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{\pm i}(f_n) &= \lim_{z \rightarrow \pm i} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (z \mp i)^n \frac{1}{(z \pm i)^n} \frac{1}{(z \mp i)^n} \\ &= \lim_{z \rightarrow \pm i} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \frac{1}{(z \pm i)^n} = \lim_{z \rightarrow \pm i} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (z \pm i)^{-n} \\ &= \lim_{z \rightarrow \pm i} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (z \pm i)^{-n} \end{aligned}$$

Für die Ableitungen berechnen wir

$$\frac{d}{dz} (z \pm i)^{-n} = -n(z \pm i)^{-(n+1)}; \quad \frac{d^2}{dz^2} (z \pm i)^{-n} = (-1)^2 n(n+1)(z \pm i)^{-(n+2)}$$

usw. Induktiv folgt

$$\begin{aligned} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (z \pm i)^{-n} &= (-1)^{n-1} n(n+1) \dots (n + (n-1) - 1) (z \pm i)^{-(n+n-1)} \\ &= (-1)^{n-1} n(n+1) \dots (2n-2) (z \pm i)^{-(2n-1)} \\ &= (-1)^{n-1} \frac{(2n-2)!}{(n-1)!} (z \pm i)^{-(2n-1)} \end{aligned}$$

Einsetzen und Grenzwertbildung, zusammen mit

$$i^2 = -1 \Rightarrow i^{2n-1} (-1)^{n-1} = i,$$

liefert

$$\operatorname{Res}_{\pm i}(f_n) = \pm \frac{(2n-2)!}{((n-1)!)^2} i 2^{-(2n-1)}$$

- (ii) Wir betrachten $c \neq 0$. Dann hat g_n isolierte Singularitäten bei $z^n = c$

$$\Leftrightarrow z = z_k = \sqrt[n]{r} e^{i(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n})}, \quad k = 1, \dots, n; \quad r = |c|; \quad \varphi = \arg(c)$$

Wieder können wir damit g_n faktorisieren und finden

$$g_n(z) = \frac{1}{z - z_1} \dots \frac{1}{z - z_n}$$

Da die z_k (paarweise) verschieden sind handelt es sich hierbei jeweils um Pole erster Ordnung und wir haben mit $\tilde{g}(z) = 1$, $\tilde{h}(z) = z^n - c$

$$\operatorname{Res}_{z_k}(g_n) = \frac{\tilde{g}(z_k)}{\tilde{h}'(z_k)} = \frac{1}{nz_k^{n-1}} = \frac{z_k}{n z_k^n} = \frac{z_k}{nc}$$

- (iii) Für h_n haben wir nur eine isolierte Singularität in $z_0 = 0$ und verwenden daher die Laurentreihe. Wir finden für $n \geq 0$

$$\begin{aligned} h_n(z) &= z^n e^{\frac{1}{z}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^{-k+n} = \sum_{k=-n}^{\infty} \frac{1}{(k+n)!} z^{-k} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+n)!} z^{-k} + \sum_{k=-n}^0 \frac{1}{(k+n)!} z^{-k} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+n)!} z^{-k} + \sum_{k=0}^n \frac{1}{(n-k)!} z^k \end{aligned}$$

Da der Hauptteil niemals abbricht ist bei z_0 eine wesentliche Singularität. Das Residuum können wir direkt ablesen zu

$$\operatorname{Res}_{z_0}(h_n) = \frac{1}{(n+1)!}$$

Für $n = -1$ finden wir das selbe Ergebnis mit verschwindenden Nebenteil. Für $n < -1$ finden wir nach dem ersten Schritt, dass der erste Term des Hauptteils, also insbesondere das Residuum, verschwindet.

- (iv) Für $H(z)$ haben wir neben der wesentlichen Singularität bei $z_0 = 0$ von $h_{(-1)}(z)$ auch einen Pol erster Ordnung in $z_1 = 1$. Für letzteren finden wir das Residuum direkt mit Hilfe der Cauchy-Integralformel zu ($0 < \rho < 1$)

$$\operatorname{Res}_1(H) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-1|=\rho} -\frac{h_{(-1)}(z)}{z-1} dz = -h_{(-1)}(1) = -e$$

Für $z_0 = 0$ finden wir für $|z| < 1$ die bekannte Laurent-Reihe

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

Damit haben wir

$$\operatorname{Res}_0(H) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\rho} \frac{h_{(-1)}(z)}{1-z} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\rho} h_{(-1)}(z) \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n \right) dz$$

Erinnern wir uns an die Integraltheorie zurück können wir die Reihe und das Integral vertauschen, sobald

$$\int \sum_n |f_n| dz < \infty \text{ oder } \sum_n \int |f_n| dz < \infty$$

erfüllt ist. Dies sieht man zum Beispiel mit Hilfe der Standardabschätzung angewandt auf das Integral über $|h_{(-1)}(z)z^n| =: |f_n(z)|$ wodurch

sich eine geometrische Reihe über $\rho < 1$ ergibt. Wir haben daher

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_0(H) &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{|z|=\rho} h_{(-1)}(z) z^n dz \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\rho} h_{(n-1)}(z) dz \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Res}_0(h_{(n-1)}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e^1 = e \end{aligned}$$

Aufgabe 2. (Berechnung reeller Integrale)

In dieser Aufgabe wollen wir eine sehr wichtige Anwendung der komplexen Analysis anschauen. Wir können nämlich reelle Integrale, die für uns bisher nur schwer bis unmöglich zu berechnen waren, mithilfe unserer neu gelernten Techniken lösen.

Dabei gehen wir in der Regel wie folgt vor: Das entsprechende Integral interpretieren wir als komplexes Wegintegral entlang der reellen Achse. Anschließend versuchen wir daraus, ähnlich zu dem komplexen Gauß-Integral auf einem der vorherigen Zettel, ein geschlossenes Wegintegral in \mathbb{C} zu konstruieren, von dem alle anderen Anteile bekannt sind oder verschwinden.

Wir wollen das Integral

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{e^{\frac{x}{2}}}{1 + e^x} dx$$

berechnen. Dazu betrachten wir die meromorphe (holomorph bis auf isolierte Singularitäten) Funktion

$$f(z) = \frac{e^{\frac{z}{2}}}{1 + e^z}$$

Zuerst müssen wir alle isolierten Singularitäten von f bestimmen und charakterisieren, da diese sich auf die Ergebnisse geschlossener Wegintegrale auswirken werden. Die Singularitäten liegen bei

$$1 + e^z = 0 \Leftrightarrow z = z_k = i(\pi + 2\pi k), \quad k \in \mathbb{Z}$$

Betrachten wir die Reihenentwicklung von $1 + e^z$ bei einem der z_k finden wir

$$1 + e^z = 1 + e^{z-z_k} e^{z_k} = 1 - e^{z-z_k} = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_k)^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{(z-z_k)^n}{n!}$$

Die Nullstellen sind daher alle einfach und damit Pole erster Ordnung von f .

Um den Residuensatz verwenden zu können müssen wir die Residuen der Singularitäten bestimmen. Wir schreiben daher f als

$$f(z) = \frac{e^{\frac{z}{2}}}{1+e^z} = \frac{g(z)}{h(z)}$$

um. Da die Pole alle erster Ordnung sind finden wir damit

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z_k}(f) &= \frac{g(z_k)}{h'(z_k)} = \frac{e^{\frac{z_k}{2}}}{e^{z_k}} = e^{\frac{z_k}{2}-z_k} = e^{i(\frac{\pi}{2}+\pi k-\pi-2\pi k)} = e^{-i(\pi k+\frac{\pi}{2})} \\ &= e^{-i\frac{\pi}{2}} e^{-i\pi k} = -i(-1)^k = i(-1)^{k+1} \end{aligned}$$

Wir betrachten nun den Weg entlang des Rechtecks C_R mit den Eckpunkten $-R, R, R+2\pi i, -R+2\pi i$ für ein $R > 0$. Also ein geschlossenes Wegintegral entlang der geraden Wegstrecken

$$-R \rightarrow R \rightarrow R+i2\pi \rightarrow -R+i2\pi \rightarrow -R$$

Da nur einer der zuvor berechneten Pole innerhalb dieses Gebiets liegt, finden wir mit Hilfe des Residuensatzes sofort

$$\int_{C_R} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z_0}(f) = 2\pi i(-i) = 2\pi$$

Wir wollen diese Vorbetrachtungen verwenden um zu zeigen, dass

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{e^{\frac{x}{2}}}{1+e^x} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx =: \lim_{R \rightarrow \infty} I_R \stackrel{!}{=} \pi$$

ist. Dafür verwenden wir das Integral entlang von C_R mit Integrationsrichtung gegen den Uhrzeigersinn

$$\begin{aligned} 2\pi &= \int_{C_R} f(z) dz \\ &= \int_{-R}^R \frac{e^{\frac{s}{2}}}{1+e^s} ds + \int_0^{2\pi} i \frac{e^{\frac{R+is}{2}}}{1+e^{R+is}} ds + \int_R^{-R} \frac{e^{\frac{s+i2\pi}{2}}}{1+e^{s+i2\pi}} ds + \int_{2\pi}^0 i \frac{e^{\frac{-R+is}{2}}}{1+e^{-R+is}} ds \\ &= I_R - \int_{-R}^R \frac{e^{\frac{s}{2}} \cdot (-1)}{1+e^s \cdot 1} ds + i \left(\int_0^{2\pi} \frac{e^{\frac{is}{2}} e^{\frac{R}{2}}}{1+e^{is} e^R} ds - \int_0^{2\pi} \frac{e^{\frac{is}{2}} e^{-\frac{R}{2}}}{1+e^{is} e^{-R}} ds \right) \\ &= 2I_R + i \int_0^{2\pi} \left(\frac{e^{\frac{is}{2}} e^{\frac{R}{2}}}{1+e^{is} e^R} - \frac{e^{\frac{is}{2}} e^{-\frac{R}{2}}}{1+e^{is} e^{-R}} \right) ds \end{aligned}$$

Um die obige Behauptung zu zeigen müssen wir nun lediglich zeigen, dass das letzte Integral von 0 bis 2π für $R \rightarrow \infty$ verschwindet. Dazu verwenden wir mal wieder die Standardabschätzung. Für den zweiten Teil finden wir

daher

$$\begin{aligned} \left| -i \int_0^{2\pi} \frac{e^{\frac{is}{2}} e^{-\frac{R}{2}}}{1 + e^{is} e^{-R}} ds \right| &\leq \int_0^{2\pi} \left| \frac{e^{\frac{is}{2}} e^{-\frac{R}{2}}}{1 + e^{is} e^{-R}} \right| ds \\ &\leq 2\pi \sup_{s \in [0, 2\pi]} \left| \frac{e^{\frac{is}{2}} e^{-\frac{R}{2}}}{1 + e^{is} e^{-R}} \right| = 2\pi \sup_{s \in [0, 2\pi]} \left| \frac{e^{-\frac{R}{2}}}{1 + e^{is} e^{-R}} \right| \end{aligned}$$

Letzteres geht für $R \rightarrow \infty$ gegen $\frac{0}{1+0} = 0$. Analog finden wir

$$\begin{aligned} \left| i \int_0^{2\pi} \frac{e^{\frac{is}{2}} e^{\frac{R}{2}}}{1 + e^{is} e^R} ds \right| &\leq 2\pi \sup_{s \in [0, 2\pi]} \left| \frac{e^{\frac{R}{2}}}{1 + e^{is} e^R} \right| \\ &\leq 2\pi e^{\frac{R}{2}} \frac{1}{e^R - 1} = 2\pi \frac{1}{e^{\frac{R}{2}} - e^{-\frac{R}{2}}} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Dadurch haben wir insgesamt

$$2\pi = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = 2 \lim_{R \rightarrow \infty} I_R + 0$$

und damit

$$\lim_{R \rightarrow \infty} I_R = \pi$$

Aufgabe 3. (Satz von Casorati–Weierstraß)

Wir wollen einen Satz aus der Vorlesung beweisen und dabei ein besseres Verständnis für wesentliche Singularitäten bekommen. Wir zeigen

Voraussetzung. Sei $f : U \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und z_0 eine **wesentliche** Singularität von f .

Behauptung. Dann ist für jedes $\epsilon > 0$ die Menge

$$f(B_\epsilon(z_0) \setminus \{z_0\})$$

dicht in \mathbb{C} .

D.h. wir können mit f , auf einer punktierten Umgebung um z_0 , jedem Punkt in \mathbb{C} beliebig nahe kommen (das heißt nicht, dass jeder Punkt auch erreicht werden muss).

Beweis. Für den Beweis wollen wir den Riemannschen Hebbarkeitssatz verwenden, welcher besagt, dass eine isolierte Singularität genau dann hebbar ist, wenn die entsprechende Funktion auf einer punktierten Umgebung um die Singularität beschränkt ist.

Wir argumentieren mit einem Widerspruchsbeweis. Sei $\epsilon > 0$ und angenommen es existiert ein Punkt $w_0 \in \mathbb{C}$, dem wir nicht beliebig nahe kommen können. D.h. für ein $\delta > 0$ gilt

$$B_\delta(w_0) \cap f(B_\epsilon(z_0) \setminus \{z_0\}) = \emptyset$$

Wir definieren nun die Funktion

$$h(z) = \frac{1}{f(z) - w_0}$$

Nach Annahme können wir w_0 mit $f(z)$ nicht beliebig nahe kommen. Wir haben also stets $|f(z) - w_0| \geq \delta$ und damit

$$|h(z)| \leq \frac{1}{\delta} < \infty$$

h ist also auf einer (punktieren) Umgebung um z_0 beschränkt, womit es sich bei z_0 um eine hebbare Singularität von h handeln muss. Wir bezeichnen die entsprechende analytische Fortsetzung von h ebenfalls mit h .

Wir untersuchen nun den Wert von h bei z_0 . Dieser muss entweder gleich- oder ungleich 0 sein. Zusammengefasst muss es sich also bei z_0 um eine $m \in \mathbb{N}_0$ -fache Nullstelle von h handeln (der Fall $h(z_0) \neq 0$ entspricht $m = 0$). Damit können wir f für $z \neq z_0$ schreiben als

$$f(z) = \frac{1}{h(z)} + w_0$$

Das bedeutet aber, da z_0 eine m -fache Nullstelle von h ist, dass z_0 ein Pol m -ter Ordnung von f ist. Dies ist ein Widerspruch, da nach Voraussetzung z_0 eine wesentliche Singularität von f sein soll. Dementsprechend muss die Behauptung gelten. *q.e.d.*

Aufgabe 4. (Wiederholung: Satz von Stokes)

Zum Schluss wollen wir einen weiteren Integralsatz wiederholen, den Satz von Stokes:

Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine orientierbare, einfach zusammenhängende Fläche, deren Rand durch eine geschlossene Kurve γ beschrieben werden kann. Sei n eine gewählte Orientierung von M (es gibt genau zwei). Dann wählen wir die Orientierung von γ wie folgt:

Betrachten wir die Fläche **entgegen** der Orientierung n , dann soll die Fläche stets **links** von γ liegen (wenn man entlang der Umlaufrichtung von γ blickt). Sei dazu $E : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld, dann gilt

$$\int_M \langle \text{rot}(E) | d\sigma \rangle = \int_\gamma \langle E | ds \rangle$$

Wenn man auf die Orientierung nicht aufpasst gilt die Aussage nur bis auf ein Vorzeichen. In der Physik schreibt man auch hier gerne symbolisch

$$\int_M \nabla \times \vec{E} d\vec{A} = \int_{\partial M} \vec{E} d\vec{s}$$

wobei $d\vec{s}$ das s.g. Linienelement bezeichnet.

Als Fläche betrachten wir die Halbsphäre

$$S_+ := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$$

Wir schreiben wieder $\underline{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Wir wählen als Orientierung n von S_+ s.d. diese vom Ursprung weg zeigt. Wir haben also ($\underline{x} \in S_+$)

$$n(\underline{x}) := \frac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|} \stackrel{\underline{x} \in S_+}{=} \underline{x}$$

Dazu betrachten wir das Vektorfeld

$$F(\underline{x}) = (y + 4, \tanh(z) + 2x, \cosh(x^2 + z^2) + e^{4y^2})$$

Wir wollen das Oberflächenintegral von $\text{rot}(F)$ einmal direkt durch den Satz von Stokes und einmal indirekt durch ein möglichst einfaches Oberflächenintegral berechnen. Da das Normalenfeld nach außen zeigt wählen wir für den Rand

$$\gamma(s) = (\cos(s), \sin(s), 0), s \in [0, 2\pi]$$

Wir finden $\dot{\gamma}(s) = (-\sin(s), \cos(s), 0)$ und damit

$$\begin{aligned} \int_{S_+} \langle \text{rot}(F) | d\sigma \rangle &= \int_{\gamma} \langle F | ds \rangle = \int_0^{2\pi} \langle F(\gamma(s)) | \dot{\gamma}(s) \rangle ds \\ &= \int_0^{2\pi} ((\sin(s) + 4)(-\sin(s)) + 2 \cos(s) \cos(s) + 0) ds \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sin^2(s) - 4 \sin(s) + 2 \cos^2(s)) ds \\ &= -\pi + 0 + 2\pi = \pi \end{aligned}$$

(Wie man Integrale dieser Art berechnet haben wir bereits wiederholt besprochen).

Für die indirekte Anwendung des Satzes überlegen wir uns nochmal was der Satz genau bedeutet. Er besagt, dass es für die Integration von $\text{rot}(F)$ über die Fläche ausreicht nur den Rand mit F zu betrachten. Diese Aussage bleibt auch dann gültig, wenn wir die Fläche im Inneren verformen, solange wir den Rand unverändert lassen.

Haben wir also zwei (orientierbare und einfach zusammenhängende) Flächen

M_1 und M_2 mit der selbe Berandung, gegeben durch die geschlossene Kurve γ , so ist stets für $E \in \mathbb{C}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$

$$\int_{M_1} \langle \text{rot}(E) | d\sigma \rangle = \int_{\gamma} \langle E | ds \rangle = \int_{M_2} \langle \text{rot}(E) | d\sigma \rangle$$

Anstatt den Fluss von $\text{rot}(F)$ direkt durch S_+ zu berechnen können wir stattdessen auch andere Flächen mit der selben Berandung betrachten. Wir wählen dazu die Kreisscheibe

$$K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, z = 0\}$$

also die Fläche die aus S_+ entsteht, wenn wir diese auf die $x - y$ -Ebene projizieren. Das Normalenfeld ist entsprechend überall durch $n = (0, 0, 1)$ gegeben. Wir finden

$$\text{rot}(F) = (\dots, \dots, \partial_x(\tanh(z) + 2x) - \partial_y(y + 4)) = (\dots, \dots, 1)$$

und ohne K parametrisieren zu müssen

$$\int_{S_+} \langle \text{rot}(F) | d\sigma \rangle = \int_K \langle \text{rot}(F) | d\sigma \rangle = \int_K \langle \text{rot}(F) | n \rangle d\sigma = \int_K 1 d\sigma = \pi \cdot 1^2 = \pi$$

Serie 13: Fouriertransformation und partielle Differentialgleichungen

Aufgabe 1. (Faltung und Fouriertransformation auf $L^1(\mathbb{R}^d)$)

In der Vorlesung wurde das Faltungsprodukt auf $L^1(\mathbb{R}^d)$ eingeführt mit

$$\begin{aligned} * : L^1(\mathbb{R}^d) \times L^1(\mathbb{R}^d) &\rightarrow L^1(\mathbb{R}^d) \\ (f, g) &\mapsto (f * g) \end{aligned}$$

wobei (punktweise und fast überall)

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x - y) d\lambda^d(y)$$

ist. Wir wollen zeigen, dass dieses Produkt auf $L^1(\mathbb{R}^d)$ sowohl (i) kommutativ als auch (ii) assoziativ ist.

- (i) Für $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ sind f, g und $(f * g)$ insbesondere integrierbar und wir haben (punktweise, fast überall)

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x - y) d\lambda^d(y)$$

Wir wollen mittels der Transformationsformel die Variablen wechseln. Für ein festes $x \in \mathbb{R}^d$ setzen wir $u = x - y$. Der Betrag der entsprechenden Jakobi-Determinante ist 1 und wir finden

$$\begin{aligned} (f * g)(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x - y) d\lambda^d(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x - u)g(u) d\lambda^d(u) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} g(u)f(x - u) d\lambda^d(u) = (g * f)(x) \end{aligned}$$

Entsprechend gilt $(f * g) = (g * f)$ in $L^1(\mathbb{R}^d)$.

- (ii) Sei nun zusätzlich $h \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Dann sind insbesondere $(g * h)$, $f * (g * h)$ und $(f * g) * h$ integrierbar und wir haben (punktweise, fast überall)

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x - y) d\lambda^d(y)$$

und mit dem Satz von Fubini finden wir

$$\begin{aligned} ((f * g) * h)(z) &= \int_{\mathbb{R}^d} (f * g)(x)h(z - x) d\lambda^d(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x - y) d\lambda^d(y) \right) h(z - x) d\lambda^d(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x - y)h(z - x) d\lambda^d(y)d\lambda^d(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \left(\int_{\mathbb{R}^d} g(x - y)h(z - x) d\lambda^d(x) \right) d\lambda^d(y) \end{aligned}$$

Analog zu (i) transformieren wir mit $u = x - y$ und finden

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} g(x-y)h(z-x) d\lambda^d(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} g(u)h(z-(u+y)) d\lambda^d(u) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} g(u)h((z-y)-u) d\lambda^d(u) \\ &= (g * h)(z-y) \end{aligned}$$

Setzen wir dies oben ein haben wir

$$\begin{aligned} ((f * g) * h)(z) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(y)(g * h)(z-y) d\lambda^d(y) \\ &= (f * (g * h))(z) \end{aligned}$$

Tatsächlich bildet das Faltungsprodukt auf L^1 eine s.g. Algebra, die wie wir gerade gezeigt haben sowohl kommutativ als auch assoziativ ist. Allerdings kann man zeigen, dass sie kein neutrales bzw. 'eins'-Element in L^1 besitzt. Stattdessen lässt sich aber ein solches 'eins'-Element auf L^1 approximieren. Eine entsprechend Folge nennen wir 'Folge guter Kerne'. Um dies besser zu verstehen betrachten wir ein allgemeines Beispiel:

Es sei $0 \leq \phi \in L^1(\mathbb{R}^d)$ mit $\|\phi\|_{L^1} = 1$ und $(\epsilon_k) \subset (0, \infty)$ eine Nullfolge. Wir definieren

$$\phi_{\epsilon_k}(x) := \epsilon_k^{-d} \phi\left(\frac{x}{\epsilon_k}\right)$$

Wir wollen zeigen, dass es sich hierbei um eine Folge guter Kerne handelt.

- (i) Die erste Bedingung lautet, dass das Integral über ϕ_{ϵ_k} für alle $k \in \mathbb{N}$ normiert sein muss. Die zweite Bedingung, dass für ein $M > 0$ und alle $k \in \mathbb{N}$: $\int |\phi_{\epsilon_k}| d\lambda^d \leq M$ sein muss, können wir dank der Positivität von ϕ_{ϵ_k} damit auch direkt zeigen. Es gilt also für ein festes $k \in \mathbb{N}$ und mit $|\phi_{\epsilon_k}| = \phi_{\epsilon_k}$

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\phi_{\epsilon_k}(x)| d\lambda^d(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \phi_{\epsilon_k}(x) d\lambda^d(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \epsilon_k^{-d} \phi\left(\frac{x}{\epsilon_k}\right) d\lambda^d(x)$$

Wir betrachten die Transformation $x \mapsto y = x \epsilon_k^{-1}$. Die entsprechende Jakobi-Determinante gibt für jede Komponente einen Faktor ϵ_k^{-1} . Den resultierenden Faktor ϵ_k^{-d} haben wir bereits gegeben. Entsprechend finden wir

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \epsilon_k^{-d} \phi\left(\frac{x}{\epsilon_k}\right) d\lambda^d(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} \phi(y) d\lambda^d(y) = \int_{\mathbb{R}^d} |\phi(y)| d\lambda^d(y) = \|\phi\|_{L^1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Mit $M = 1$ haben wir damit die ersten beiden Bedingungen gezeigt.

(ii) Wir wollen zeigen, dass für jedes $\delta > 0$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\|x\| \geq \delta} \phi_{\epsilon_k}(x) d\lambda^d(x) = 0$$

gilt. Sei dazu $\delta > 0$. Wir betrachten also das Integrationsgebiet

$$U_\delta := \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\| \geq \delta\} = \mathbb{R}^d \setminus B_\delta(0)$$

zuvor hat sich unser Integrationsgebiet bei Transformation nicht verändert, da wir ganz \mathbb{R}^d betrachtet hatten. Nun müssen wir bei Koordinatenwechsel auch U_δ transformieren. Mit der Transformation $\Phi_k(x) = \epsilon_k^{-1}x$ finden wir

$$V_{\delta,k} := \Phi_k(U_\delta) = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\| \geq \delta \epsilon_k^{-1}\} = \mathbb{R}^d \setminus B_{\frac{\delta}{\epsilon_k}}(0)$$

$$\begin{aligned} \int_{U_\delta} \phi_{\epsilon_k}(x) d\lambda^d(x) &= \int_{U_\delta} \epsilon_k^{-d} \phi\left(\frac{x}{\epsilon_k}\right) d\lambda^d(x) \\ &= \int_{V_{\delta,k}} \phi(y) d\lambda^d(y) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{V_{\delta,k}}(y) \phi(y) d\lambda^d(y) \end{aligned}$$

Die Funktion unter dem letzten Integral $\mathbb{1}_{V_{\delta,k}}(y)\phi(y)$ geht für $k \rightarrow \infty$ (fast überall) punktweise und monoton gegen 0. Mit dem Satz von der monotonen Konvergenz folgt

$$\int_{\|x\| \geq \delta} \phi_{\epsilon_k}(x) d\lambda^d(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{V_{\delta,k}}(y) \phi(y) d\lambda^d(y) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

Vor allem der letzte Schritt zeigt, dass der Grenzwert (im obigen Sinne) einer Folge guter Kerne seine gesamte 'Masse' (also der Teil der zum Integral beiträgt) in einem einzelnen Punkt, in unserem Fall $\{0\}$, konzentriert haben müsste. Da das Lebesgue-Integral einzelne Punkte nicht sieht, kann das so approximierte 'eins'-Element der Faltung keine Funktion im herkömmlichen Sinne beschreiben.

Allerdings lassen sich verallgemeinerte Funktionen, die s.g. Distributionen, definieren für die ein solches Verhalten durchaus möglich ist. Das 'eins'-Element der Faltung ist in diesem Sinne durch die s.g. Dirac Delta-Distribution δ_0 gegeben.

Zum Schluss wollen wir sehen wie Faltung und Fouriertransformation in L^1 zusammen passen:

Wir betrachten wieder $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ und $k \in \mathbb{R}^d$. Wir wollen zeigen, dass

$$\widehat{(f * g)}(k) = (2\pi)^{\frac{d}{2}} \hat{f}(k) \hat{g}(k)$$

ist, wobei

$$\mathcal{F}(h)(k) := \hat{h}(k) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ikx} h(x) d\lambda^d(x), \quad \forall h \in L^1(\mathbb{R}^d)$$

die Fouriertransformation definiert. Damit haben wir mit dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned} (\widehat{f * g})(k) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ikx} (\widehat{f * g})(x) d\lambda^d(x) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ikx} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y) d\lambda^d(y) \right) d\lambda^d(x) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ik(x-y)} e^{-iky} f(y)g(x-y) d\lambda^d(y) d\lambda^d(x) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-iky} f(y) \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ik(x-y)} g(x-y) d\lambda^d(x) d\lambda^d(y) \end{aligned}$$

Mit der Transformation zu $u = y - x$ finden wir erneut

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ik(x-y)} g(x-y) d\lambda^d(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-iku} g(u) d\lambda^d(u) \\ &= \hat{g}(k) \end{aligned}$$

Einsetzen oben liefert

$$\begin{aligned} (\widehat{f * g})(k) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-iky} f(y) \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ik(x-y)} g(x-y) d\lambda^d(x) d\lambda^d(y) \\ &= (2\pi)^{\frac{d}{2}} \hat{g}(k) \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-iky} f(y) d\lambda^d(y) = (2\pi)^{\frac{d}{2}} \hat{g}(k) \hat{f}(k) \end{aligned}$$

Aufgabe 2. (Dirichlet-Problem für die Kreisscheibe)

Wir wollen das Dirichlet-Problem für die Kreisscheibe lösen. Dazu wollen wir die aus der Vorlesung bekannte Lösung für \mathbb{R}_+^2 und unsere Hilfsmittel der komplexen Analysis mit der Relation $\mathbb{R}^2 \sim \mathbb{C}$ verwenden. Zuerst betrachten wir eine entsprechende Transformation:

Es sei $\Psi : \mathbb{C} \setminus \{-i\} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$. Wir zeigen zunächst, dass Ψ die obere Halbebene holomorph auf $B_1(0)$ abbildet:

Ψ ist offensichtlich, bis auf einen Pol erster Ordnung bei $z = -i$, holomorph. Betrachten wir nun $z \in \mathbb{C}$ finden wir

$$\begin{aligned} |\Psi(z)|^2 &= \left| \frac{z-i}{z+i} \right|^2 = \frac{(z-i)(\bar{z}+i)}{(z+i)(\bar{z}-i)} = \frac{|z|^2 + 1 - 2\text{Im}(z)}{|z|^2 + 1 + 2\text{Im}(z)} < 1 \Leftrightarrow \text{Im}(z) > 0 \\ &\Leftrightarrow z \in \mathbb{C}_+ \end{aligned}$$

Insbesondere sieht man $|\Psi(z)| = 1 \Leftrightarrow \text{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$. Also haben wir $\Psi(\mathbb{C}_+) \subset B_1(0)$ und insbesondere $\Psi(\partial\mathbb{C}_+) \subset \partial B_1(0)$. Wir wollen nun die inverse $\Phi = \Psi^{-1}$ auf einem größt möglichen Bereich berechnen. Wir finden

$$\begin{aligned} w = \frac{z-i}{z+i} &\Leftrightarrow zw + iw = z - i \Leftrightarrow z(w-1) = -i(w+1) \Leftrightarrow z = i \frac{w+1}{1-w} \\ &\Rightarrow \Phi(w) := i \frac{1+w}{1-w} \end{aligned}$$

ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Außerdem ist

$$\begin{aligned} \Phi(w) &= i \frac{1+w}{1-w} = i \frac{1+w}{1-w} \frac{1-\bar{w}}{1-\bar{w}} = i \frac{1-|w|^2 + 2i\text{Im}(w)}{|1-w|^2} \\ &= -2\text{Im}(w) + i \frac{1-|w|^2}{|1-w|^2} \end{aligned}$$

und damit $\text{Im}(z) = \text{Im}(\Phi(w)) > 0 \Leftrightarrow |w| < 1 \Leftrightarrow w \in B_1(0)$ und $\text{Im}(z) = \text{Im}(\Phi(w)) = 0 \Leftrightarrow |w| = 1 \Leftrightarrow w \in \partial B_1(0)$. Es folgt $\Phi(B_1(0)) \subset \mathbb{C}_+$ und $\Phi(\partial B_1(0) \setminus \{1\}) \subset \partial\mathbb{C}_+$.

Wir haben also insgesamt eine bijektive und in beide Richtungen holomorphe Abbildung zwischen \mathbb{C}_+ und $B_1(0)$ gefunden. Ferner gilt dies insbesondere auch zwischen $\mathbb{R}(= \partial\mathbb{C}_+)$ und $\partial B_1(0) \setminus \{1\}$.

Wir wollen das vorherige Ergebnis benutzen um eine Integraltransformation herzuleiten, die uns bei unserer Aufgabe helfen wird. Sei allgemein $f : \partial B_1(0) \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s.d. $(f \circ \Psi)g \in L^1(\mathbb{R})$. Wir parametrisieren $\partial B_1(0) \setminus \{1\}$ mit $e^{i\theta}$ mit $\theta \in (0, 2\pi)$. Mit $t := \Phi(e^{i\theta})$ finden wir $\Psi(t) = e^{i\theta}$ und damit

$$\int_{\mathbb{R}} f(\Psi(t))g(t) dt = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})g(\Phi(e^{i\theta})) \frac{ie^{i\theta}}{\Psi'(\Phi(e^{i\theta}))} d\theta$$

Wobei wir $dt\Psi'(t) = d(\Psi(t)) = d(e^{i\theta}) = ie^{i\theta}d\theta$ und $t = \Phi(e^{i\theta})$ verwendet haben. Weiter berechnen wir

$$\begin{aligned} \Psi(t) &= \frac{t-i}{t^2+1} = \frac{t^2-1}{t^2+1} + i \frac{-2t}{t^2+1} = e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta) \\ \Rightarrow \cos(\theta) &= \frac{t^2-1}{t^2+1}; \quad \sin(\theta) = \frac{-2t}{t^2+1} \\ \Psi'(t) &= \frac{4t}{(t^2+1)^2} + i \frac{2(t^2-1)}{(t^2+1)^2} = \sin^2(\theta) \frac{1}{t} - i \cos(\theta) \sin(\theta) \frac{1}{t} \\ \Phi(e^{i\theta}) &= i \frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)-1} \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}\Psi'(\Phi(e^{i\theta})) &= (\cos(\theta) - 1)(\sin(\theta) - i\cos(\theta)) = (\cos(\theta) - 1)(-ie^{i\theta}) \\ &= ie^{i\theta}(1 - \cos(\theta))\end{aligned}$$

Insgesamt haben wir also

$$\int_{\mathbb{R}} f(\Psi(t))g(t) dt = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})g(\Phi(e^{i\theta}))\frac{1}{1 - \cos(\theta)}d\theta$$

Wir wollen dies benutzen um die Lösung von \mathbb{R}_+^2 auf $B_1(0)$ übertragen. Wir betrachten also das Problem

$$\begin{aligned}-\Delta u(x, y) &= 0, \quad (x, y) \in B_1(0) \\ u(x, y) &= u_0(x, y), \quad (x, y) \in \partial B_1(0)\end{aligned}$$

mit dem Randwert $u_0 \in \mathbf{C}(\partial B_1(0))$. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass das entsprechende Problem für \mathbb{R}_+^2 durch

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \varphi_0(t) \frac{y}{(x-t)^2 + y^2} dt$$

gelöst wird. Wir benutzen nun Ψ und Φ um dies auf unser Problem zu übertragen. Wir gehen über zu \mathbb{C}_+ mit $z = x + iy$ und finden

$$\operatorname{Im}\left(\frac{1}{t-z}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{t-x+iy}{(x-t)^2 + y^2}\right) = \frac{y}{(x-t)^2 + y^2}$$

was uns helfen wird den gegebenen Hinweis zu verwerten. Wir haben

$$\varphi(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \varphi_0(t) \operatorname{Im}\left(\frac{1}{t-z}\right) dt$$

und transformieren diese Lösung, indem wir $\varphi = u \circ \Psi$ und $\varphi_0 = u_0 \circ \Psi$ setzen. Für $w \in B_1(0)$ finden wir $w = \Psi(z)$ ($\Phi(w) = z$) für ein $z \in \mathbb{C}_+$. Außerdem haben wir für $r \in [0, 1)$ und $\eta \in [0, 2\pi)$ die Polardarstellung $w = re^{i\eta}$. Damit finden wir

$$\begin{aligned}u(w) = u(\Psi(z)) = \varphi(z) &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \varphi_0(t) \operatorname{Im}\left(\frac{1}{t-z}\right) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} u_0(\Psi(t)) \operatorname{Im}\left(\frac{1}{t-z}\right) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} u_0(\Psi(t)) \operatorname{Im}\left(\frac{1}{t-\Phi(w)}\right) dt\end{aligned}$$

Verwenden wir unsere Transformation von zuvor finden wir damit

$$\begin{aligned}
 u(re^{i\eta}) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u_0(e^{i\theta}) \operatorname{Im} \left(\frac{1}{\Phi(e^{i\theta}) - \Phi(re^{i\eta})} \right) \frac{1}{1 - \cos(\theta)} d\theta \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u_0(e^{i\theta}) \frac{1 - \cos(\theta)}{2} \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(\eta - \theta)} \frac{1}{1 - \cos(\theta)} d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_0(e^{i\theta}) \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(\eta - \theta)} d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_0(e^{i\theta}) P_r(\eta - \theta) d\theta
 \end{aligned}$$

wobei wir den Hinweis aus der Aufgabenstellung verwendet haben.

Aufgabe 3. (Lösung der Diffusionsgleichung)

In dieser Aufgabe wollen wir die Diffusionsgleichung

$$\partial_t \rho(x, t) = D \Delta \rho(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$$

mit $D > 0$ und Anfangswert $\rho(x, 0) = \rho_0(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$ lösen. Dazu nehmen wir an, dass $\rho_0, \hat{\rho}_0 \in L^1(\mathbb{R}^d)$ ist.

Wir suchen in dieser Aufgabe nach differenzierbaren Lösungen. Tatsächlich kann die Theorie der Distributionen dazu verwendet werden Lösungen (s.g. 'schwache Lösungen') zu finden, welche im herkömmlichen Sinn nicht differenzierbar sind.

Wir nehmen also an, dass ρ hinreichend regulär ist. Dadurch finden wir

$$\begin{aligned}
 \partial_t \hat{\rho}(k, t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\rho(x, t+h) - \rho(x, t)}{h} e^{-ikx} dx^d \\
 &= \int_{\mathbb{R}^d} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\rho(x, t+h) - \rho(x, t)}{h} e^{-ikx} dx^d \\
 &= \int_{\mathbb{R}^d} \partial_t \rho(x, t) e^{-ikx} dx^d = D \int_{\mathbb{R}^d} (\Delta \rho(x, t)) e^{-ikx} dx^d \\
 &= (\widehat{\Delta \rho})(k, t) = D(ik)^2 \hat{\rho}(k, t) = -Dk^2 \hat{\rho}(k, t)
 \end{aligned}$$

Entsprechend finden wir das äquivalente Anfangswertproblem

$$\partial_t \hat{\rho}(k, t) = -Dk^2 \hat{\rho}(k, t), \quad (k, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}; \quad \hat{\rho}(k, 0) = \hat{\rho}_0(k), \quad k \in \mathbb{R}^d$$

Diese lässt sich nun leicht durch

$$\hat{\rho}(k, t) = e^{-Dk^2 t} \hat{\rho}_0(k) = \frac{(2\pi)^{d/2}}{(2\pi)^{d/2}} e^{-Dk^2 t} \hat{\rho}_0(k) =: (2\pi)^{\frac{d}{2}} \widehat{G}(k, t) \hat{\rho}_0(k)$$

lösen. Aus der Vorlesung wissen wir, dass die Fouriertransformierte von

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{2\sigma^2}}$$

durch

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{\sigma^2 k^2}{2}} e^{-i\alpha k}$$

gegeben ist. Durch $\alpha = 0$ und $\sigma^2 = 2Dt$ finden wir mit dem Inversionstheorem

$$G(x, t) = \frac{1}{(4\pi Dt)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$$

Entsprechend ergibt sich aus den Eigenschaften der Faltung ($G_t = G(\cdot, t)$)

$$\hat{\rho}(k, t) = (2\pi)^{\frac{d}{2}} \widehat{G}(k, t) \hat{\rho}_0(k) = (\widehat{G_t * \rho_0})$$

und damit $\rho = (G_t * \rho_0)$. Wir haben also

$$\rho(x, t) = \int_{\mathbb{R}^d} \rho_0(y) G(x - y, t) dy^d$$

Aufgabe 4. (Wiederholung: Teilchen im elektromagnetischen Feld)

Zum Abschluss wollen wir eine konkrete Anwendung der linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten betrachten. Wir betrachten ein Punktteilchen mit Masse $m > 0$ und Ladung e , welches sich mit der (Anfangs-)Geschwindigkeit $v \in \mathbb{R}^3$ bewegt. Hinzu betrachten wir konstante elektrische und magnetische Felder $E, B \in \mathbb{R}^3$. Die Newtonsche Bewegungsgleichung lautet für diesen Fall (F_L -Lorentz Kraft)

$$ma = F_L = e[(v \times B) + E]$$

oder äquivalent

$$\dot{v} = v \times b + f$$

mit $b = \frac{e}{m}B \neq 0$, $f = \frac{e}{m}E$ und $v = \dot{x}$. Dazu seien die Anfangswerte $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^3$ und $v(0) = v_0 \in \mathbb{R}^3$ gegeben. Wir suchen zunächst eine praktischere Darstellung der Bewegungsgleichung. Man überzeuge sich leicht, dass für

$$A = \begin{pmatrix} 0 & b_3 & -b_2 \\ -b_3 & 0 & b_1 \\ b_2 & -b_1 & 0 \end{pmatrix}$$

gilt, dass

$$v \times b = Av, \quad \forall v \in \mathbb{R}^3$$

Damit handelt es sich bei der obigen Differentialgleichung um eine (gewöhnliche) lineare und für $f \neq 0$ inhomogene Differentialgleichung. Für vorgegebene Anfangswerte wissen wir sofort, dass eine eindeutige maximale Lösung existiert. Des Weiteren ist eine allgemeine Lösung des homogenen Systems durch

$$v_{\text{hom}}(t) = e^{tA}v_{\text{hom}}(0)$$

gegeben. Wir wollen für diesen Ausdruck vereinfachen. Dazu wählen wir unser Koordinatensystem geschickt:

Wir starten mit kartesischen Standard Koordinaten e_1, e_2, e_3 . Dieses drehen wir s.d. in den neuen Koordinaten, bezeichne diese mit $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{c}_3$, b parallel zu \tilde{c}_3 ist. Wir können also $b = \omega\tilde{c}_3$ annehmen und zerlegen nun v in einen Teil parallel und einen Teil senkrecht zu b . D.h. wir haben

$$v_{\parallel} = \frac{v \cdot b}{\omega^2}b; \quad v_{\perp} = v - v_{\parallel}$$

Wir drehen nun unser Koordinatensystem erneut um die \tilde{c}_3 -Achse s.d. in den neuen Koordinaten, bezeichne diese nun mit c_1, c_2, c_3, v_{\perp} parallel zu c_1 ist. Damit ist

$$b = \omega\tilde{c}_3 = \omega c_3; \quad v_{\parallel} = (v \cdot c_3)c_3 = v_3 c_3; \quad v_{\perp} = v_1 c_1$$

und insbesondere $v = v_1 c_1 + v_3 c_3 = (v_1, 0, v_3)$. Da die kartesischen Koordinaten eine rechtshändige ONB bilden und wir diese lediglich zweimal gedreht haben, gilt dies auch für unsere neuen Koordinaten. In diesen Koordinaten haben wir insbesondere

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \omega & 0 \\ -\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir berechnen $A^0 = \mathbb{1}$, $A^1 = A$

$$A^2 = - \begin{pmatrix} \omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A^3 = - \begin{pmatrix} 0 & \omega^3 & 0 \\ -\omega^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A^4 = \begin{pmatrix} \omega^4 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Induktiv findet man für $k \in \mathbb{N}$

$$A^{2k} = (-1)^k \begin{pmatrix} \omega^{2k} & 0 & 0 \\ 0 & \omega^{2k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^{2k-1} = (-1)^k \begin{pmatrix} 0 & -\omega^{2k-1} & 0 \\ \omega^{2k-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Insgesamt haben wir damit

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!} = \mathbf{1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(tA)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(tA)^{2k-1}}{(2k-1)!} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) & 0 \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

da

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(\omega t)^{2k}}{(2k)!} = \cos(\omega t)$$

und

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(\omega t)^{2k-1}}{(2k-1)!} = -\sin(\omega t)$$

ist. Bei e^{tA} handelt es sich also um eine Drehung um die z -Achse. Mit

$$\omega^{-1}(v \times b) = (v_1 c_1 \times c_3 + v_3 c_3 \times c_1) = v_1(c_1 \times c_3) = -v_3 c_2$$

ergibt sich also

$$e^{tA} v = \cos(\omega t) v_1 c_1 - \sin(\omega t) v_1 c_2 + v_3 c_3 = \cos(\omega t) v_{\perp} + \frac{\sin(\omega t)}{\omega} v \times b + v_{\parallel}$$

Wir wollen damit eine Lösung des konkreten inhomogenen Systems mit $f = c_3$, $x_0 = 0$ und $v_0 = v_0 c_1$ ($v_0 > 0$) finden. Wenn v eine Lösung des homogenen Systems ist, dann finden wir

$$\frac{d}{dt}(v(t) + tf) = \dot{v} + f = Av + f$$

und haben damit eine Lösung des inhomogenen Systems gefunden. In unserem Fall ist $v_{0,\perp} = v_0$, $v_{0,\parallel} = 0$ und $\omega^{-1}(v_0 \times b) = -v_0 c_2$ und damit

$$v(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) v_0 \\ -\sin(\omega t) v_0 \\ t \end{pmatrix}$$

und mit $\frac{v_0}{\omega} = r > 0$ (dem Radius der Spiralbahn)

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t v(t') dt' = \begin{pmatrix} \sin(\omega t) v_0 \omega^{-1} \\ \cos(\omega t) v_0 \omega^{-1} \\ \frac{1}{2} t^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ v_0 \omega^{-1} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} r \sin(\omega t) \\ r(\cos(\omega t) - 1) \\ \frac{1}{2} t^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Das Teilchen wird also vom elektrischen Feld immer weiter in c_3 -Richtung beschleunigt, während das magnetische Feld die Bewegung in c_1, c_2 -Richtung auf eine Kreisbahn mit konstantem Radius und Frequenz zwingt. Die Gesamtbewegung ist daher eine Spiralbahn, wobei durch die steigende Geschwindigkeit in c_3 -Richtung die Abstände der Windungen immer größer werden.